Выпуклая и комбинаторная геометрия

Пересечения выпуклых тел

Р. И. Просанов

§ 1. Теорема Хелли и её родственники

В настоящей статье мы приведём доказательства некоторых результатов комбинаторной геометрии о взаимном расположении выпуклых тел. Данные результаты хорошо известны специалистам, однако их популяризация представляет определённый интерес. Как это часто бывает с задачами комбинаторной геометрии, весь материал вполне доступен продвинутому школьнику (в частности, эта заметка основана на миникурсе, прочитанном автором на летней школе «Комбинаторика и алгоритмы»). Для достижения наибольшей общности мы сформулируем все результаты для многомерных объектов, однако даже для плоскости они нетривиальны и содержательны, не говоря уже о трёхмерном пространстве. В частности, если читатель не привык к многомерной геометрии, то мы призываем его рассматривать все утверждения на двумерных и трёхмерных примерах. Эту заметку можно воспринимать как небольшой, но достаточно широкий экскурс в современную комбинаторную геометрию: для достижения основного результата нам придётся познакомить читателя с рядом теорем и концепций, имеющих самостоятельную ценность. Мы будем во многом следовать замечательной англоязычной книге Матушека [14]. Отметим, что в последние годы в связи с появлением работ, в которых задачи

Часть данной работы была выполнена в рамках проекта Swiss National Science Foundation 200021_169391.

комбинаторной геометрии решаются топологическими методами, интерес к изложенным результатам лишь усиливается.

Мы предполагаем, что читатель уже знаком с понятием выпуклости. Выпуклость — очень сильное условие, позволяющее избегать нежелательных конструкций, но всё ещё оставляющее большой простор для разнообразия форм. Кроме того, изучение выпуклых тел часто мотивировано различными приложениями математики. Мы надеемся, что читатель также сталкивался с основным фактом комбинаторной геометрии выпуклых тел: известной теоремой Хелли (а если нет, то мы отсылаем его к замечательной статье Протасова [2]). В любом случае напомним её формулировку.

Теорема 1.1 (Хелли, 1913). *Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$, причём любые $d+1$ из них имеют общую точку. Тогда все множества имеют общую точку.*

Спустя много лет, прошедших после первого знакомства автора с этим утверждением, оно всё ещё кажется ему удивительным. Несмотря на сколь угодно большое количество тел, огромное разнообразие возможных форм, локальное условие пересечения влечёт глобальное. Благодаря простоте формулировки и изяществу доказательства, теорема Хелли замечательно демонстрирует эстетическую составляющую математики и, видимо, по этой причине является стандартным материалом многих математических кружков.

В данной статье мы обсудим некоторое обобщение теоремы Хелли. Тут стоит заметить, что обобщений у неё существует огромное количество. На пике популярности вокруг теоремы Хелли была развёрнута целая индустрия по производству разнообразных схожих результатов. Подробности можно прочитать в обзоре [1]. Однако теорема, о которой мы будем говорить, выгодно выделяется среди многих. Это так называемая (p, q)-теорема. Её предложили в качестве гипотезы Гуго Хадвигер и Ганс Дебруннер ещё в 1957 году [10], но полностью доказать смогли только в 1992 году выдающиеся математики Нога Алон и Дэниэл Клейтман [5]. Как мы уже отметили, доказательство этой теоремы примечательно прежде всего тем, что на нём можно продемонстрировать целый ряд методов комбинаторной геометрии, нашедших применение во многих других ситуациях.

Теорема 1.2 ((p, q)-теорема, 1992). *Пусть даны натуральные числа $p \geqslant q \geqslant d+1$ и $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, причём среди любых p из этих множеств найдутся q имеющих общую точку. Тогда существует такая константа $c = c(p, q, d)$ (не зависящая от n) и такое конечное множество точек X, $|X| \leqslant c$, что любое F_i содержит хотя бы одну точку из X.*

Другими словами, при наложении некоторых локальных условий на пересечения (куда более слабых, чем в теореме Хелли) все тела можно одновременно «проткнуть» с помощью ограниченного набора точек (вне зависимости от количества тел в системе, которое может стремиться к бесконечности при фиксированных p и q).

В дальнейшем, если для семейства выпуклых множеств выполнено условие этой теоремы, то будем говорить, что на семейство наложено (p, q)-условие.

Точное значение $c(p, q, d)$ известно только в случае $p < 2(q-1)$ и равно $p - q + 1$, доказательство этого факта предоставляется читателю. Во всех остальных случаях оно неизвестно. В данной статье мы не будем предлагать никаких оценок $c(p, q, d)$. Тогда теорема сводится к тому, что можно выбрать набор точек размера, не зависящего от n. Поэтому можно положить q наименьшим, для которого утверждение имеет смысл, т. е. взять $q = d + 1$. В самом деле, если среди любых p множеств найдутся $q \geqslant d+1$ множеств, имеющих общую точку, то, конечно, можно утверждать, что найдётся $d + 1$ множество, имеющее общую точку. Так что для всех больших q достаточно положить $c(p, q, d) = c(p, d + 1, d)$.

В ближайших разделах мы познакомим читателя с рядом существенных результатов комбинаторной геометрии, а затем продемонстрируем, как это всё приводит к доказательству (p, q)-теоремы.

§ 2. Дробная теорема Хелли

Первый нужный нам факт является другим естественным обобщением теоремы Хелли. Пусть снова дано семейство из n выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$. Всего мы имеем C_n^{d+1} наборов точек этих множеств размера $d+1$. Если для каждого из этих наборов найдётся общая точка, то по теореме Хелли все множества имеют общую точку. Хороший вопрос: а если не все, но «почти все» из таких наборов имеют общую точку, можно ли что-то утверждать про всё семейство? Интуитивно хочется сказать, что тогда и «почти все» множества должны пересекаться в какой-то точке. В этом и состоит утверждение дробной теоремы Хелли, которую мы сейчас докажем.

