Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности

Е. С. Колпаков

Известна классическая теорема Радона [1]:

Дано целое $d \geqslant 1$ и $d+2$ точек в d-мерном пространстве $\mathbb{R}^d$. Тогда эти точки можно разбить на два непересекающихся подмножества, чьи выпуклые оболочки имеют непустое пересечение.

Первоначальное алгебраическое доказательство этой теоремы см. в [3]. Оно обычно и приводится. В настоящей статье содержится другое её доказательство — через понижение размерности. Ещё одно доказательство через понижение размерности, несколько более сложное, приводится в статье [2]. В нём используется

Лемма об отделении. *Даны $d+2$ точек в d-мерном пространстве. Тогда существует гиперплоскость, натянутая на d точек из данных, которая разделяет две оставшиеся точки.*

В настоящей статье лемма об отделении не используется. Оба доказательства через понижение размерности дают более сильный результат — количественную теорему Радона.

Разбиение множества точек на два подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются *ровно по одной точке*, называется *радоновским.*

Количественная теорема Радона. *Для любого целого $d \geqslant 1$ и $d+2$ точек общего положения в d-мерном пространстве $\mathbb{R}^d$ радоновское разбиение множества этих точек существует и единственно.*

Теорема Радона связана со следующими теоремами, которые могут быть доказаны через понижение размерности (см. [4, 5]).

Работа выполнена при частичной поддержке Добрушинской студенческой стипендии.

Теорема Конвея — Гордона — Закса. *Для любых шести точек в пространстве, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости, найдутся два зацеплённых треугольника с вершинами в этих точках.*

Теорема ван Кампена — Флореса. *Среди любых семи точек в четырёхмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ можно выбрать две непересекающиеся тройки точек так, что треугольники с вершинами в них пересекаются.*

Доказательство количественной теоремы Радона.

Проведём индукцию по d. *База:* $d=1$. Даны три точки на прямой. Тогда есть ровно одно радоновское разбиение: одно из множеств состоит из двух крайних точек, другое из средней точки.

Переход от $d-1$ *к* d. Обозначим через $A_1, \ldots, A_{d+2}$ данные точки в пространстве $\mathbb{R}^d$. Меняя, если нужно, нумерацию точек, можно выбрать гиперплоскость α так, чтобы точка A_{d+2} лежала в одном полупространстве относительно α, а точки $A_1, \ldots, A_{d+1}$ — в другом полупространстве. Тогда точка A_{d+2} не лежит в симплексе $A_1 \ldots A_{d+1}$. Для $1 \leqslant i \leqslant d+1$ обозначим через A'_i пересечение α с $A_{d+2}A_i$.

Выпуклая оболочка множества X будет обозначаться $\langle X \rangle$.

1) *Доказательство существования радоновского разбиения.* По предположению индукции имеется радоновское разбиение множества точек

$$A'_1, \ldots, A'_{d+1} = I' \sqcup J'$$

в $(d-1)$-мерном пространстве α. Поскольку точки $A_1, \ldots, A_{d+1}$ находятся в общем положении, пересечение I' с J' состоит из единственной точки, которую обозначим Y' (рис. 1).

Пусть $A_1, \ldots, A_{d+1} = I \sqcup J$ — соответствующее разбиение множества точек $A_1, \ldots, A_{d+1}$. А именно, пусть I — множество таких точек A_i, что A'_i лежит в I'. Аналогично определим множество J. Тогда отрезок $A_{d+2}Y'$ лежит в симплексах $\langle \{A_{d+2}\} \cup J \rangle$ и $\langle \{A_{d+2}\} \cup I \rangle$. Следовательно, луч $A_{d+2}Y'$ пересекает каждый из симплексов $\langle I \rangle$ и $\langle J \rangle$. Обозначим $Y_1 := A_{d+2}Y \cap \langle I \rangle$ и $Y_2 := A_{d+2}Y \cap \langle J \rangle$.

Не ограничивая общность рассуждения, считаем, что Y_1 лежит на отрезке $A_{d+2}Y_2$. Тогда симплекс $\langle I \rangle$ пересекает симплекс $\langle \{A_{d+2}\} \cup J \rangle$ по точке Y_1. Поскольку точки $A_1, \ldots, A_{d+2}$ находятся в общем положении, получаем, что Y_1 — единственная точка пересечения $\langle I \rangle$ и $\langle \{A_{d+2}\} \cup J \rangle$.