Теорема 2.1 (Качальский и Лю, 1979, [12]). *Пусть дано число $\alpha > 0$, и пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$, причём известно, что имеется αC_n^{d+1} наборов $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_{d+1}}$, каждый из которых пересекается в одной точке. Тогда существует такое β, зависящее только от α и d, но не от n, что не менее βn множеств среди F_i имеют общую точку.*

Мы докажем, что достаточно взять $\beta = \alpha/(d + 1)$. Это весьма слабая оценка, в частности, если $\alpha \to 1$, то β стремится к $1/(d + 1)$, хотя, казалось бы, при этом дробная теорема Хелли должна переходить в обычную. И действительно, Гил Калаи [11] доказал, что при $\alpha < 1$ можно взять $\beta = 1 - (1 - \alpha)^{1/(d+1)}$, — с такой оценкой мы получим обычную теорему Хелли из дробной. Однако доказательство Калаи существенно выходит за рамки данной статьи.

Доказательство. В дальнейшем под многогранником будем подразумевать выпуклый многогранник (политоп) в пространстве $\mathbb{R}^d$. Если читатель до сих пор не слишком часто сталкивался с многомерными многогранниками, то предлагаем ему рассматривать всё для случая плоскости и трёхмерного пространства, а также ознакомиться с прекрасной книгой [4]. В целом достаточно понимать, что многомерный многогранник — это просто естественное обобщение понятий трёхмерного многогранника и двумерного многоугольника на пространства большей размерности. Будем пользоваться следующим определением многогранника: (выпуклый) многогранник в $\mathbb{R}^d$ есть выпуклая оболочка конечного множества точек из $\mathbb{R}^d$. С понятием выпуклой оболочки можно подробнее ознакомиться в [4].

Мы сейчас проделаем важный трюк, который понадобится нам и в дальнейшем. Покажем, что если доказать дробную теорему Хелли для многогранников, то очень легко получить её и для любых выпуклых множеств.

Пусть дано множество $\{1, \ldots, n\}$ всех индексов, нумерующих наши выпуклые множества $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Выберем произвольное подмножество $I \subset \{1, \ldots, n\}$ и положим $F_I = \bigcap_{i \in I} F_i$. Если F_I непусто, то выберем точку $\bar{z}_I$ в этом пересечении (здесь и далее мы пишем горизонтальную черту над символами точек пространства, чтобы отличать их от чисел). В качестве индекса здесь взято не число, а подмножество I исходного множества индексов.

Теперь положим $F'_j = \operatorname{conv}(\{\bar{z}_I : j \in I\})$, где $\operatorname{conv}(X)$ обозначает выпуклую оболочку множества X. Другими словами, для каждого множества F_j мы рассматриваем все подмножества индексов I, содержащие j, и если F_I непусто, то выбираем из него точку $\bar{z}_I$, после чего рассматриваем выпуклую оболочку всех взятых точек, получая некоторый многогранник. Автор оставляет читателю следующие упражнения: для любого j имеем $F'_j \subseteq F_j$, а для любого подмножества индексов I множество $F'_I = \bigcap_{i \in I} F'_i$ непусто тогда и только тогда, когда F_I непусто.

Таким образом, наше множество точек $\bar{z}_I$ и соответствующее ему семейство $F'_1, \ldots, F'_n$ несут в себе всю комбинаторную информацию об устройстве пересечений множеств из нашего исходного семейства. Мы не будем писать штрихи в дальнейшем, а будем просто предполагать, что наше семейство состоит из многогранников.

Для доказательства теоремы определим *лексикографический порядок* на точках из $\mathbb{R}^d$, т. е. научимся сравнивать их друг с другом. Введём обычную систему координат и скажем, что точка $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ лексикографически больше точки $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, если при некотором i имеем $x_j = y_j$ для всех $j < i$, но $x_i > y_i$. Читателю предлагается в качестве упражнения описать, как для данной точки $\bar{x}$ выглядит множество точек в $\mathbb{R}^d$, лексикографически меньших этой точки.

Лексикографическим минимумом множества назовём лексикографически минимальную среди всех точек данного множества, если такая существует. Заметим, что для любого многогранника такая точка заведомо существует и единственна. (Это верно и для произвольного компакта.) Например, рассмотрим многоугольник на плоскости. Возьмём горизонтальную прямую ниже этого многоугольника и будем двигать её вверх, пока прямая не коснётся многоугольника. Если она касается в вершине, это и есть искомая точка минимума, а если она касается по стороне, то возьмём самую левую вершину этой стороны. Читателю предлагается обобщить это рассуждение на многогранники большей размерности.

Выберем некоторое подмножество индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$ размера не меньше d, для которого $F_I \neq \varnothing$. Тогда найдётся такое подмножество $J \subset I$ размера d, для которого лексикографические минимумы множеств F_I и F_J совпадают. Это значит, что точка минимума любого пересечения в нашем семействе всегда задаётся пересечением только каких-то d множеств семейства.

В самом деле, пусть $\bar{u}$ — точка лексикографического минимума в F_I. Рассмотрим множество A точек, меньших $\bar{u}$. Заметим, что это множество выпуклое. Поскольку $\bar{u}$ — минимум в F_I, то $A \cap F_I = \varnothing$. Но тогда по теореме Хелли среди набора $\{F_i \colon i \in I\} \cup A$ должно найтись $d + 1$ множество с пустым пересечением, иначе у всех множеств набора будет общая точка. Среди них обязательно должно быть A, так как F_I непусто. Но тогда оставшиеся d множеств и есть искомые, а их индексы составляют нужное подмножество J.

Для каждого из αC_n^{d+1} наборов индексов I, для которых $F_I \neq \varnothing$, мы выбираем такой набор $J = J(I)$ размера d, что F_J и F_I имеют общую точку лексикографического минимума. Тогда некоторый d-набор J_0 будет сопоставлен не менее чем

$$\frac{\alpha C_n^{d+1}}{C_n^d} = \alpha \frac{n-d}{d+1}$$

различным $(d+1)$-наборам I. Каждый такой $(d+1)$-набор имеет вид $J_0 \cup \{i\}$ для некоторого индекса i. Но тогда пересечение любого такого $(d+1)$-набора будет иметь одну и ту же точку лексикографического минимума, а значит, все они будут иметь общую точку. Получается, мы нашли не менее

$$d + \alpha\frac{n-d}{d+1} > \alpha\frac{n}{d+1}$$

множеств, имеющих общую точку. □

§ 3. О том, как выбрать точку внутри многих симплексов

Другим важным фактом окажется первая лемма о выборе.

Выпуклая оболочка множества из $d+1$ точек, не лежащих в общей $(d-1)$-мерной гиперплоскости, называется *d-симплексом.* Симплекс — многомерное обобщение понятий треугольника и тетраэдра, он является примером простейшего многогранника. Если же мы берём выпуклую оболочку $d+1$ точки, которые лежат в общей d-мерной гиперплоскости, то это будет называться *вырожденным $(d-1)$-симплексом.*

Пусть дано множество из n точек в $\mathbb{R}^d$. Тогда любой набор из $d+1$ точки определяет некоторый симплекс, а всего таких симплексов будет C_n^{d+1}. Ясно, что многие из этих симплексов будут пересекаться, причём достаточно часто в одной точке может пересекаться несколько симплексов. Естественный вопрос: а как много симплексов обязательно должны пересекаться одновременно? В этом и состоит первая лемма о выборе.

Теорема 3.1 (первая лемма о выборе, Барань, 1982, [6]). *Для любого множества S из n точек (n достаточно большое) найдётся точка $\mathbb{R}^d$, лежащая не менее чем в cC_n^{d+1} всех симплексов, определяемых точками S, где $c = c(d)$ — некоторая константа, не зависящая от n.*

Наибольший интерес представляет случай, когда S — множество точек общего положения в $\mathbb{R}^d$. Это значит, что никакие $k+1$ из них не лежат в общей $(k-1)$-мерной гиперплоскости при любом $k<d$. Если это условие не выполнено, то многие симплексы будут вырождены.

Для плоскости существует следующая точная оценка.

Теорема 3.2 (Борош, Фюреди, 1984, [7]). *Для любого множества S из n точек общего положения на плоскости (n достаточно большое) найдётся точка, лежащая не менее чем в $\frac{2}{9}C_n^3$ треугольников, определяемых точками S.*

Для больших размерностей сам Барань получил оценку $c \geqslant \frac{1}{(d+1)^d}$. Интерес к этой задаче поднялся с новой силой после новаторской работы Громова [9], в которой он принципиально новыми методами получил оценку $c \geqslant \frac{2d}{(d+1)(d+1)!}$ (см. также подробности в [15]).

Ниже мы сперва комбинаторно докажем лемму о выборе в общем случае (с плохой оценкой на c), а затем приведём адаптацию чудесного короткого доказательства Бориса Буха [8] теоремы Бороша — Фюреди (в незначительно ослабленной форме).

Предварительно нам понадобится следующий классический результат.

Теорема 3.3 (теорема Каратеодори). *Пусть X — конечное множество точек*в $\mathbb{R}^d$, $\bar{x} \in \operatorname{conv}(X)$. *Тогда существует такое множество $X_0 \subseteq X$, $|X_0| \leqslant d+1$, что $\bar{x} \in \operatorname{conv}(X_0)$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\operatorname{conv}(X)$ — выпуклый многогранник. Без ограничения общности, пусть его размерность равна d. Проведём индукцию по d. База очевидна. Для перехода индукции выберем произвольную точку $\bar{x}_0 \in X$. Луч $\overrightarrow{x_0 x}$ начинается в многограннике $\operatorname{conv}(X)$ и пересекает его границу в некоторой точке $\bar{x}'$. Она лежит в некоторой грани нашего многогранника, т. е. в многограннике $\operatorname{conv}(X')$ размерности $d_0 < d$ (где $X' \subset X$). Тогда по предположению индукции $x' \in \operatorname{conv}(X_0')$, где $X_0' \subseteq X' \subset X$, $|X_0'| \leqslant d_0 + 1 \leqslant d$. Положим $X_0 = X_0' \cup \{\bar{x}_0\}$. Читателю предоставляется проверить, что тогда $x \in \operatorname{conv}(X_0)$. □

Теорема Каратеодори верна и без предположения о конечности множества X; убедиться в этом мы снова предоставляем читателю.

Теперь приступим к доказательству первой леммы о выборе.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех симплексов с вершинами в S (возможно, вырожденных). Мы хотим доказать, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям дробной теоремы Хелли для некоторого α — отсюда автоматически будет следовать первая лемма о выборе.

Всего мы имеем $C^{d+1}_{C_n^{d+1}}$ наборов симплексов размера $d+1$. Это количество — многочлен по n степени $(d+1)^2$.

Будем пока рассуждать чисто комбинаторно, не привлекая никакой геометрии. Пусть $t = d(d+1)^2+1$. Выберем некоторое подмножество $A \subset S$ размера t. Пусть $s = d^2(d+1)+1$. Тогда любые $d+1$ подмножеств в A размера s имеют общую точку. В самом деле, в $d+1$ множеств размера s входят с учётом кратностей $s(d+1) = d^2(d+1)^2 + d + 1$ точек. Но если общей точки нет, то каждая точка входит не более чем в d множеств, а всего точек с учётом кратностей не больше, чем $td = d^2(d+1)^2 + d$, — противоречие.