Значит, $I \sqcup (\{A_{d+2}\} \cup J)$ или $(\{A_{d+2}\} \cup I) \sqcup J$ является радоновским разбиением множества точек $A_1, \ldots, A_{d+2}$.

2) *Доказательство единственности радоновского разбиения.* Предположим, что радоновских разбиений хотя бы два. Пусть I и J — одно из них, $\widetilde{I}$ и $\widetilde{J}$ — другое. Положим $X = \langle I \rangle \cap \langle J \rangle$.

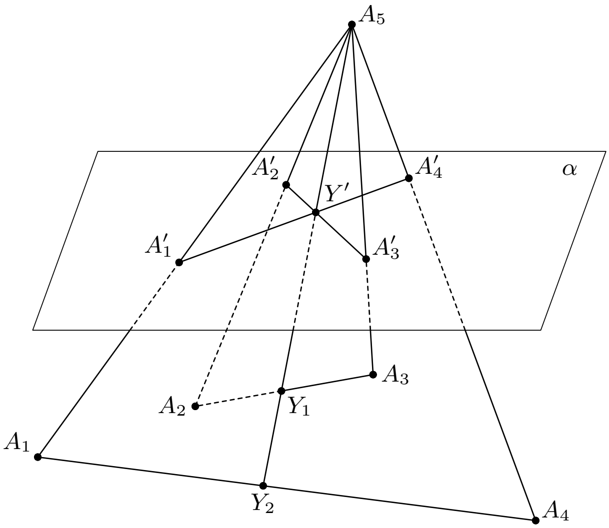

Рис. 1. На рисунке изображён случай размерности $d = 3$. Точка A_5 отделена плоскостью α от точек A_1, A_2, A_3, A_4. Отрезки A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3, A_5A_4 пересекают плоскость α в точках A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 соответственно. Отрезки $A'_1A'_4$ и $A'_2A'_3$ пересекаются в точке Y'. Луч A_5Y' пересекает отрезки A_2A_3 и A_1A_4 в точках Y_1 и Y_2 соответственно. Точка Y_1 лежит на отрезке A_5Y_2, поэтому отрезок A_2A_3 пересекает треугольник $A_1A_4A_5$ в точке Y_1

Без ограничения общности $A_{d+2} \in J$. Положим $X' = A_{d+2}X \cap \alpha$. Пусть I' — множество таких точек A'_i, что A_i лежит в I, а J' — множество таких точек A'_i, что A_i лежит в J. Тогда X' является единственной точкой пересечения $\langle I' \rangle$ и $\langle J' \rangle$. Значит, $I' \sqcup J'$ есть радоновское разбиение множества точек $A'_1, \ldots, A'_{d+1}$. Аналогично из множеств $\widetilde{I}$ и $\widetilde{J}$ строится другое радоновское разбиение множества точек $A'_1, \ldots, A'_{d+1}$, отличное от $I' \sqcup J'$.

Таким образом, у множества точек $A'_1, \ldots, A'_{d+1}$ из $(d-1)$-мерного пространства α есть два радоновских разбиения, что противоречит предположению индукции. Значит, число радоновских разбиений множества точек $A_1, \ldots, A_{d+2}$ не больше 1. Переход индукции доказан. $\square$

Благодарности

Автор выражает благодарность А. Б. Скопенкову за полезные замечания и А. Акопяну за сообщение о статье [2].

Список литературы

[1] *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли и её применения. М.: Мир, 1968. С. 12, 21.

[2] *Peterson B. B.* The Geometry of Radon's Theorem // American Mathematical Monthly. 1972. Vol. 79, № 9. P. 949–963.

[3] *Radon J.* Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten // Math. Ann. 1921. Bd. 83. S. 113–115.

[4] *Skopenkov A.* On van Kampen — Flores, Conway — Gordon — Sachs and Radon theorems // `https://arxiv.org/abs/1704.00300v1`

[5] *Skopenkov A.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory // `https://arxiv.org/abs/1402.0658`

Егор Сергееевич Колпаков, МГУ и НМУ

`kolpak317bel@gmail.com`