Итак, любые $d+1$ подмножеств размера s содержат общую точку, поэтому их выпуклые оболочки пересекаются хотя бы в одной точке. Тогда по теореме Хелли выпуклые оболочки всех подмножеств в A размера s имеют общую точку $\bar{x}$. В частности, $\bar{x} \in \operatorname{conv}(A)$. По теореме Каратеодори можно выбрать такое подмножество A_1 размера $d+1$, что $\bar{x} \in \mathrm{conv}(A_1)$. (Теорема Каратеодори позволяет выбрать такое множество размера не больше $d+1$, но если оно меньше, то можно добавить туда произвольные точки из A.) Однако множество $A \backslash A_1$ всё ещё содержит не менее s точек. Значит, $\bar{x} \in \mathrm{conv}(A \backslash A_1)$. Снова выберем такое $A_2 \subseteq A \backslash A_1$ размера $d+1$, что $\bar{x} \in \mathrm{conv}(A_2)$. Мы можем продолжать так делать, пока у нас остаётся не менее s точек, а значит, можно повторить эту операцию $d+1$ раз. Получается, что мы можем выбрать из A такой набор из $d+1$ множеств размера $d+1$, не имеющих общих вершин, что выпуклые оболочки этих множеств пересекаются в общей точке $\bar{x}$.

Итак, из любого множества размера t мы можем выбрать пересекающийся $(d+1)$-набор из симплексов, причём все вершины этих симплексов различны. Каждый такой набор, в свою очередь, будет сопоставлен не более чем $C_n^{t-(d+1)^2}$ множествам размера t. В конечном счёте получаем не менее $C_n^t / C_n^{t-(d+1)^2}$ пересекающихся $(d+1)$-наборов. Это выражение — многочлен по n степени $(d+1)^2$. Теперь ясно, что для некоторого $\alpha > 0$ и любого достаточно большого n это выражение больше, чем $\alpha C_{C_n^{d+1}}^{d+1}$, что и требовалось доказать. $\square$

Теперь докажем отдельно версию для плоскости.

Доказательство. Мы докажем чуть более слабое утверждение: в качестве c можно взять любое число, меньшее $2/9$.

Пусть дано множество S из n точек общего положения. Покажем сначала, что найдутся такие три прямые, пересекающиеся в одной точке (необязательно из S), что в каждой из 6 частей, на которые они делят плоскость (без учёта самих прямых), лежит не менее $\lfloor n/6 \rfloor - 3 \geqslant n/6 - 4$ точек (а при достаточно аккуратном рассуждении можно получить $\lfloor n/6 \rfloor - 1$).

Направлением назовём некоторый вектор, задаваемый точкой на единичной окружности. Для некоторого направления $\bar{v}$, которое будем считать горизонтальным, рассмотрим множество всех прямых, параллельных $\bar{v}$ и таких, что по каждую сторону от всякой такой прямой лежит не меньше $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ точек. Читателю предлагается доказать самостоятельно, что такие прямые обязательно существуют. Множество всех таких прямых образует некоторую полосу (возможно нулевой толщины, когда искомая прямая только одна). Пусть l — средняя прямая из этой полосы. Обозначим через S_+ и S_- части множества S, лежащие сверху и снизу от прямой l. Покажем, что на ней найдётся такая точка P, что через неё можно провести прямую, делящую S_+ и S_- в отношении $1:2$ одновременно.

Выберем направление $\bar{u} \neq \pm\bar{v}$. Для такого направления аналогично предыдущему существует некоторая полоса прямых, параллельных $\bar{u}$ и таких, что они делят множество S_+, причём сверху лежит не менее

$$\left\lfloor \frac{|S_+|}{3} \right\rfloor - 1 \geqslant \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 2$$

точек из S_+, а снизу точек не менее

$$\left\lfloor \frac{2|S_+|}{3} \right\rfloor - 1 \geqslant \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2.$$

Пусть эта полоса пересекает прямую l по отрезку $I_{\bar{u}+}$. Построим аналогичную полосу для множества S_-, но только чтобы, наоборот, сверху каждой прямой из полосы было около $2/3$ всех точек из S_-, а снизу около $1/3$. Обозначим через $I_{\bar{u}-}$ отрезок пересечения этой полосы с l. Пусть $\bar{u}$ пробегает все направления от $-\bar{v}$ до $\bar{v}$ по часовой стрелке. Проследим за изменениями положения отрезков $I_{\bar{u}-}$ и $I_{\bar{u}+}$. Ясно, что каждый из них пробежит (возможно, изменяя размеры) по всей прямой l, но в противоположных направлениях. А значит, где-то эти отрезки пересекутся, т. е. искомая точка P найдётся. Несложно заметить, что все такие точки образуют некоторый отрезок (возможно, нулевой длины). Выберем в качестве P середину этого отрезка и проведём через неё ту самую прямую, которая делит S_+ и S_- в отношении примерно $1:2$.

Обозначим через S_1 ту часть S_+, где теперь находится примерно две трети его точек, а через S_2 — такую же часть множества S_-. Из P можно провести некоторое множество лучей, делящих S_1 почти пополам (как и раньше — с точностью до одной точки), и некоторое множество лучей, делящих почти пополам множество S_2. Понятно, что в обоих случаях все такие лучи образуют некоторый угол. Если среди них найдутся два луча, составляющих вместе прямую, то мы нашли то, что искали. Иначе мы проведём в каждом угле биссектрису и обозначим через r_1 и r_2 прямые, которые содержат эти биссектрисы. Обозначим через γ *ориентированный угол* между этими прямыми: мы берём меньший из углов, но если он получается переходом по часовой стрелке от r_1 к r_2, то берём его со знаком плюс, а если против часовой, то со знаком минус.

Заметим теперь, что прямая l, точка P и угол γ зависят от направления $\bar{v}$ непрерывно. Повернём теперь $\bar{v}$ по часовой стрелке к $-\bar{v}$. Прямая l и точка P при этом перейдут сами в себя, а вот прямые r_1 и r_2 поменяются местами, а значит, наш ориентированный угол γ поменяет знак. По теореме о промежуточном значении непрерывной функции найдётся направление, для которого угол между прямыми r_1 и r_2 равен 0, т. е. соответствующие лучи, поскольку они всегда направлены в разные стороны, образуют прямую. Таким образом мы найдём искомые три прямые, P — это точка их пересечения.

Покажем, что точка P искомая. В самом деле, выберем в каждой из шести частей по точке из S в порядке обхода: A, B, C, D, E и F. Эти шесть точек образуют всего 20 треугольников. Заметим, что точка P лежит не менее чем в восьми из этих треугольников. Действительно, она лежит в треугольниках ACE и BDF. Рассмотрим теперь все четырёхугольники типа $ABCE$ — три точки подряд и четвёртая через одну. Проведём диагональ BE. Очевидно, что P лежит или в треугольнике ABE, или в треугольнике BCE. Добавится ещё шесть треугольников. Тем не менее каждый такой треугольник может участвовать во многих шестиугольниках (но не более чем в $(n/6+20)^3$, так как каждая из шести частей плоскости содержит не более $n/6+20$ точек из S). Поэтому P лежит не менее чем в $\dfrac{8(n/6-4)^6}{(n/6+20)^3}$ треугольниках.

Это выражение порядка $n^3/27$. Такой же старший член у многочлена $\frac{2}{9}C_n^3$. Тогда для любого $c<2/9$ и достаточно большого n это выражение больше, чем cC_n^3. Следовательно, точка P будет гарантированно лежать в cC_n^3 треугольниках, что и требовалось доказать. $\square$

§ 4. Дробные упаковки и трансверсали

В этом разделе мы познакомим читателя с понятиями, важнейшими не только для комбинаторной геометрии, но и для комбинаторики в целом.

(p,q)-Теорема относится к частному случаю следующего общего вопроса: дано некоторое семейство множеств, мы хотим выбрать такой набор элементов этих множеств, чтобы каждое из них содержало хотя бы один элемент выбранного набора. Этот набор называется *трансверсалью* семейства. Комбинаторика очень часто изучает вопросы, связанные с построением трансверсалей для определённых множеств.

Дадим все необходимые определения в максимально общей ситуации. Пусть X — произвольное множество, а $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств (в комбинаторике такой объект называется ещё гиперграфом). *Трансверсалью* назовём такое подмножество $T\subset X$, что $F\cap T\neq\varnothing$ для всех F из семейства $\mathcal{F}$. *Трансверсальным числом* семейства $\tau(\mathcal{F})$ назовём минимальный размер трансверсали $\mathcal{F}$ (который может быть равен бесконечности). Например, можно взять в качестве X множество всех точек в $\mathbb{R}^d$, а в качестве $\mathcal{F}$ — некоторое конечное семейство выпуклых множеств. Тогда (p,q)-теорема утверждает, что при (p,q)-условии, наложенном на $\mathcal{F}$, трансверсальное число этого семейства не зависит от n, т. е. от размера $\mathcal{F}$.

Нам понадобится другая важная характеристика семейства $\mathcal{F}$, тесно связанная с предыдущей. *Упаковкой* назовём такой набор $\mathcal{P}\subset\mathcal{F}$, что никакие два подмножества из $\mathcal{P}$ не пересекаются. В свою очередь, *упаковоч-*

ным числом $\nu(\mathcal{F})$ назовём размер максимальной упаковки в $\mathcal{F}$. На всякий случай отметим: трансверсаль — это подмножество самого X, а упаковка — подмножество (подсемейство) в $\mathcal{F}$.

Например, если X — множество вершин некоторого графа, а $\mathcal{F}$ — множество его рёбер, то упаковка называется *паросочетанием*. Задача построения оптимального паросочетания имеет огромное практическое значение, так как применяется в различных областях: от анализа компьютерных сетей до моделирования транспортных потоков. (*Вопрос:* а что будет называться трансверсалью графа?)

Некоторые из читателей могут быть знакомы с известной теоремой Кёнига. На нашем языке она говорит, что если $\mathcal{F}$ — множество рёбер некоторого двудольного графа[1], то $\nu(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F})$. Читателю предлагается показать, что любая трансверсаль по размеру должна быть не меньше, чем размер любой упаковки: $\nu(\mathcal{F}) \leqslant \tau(\mathcal{F})$.

В общем случае о связи этих величин больше ничего нельзя сказать наверняка. Например, $\tau(\mathcal{F})$ даже при $\nu(\mathcal{F}) = 1$ может быть сколь угодно большим. Хорошим упражнением для читателя является построение такого примера.

Задача поиска или хотя бы оценки τ или ν для заданного $\mathcal{F}$ имеет важное прикладное значение. Но вычисление точных значений этих величин есть алгоритмически сложная (NP-полная) задача. Чтобы получить их оценку, придётся ввести следующие понятия. Пусть X — конечное множество. Припишем всем элементам веса́ от 0 до 1, т. е. определим некоторую функцию из множества X в отрезок $[0; 1]$. Существует естественный способ сопоставить каждому подмножеству $Y \subset X$ такую функцию: припишем элементу *вес* 1, если он входит в Y, и 0, если он не входит. Такая функция называется *характеристической функцией* подмножества Y. *Вес* произвольного множества равен сумме весов его элементов. Трансверсаль T для $\mathcal{F}$ с каждым $F \in \mathcal{F}$ пересекается хотя бы по одному элементу. А значит, взяв в качестве весовой функции характеристическую функцию множества T, получим, что суммарный вес каждого F равен хотя бы 1. Если теперь для произвольной весовой функции вес F не меньше 1, то скажем, что она «покрывает» F. Назовём функцию *дробной трансверсалью* семейства $\mathcal{F}$, если она покрывает каждое $F \in \mathcal{F}$. Общим весом $S(\phi)$ весовой функции назовём суммарный вес всех точек в X:

$$S(\phi) = \sum_{x \in X} \phi(x).$$

[1] Граф называется двудольным, если его вершины можно разбить на два множества так, что вершины любого ребра принадлежат разным множествам.

Дробным трансверсальным числом $\tau^*(\mathcal{F})$ назовём минимальный общий вес дробной трансверсали для $\mathcal{F}$ (а точнее — точную нижнюю грань всех таких весов). Поскольку, как было описано выше, любая трансверсаль переходом к характеристической функции порождает дробную трансверсаль, то верно неравенство $\tau^*(\mathcal{F}) \leqslant \tau(\mathcal{F})$.

Рассмотрим пример. Возьмём граф «треугольник»: в качестве X возьмём его вершины, а в качестве $\mathcal{F}$ его рёбра. Тогда ясно, что $\tau(\mathcal{F}) = 2$. Но несложно заметить, что можно выбрать дробную трансверсаль с суммарным весом $3/2$, если приписать каждой вершине вес $1/2$. Читателю предлагается доказать, что лучше выбрать весовую функцию уже не получится, т. е. $\tau^*(\mathcal{F}) = 3/2$.

Вычисление τ^* может дать хорошую оценку на τ. Помимо нижней оценки $\tau^*(\mathcal{F}) \leqslant \tau(\mathcal{F})$ также известна полученная Ловасом [13] верхняя оценка

$$\tau(\mathcal{F}) \leqslant \tau^*(\mathcal{F})(1 + \ln \delta(\mathcal{F})),$$

где $\delta(\mathcal{F})$ есть максимальное количество множеств в $\mathcal{F}$, имеющих общую точку. Заметим, что вычисление τ^* в конкретной ситуации есть алгоритмически быстрая задача (решаемая за полиномиальное время).

Аналогично можно определить дробные упаковки. Вместо того, чтобы приписывать веса элементам из X, будем приписывать их множествам из $\mathcal{F}$, т. е. определим весовую функцию из $\mathcal{F}$ в $[0; 1]$. Подобно случаю трансверсалей, для произвольного подсемейства $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ определена характеристическая весовая функция, приписывающая множеству 1, если оно входит в $\mathcal{P}$, и 0 в противном случае. Теперь нужно выделить свойство, которое описывает характеристические функции упаковок. Семейство множеств $\mathcal{P}$ является упаковкой, если входящие в него множества не пересекаются, а значит, каждый элемент X покрывается не более чем одним множеством из семейства. Получаем, что суммарный вес множеств над каждым элементом X не превосходит 1. Мы можем определить *дробную упаковку*: это такая весовая функция ψ, что для каждого $x \in X$

$$\sum_{F \in \mathcal{F}\colon x \in F} \psi(F) \leqslant 1.$$

Общий вес дробной упаковки — это $S(\psi) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \psi(F)$, а *дробное упаковочное число* $\nu^*(\mathcal{F})$ — это максимальный общий вес дробной упаковки в $\mathcal{F}$. Аналогично из определения получаем неравенство $\nu(\mathcal{F}) \leqslant \nu^*(\mathcal{F})$.

Прежде чем читатель продвинется дальше, автор советует ему убедиться, что для недавно разобранного примера $\nu^*(\mathcal{F})$ также равно $3/2$.

Оказывается, за этим совпадением стоит куда более общий принцип. Имеет место

Теорема 4.1 [14]. *Если X — конечное множество, то для любого семейства $\mathcal{F}$ выполнено равенство $\nu^*(\mathcal{F}) = \tau^*(\mathcal{F})$. Более того, в обоих случаях это значение достигается на некоторых функциях, которые принимают только рациональные значения.*

Доказательство данной теоремы не слишком сложно, но всё же выходит за рамки материала данной заметки. Упомяну, что она вытекает из так называемой *двойственности линейного программирования*. Оказывается, задачи нахождения $\nu^*(\mathcal{F})$ и $\tau^*(\mathcal{F})$ можно сформулировать как задачи нахождения минимума и максимума некоторых линейных векторных функций при определённых условиях. Существует «двойственный переход», который в данной ситуации переводит задачу нахождения $\nu^*(\mathcal{F})$ в задачу нахождения $\tau^*(\mathcal{F})$, и известна теорема, утверждающая, что решения исходной задачи и двойственной к ней совпадают.

Мы дали все определения лишь для конечных множеств, но в геометрических задачах в качестве X обычно берётся некоторое бесконечное множество. Например, чтобы сформулировать (p, q)-теорему в этих терминах, мы определяли выше X как множество всех точек $\mathbb{R}^d$. Конечно, дробные трансверсали и упаковки можно определить и для бесконечных множеств, однако это требует достаточной аккуратности. Тем не менее, нам это не понадобится. Оказывается, уже данных выше определений достаточно для получения интересных геометрических приложений.

§ 5. Как (p, q)-теорема связана с дробными упаковками

Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — некоторое семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$. Как и в начале доказательства дробной теоремы Хелли, для каждого подмножества индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$, если пересечение множеств с такими номерами непусто, выберем в этом пересечении некоторую точку $\bar{x}_I$. Возьмём в качестве X совокупность всех этих точек (это множество конечно) и сопоставим каждому множеству $F \in \mathcal{F}$ множество $F' = F \cap X$. Обозначим через $\mathcal{F}'$ семейство, состоящее из всех таких F'. Легко заметить, что набор множеств $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ пересекается тогда и только тогда, когда пересекаются $F'_{i_1}, \ldots, F'_{i_k}$. В частности, трансверсаль для $\mathcal{F}'$ — это трансверсаль для $\mathcal{F}$. По сути, пара $(X, \mathcal{F}')$ — это конечный гиперграф, который содержит всю информацию о пересечениях множеств из $\mathcal{F}$. В дальнейшем мы будем опускать штрих, но, говоря о пересечении нескольких множеств из $\mathcal{F}$, всегда будем помнить, что можно выбрать точку пересечения, лежащую в X. Также будем говорить о дробных трансверсалях и дробных упаковках системы $\mathcal{F}$, имея в виду, что мы определяем их по отношению ко множеству X.

В этом разделе мы докажем, что если $\mathcal{F}$ удовлетворяет $(p, d+1)$-условию, то $\nu^*(\mathcal{F}) \leqslant c$, где c — некоторая константа, не зависящая от n.

Сперва заметим, что семейство $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию дробной теоремы Хелли. В самом деле, каждый набор из p множеств включает как минимум один пересекающийся $(d+1)$-набор. С другой стороны, каждый такой набор входит в C_{n-d-1}^{p-d-1} p-наборов. Тогда ясно, что найдутся не менее

$$\frac{C_n^p}{C_{n-d-1}^{p-d-1}} = \frac{C_n^{d+1}}{C_p^{d+1}}$$

пересекающихся $(d+1)$-наборов. Так что условие дробной теоремы Хелли выполнено с $\alpha = (C_p^{d+1})^{-1}$.

Поэтому существует такое β, не зависящее от n, что не менее чем βn множеств из $\mathcal{F}$ имеют общую точку (ясно, что эту точку можно выбрать в X).

Очевидно, что число β связано с общим весом дробных упаковок. Например, если дробная упаковка принимает на каждом множестве одинаковое значение, то это значение не может быть больше, чем $1/(\beta n)$ (иначе у точки пересечения βn множеств будет вес больше 1), а значит, общий вес такой упаковки не может быть больше, чем $1/\beta$.

Пусть ψ — оптимальная дробная трансверсаль, общий вес которой равен $\nu^*(\mathcal{F})$. В прошлом разделе упоминалось, что её можно выбрать так, чтобы она принимала только рациональные значения. Приведём все эти значения к некоторому общему знаменателю D. Пусть $F \in \mathcal{F}$, тогда $\psi(F)$ имеет вид $m(F)/D$. Рассмотрим новое семейство $\widetilde{\mathcal{F}}$: возьмём туда $m(F)$ копий каждого элемента $F \in \mathcal{F}$. Каждую копию теперь мы будем рассматривать как отдельное множество.

Заметим, что для этого семейства выполнено $(d(p-1)+1, d+1)$-условие. В самом деле, возьмём $d(p-1)+1$ множество из $\widetilde{\mathcal{F}}$. Тогда этот набор или содержит копии p различных множеств из $\mathcal{F}$, или он содержит не меньше $d+1$ копий одного и того же множества. В любом случае найдётся $d+1$ пересекающееся множество.

А раз для $\widetilde{\mathcal{F}}$ выполнено $(d(p-1)+1, d+1)$-условие, то для него верна дробная теорема Хелли: пусть N — это размер $\widetilde{\mathcal{F}}$, т. е. $N = \sum_{F \in \mathcal{F}} m(F)$; тогда существует такое β', не зависящее от n, что не меньше $\beta' N$ множеств из $\widetilde{\mathcal{F}}$ имеют общую точку (мы также можем выбрать эту точку из X). Обозначим эту точку $\bar{a}$. Заметим, что $\nu^*(\mathcal{F}) = N/D$. Имеем неравенства

$$1 \geqslant \sum_{F \in \mathcal{F}\colon\, \bar{a} \in F} \psi(F) = \sum_{F \in \mathcal{F}\colon\, \bar{a} \in F} \frac{m(F)}{D} \geqslant \frac{\beta' N}{D} = \beta' \nu^*(\mathcal{F}).$$

Отсюда получаем, что $\nu^*(\mathcal{F}) \leqslant 1/\beta'$.

Мы научились оценивать сверху $\nu^*(\mathcal{F})$ при $(p, d+1)$-условии, но как быть с $\tau(\mathcal{F})$? Для этого нам понадобятся некоторые новые понятия.

§ 6. Слабые ε-сети и завершение доказательства

Пусть, как и прежде, X — некоторое конечное множество, $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств, а ε — некоторое положительное число. Множество $T \subset X$ называется ε-сетью, если $F \cap T \neq \varnothing$ для любого такого $F \in \mathcal{F}$, что $|F| \geqslant \varepsilon|X|$. Таким образом, ε-сеть есть трансверсаль для подсемейства всех множеств из $\mathcal{F}$, имеющих размер не менее чем $\varepsilon|X|$. Оказывается, размер ε-сети не зависит от $|X|$, но зависит от некоторой комбинаторной характеристики семейства $\mathcal{F}$, называемой *размерностью Вапника — Червоненкиса*, однако объяснение этого понятия лежит за пределами данной статьи (см. подробности в [3]). Во многих задачах достаточно вместо трансверсали построить ε-сеть для некоторого ε, а для этого существуют достаточно эффективные алгоритмы.

Нам, однако, понадобится схожее, но более геометрическое понятие. Пусть X — конечное множество точек в $\mathbb{R}^d$. Скажем, что множество точек T (которое теперь уже не обязательно лежит в X) является *слабой ε-сетью* для X, если всякое выпуклое множество C, содержащее не менее $\varepsilon|X|$ точек из X, содержит точку из T.

Теорема 6.1. *Для всякого ε и всякого конечного X на плоскости существует слабая ε-сеть, размер которой равен $\lceil c\varepsilon^{-(d+1)}\rceil$ для некоторой константы c, т. е. зависит только от ε, но не от размера множества X.*

Доказательство. Доказательство есть попросту многократное применение первой леммы о выборе (или теоремы Бороша — Фюреди для случая плоскости). Пусть множество X имеет размер n. Будем пошагово строить нужную слабую ε-сеть. Положим $T_0 = \varnothing$. Пусть на i-м шаге мы выбрали множество T_i, но оно всё ещё не слабая ε-сеть. Тогда найдётся выпуклое множество C_i, которое содержит как минимум εn точек из X, но ни одной точки из T_i. Пусть $X_i = C_i \cap X$, $n_i = |X_i|$. Применим к этому множеству первую лемму о выборе и найдём точку $\bar{a}_i$, лежащую как минимум в

$$c_0 C_{n_i}^{d+1} \geqslant c' n_i^{d+1} \geqslant c' \varepsilon^{d+1} n^{d+1}$$

симплексах, определяемых X_i, где c_0 и c' — некоторые константы (в самом деле, слева в этом неравенстве стоит многочлен степени $d+1$ по n_i, а значит, подбором константы можно добиться, чтобы при достаточно больших n он был больше, чем n^{d+1}). Положим $T_{i+1} = T_i \cup \bar{a}_i$. Всего множество X определяет $C_n^{d+1} \leqslant c'' n^{d+1}$ симплексов, а за один шаг мы покрываем $c'\varepsilon^{d+1} n^{d+1}$ из них. Значит, мы заведомо остановимся за $\lceil c\varepsilon^{-(d+1)}\rceil$ шагов, где $c = c''/c'$. $\square$

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ выпуклых тел на плоскости и соответствующее множество X, как в § 5. Покажем, что $\tau(\mathcal{F}) \leqslant c\tau^*(\mathcal{F})^{d+1}$, где c — константа из теоремы 6.1. В силу этой теоремы достаточно доказать, что любая слабая $1/\tau^*(\mathcal{F})$-сеть конечного множества точек, которое мы сейчас построим, является трансверсалью для $\mathcal{F}$ — теорема о слабых ε-сетях говорит, что можно выбрать такую сеть размера $c\tau^*(\mathcal{F})^{d+1}$.

Пусть ϕ — дробная трансверсаль с общим весом $\tau^*(\mathcal{F})$, принимающая рациональные значения. Аналогично рассуждениям в предыдущем разделе приведём все эти значения к общему знаменателю D и положим

$$\phi(\bar{x}) = \frac{m(\bar{x})}{D}.$$

Построим новое множество $\widetilde{X}$ (а точнее, «мультимножество»), взяв в него $m(\bar{x})$ копий каждой точки $\bar{x} \in X$. Любую такую копию мы будем считать отдельной точкой. Заметим, что и доказательство теоремы 6.1, и доказательство первой леммы о выборе, на которую оно опирается, работает без изменений для мультимножеств, т. е. для случая, когда мы допускаем повторения точек. Покажем, что всякое множество из $\mathcal{F}$ содержит не менее $|\widetilde{X}|/\tau^*(\mathcal{F})$ точек из $\widetilde{X}$, тогда любая слабая $1/\tau^*(\mathcal{F})$-сеть этого множества будет трансверсалью семейства $\mathcal{F}$. Для $F \in \mathcal{F}$ положим $\widetilde{F} = F \cap \widetilde{X}$. Тогда $|\widetilde{F}| = \sum_{\bar{x} \in F} m(\bar{x})$. Поскольку ϕ — дробная трансверсаль, имеем

$$1 \leqslant \sum_{\bar{x} \in X} \phi(\bar{x}) = \sum_{\bar{x} \in X} \frac{m(\bar{x})}{D} = \frac{|\widetilde{F}|}{D}.$$

Но

$$|\widetilde{X}| = \sum_{\bar{x} \in X} m(\bar{x}) = D\tau^*(\mathcal{F}).$$

Выражая отсюда D и подставляя в предыдущее неравенство, окончательно получаем $|\widetilde{F}| \geqslant |\widetilde{X}|/\tau^*(\mathcal{F})$, что и требовалось доказать.

Мы можем завершить доказательство (p, q)-теоремы. Для семейства выпуклых множеств $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^d$ его трансверсальное число не превосходит $c\tau^*(\mathcal{F})^{d+1}$, а значит, и $c\nu^*(\mathcal{F})^{d+1}$. Но если на $\mathcal{F}$ наложено (p, q)-условие, то на него наложено $(p, d+1)$-условие, что влечёт ограниченность $\nu^*(\mathcal{F})$ некоторой константой, не зависящей от n. Тем самым (p, q)-теорема полностью доказана.

Благодарности

Я благодарен всем участникам курса, посвящённого (p, q)-теореме, на летней школе «Комбинаторика и алгоритмы 2016», и Андрею Купавскому, рассказавшему мне об этой теме.

Список литературы

[1] *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли и её применения. М.: Мир, 1968.

[2] *Протасов В. Ю.* Теорема Хелли и вокруг неё // Квант. 2009. № 3. С. 8–14.

[3] *Райгородский А. М.* Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2009.

[4] *Циглер Г.* Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014.

[5] *Alon N., Kleitman D.* Piercing convex sets and the Hadwiger — Debrunner (p, q)-problem // Adv. Math. 1992. Vol. 96, № 1. P. 103–112.

[6] *Bárány I.* A generalization of Carathéodory's theorem // Discrete Math. 1982. Vol. 40. P. 141–152.

[7] *Boros E., Füredi Z.* The number of triangles covering the center of an n-set // Geom. Dedicata. 1984. Vol. 17. P. 69–77.

[8] *Bukh B.* A point in many triangles // Electron. J. Combin. 2006. Vol. 13, Note 10.

[9] *Gromov M.* Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry // Geom. Funct. Anal. 2010. Vol. 20, № 2. P. 416–526.

[10] *Hadwiger H., Debrunner H.* Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene // Enseignement Math. (2). 1955. Bd. 1, S. 56–89.

[11] *Kalai G.* Intersection patterns of convex sets // Israel J. Math. 1984. Vol. 48, № 2–3. P. 161–174.

[12] *Katchalski M., Liu A.* A problem of geometry in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 75, № 2. P. 284–288.

[13] *Lovász L.* On the ratio of optimal integral and fractional covers // Discrete Math. 1975. Vol. 13, № 4. P. 383–390.

[14] *Matoušek J.* Lectures on discrete geometry. New York: Springer-Verlag, 2002. (Graduate Texts in Math.; Vol. 212).

[15] *Matoušek J., Wagner U.* On Gromov's method of selecting heavily covered points // Discrete Comput. Geom. 2014. Vol. 52, № 1. P. 1–33.

Роман Игоревич Просанов, Фрибурский университет (Швейцария), Московский физико-технический институт

rprosanov@mail.ru