Оклеивание тетраэдра квадратами

А. А. Балакин

§ 1. Введение

В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Поверхность правильного тетраэдра нельзя оклеить конечным числом квадратов без просветов и наложений.*

Иногда мы будем говорить не об оклеивании, а о разрезании поверхности тетраэдра на квадраты. Здесь и далее эти понятия означают одно и то же. Формальное определение приведено в следующем параграфе.

Идея доказательства теоремы заключается в том, чтобы сопоставить разрезанию поверхности тетраэдра периодическое разрезание плоскости. Затем разрезанию плоскости сопоставляется разрезание некоторого L-образного шестиугольника на части, из которых складывается несколько квадратов. Далее вводится понятие так называемой x-площади, которая обобщает обычную площадь, однако может быть отрицательной для некоторых многоугольников, но всегда неотрицательна для квадратов.

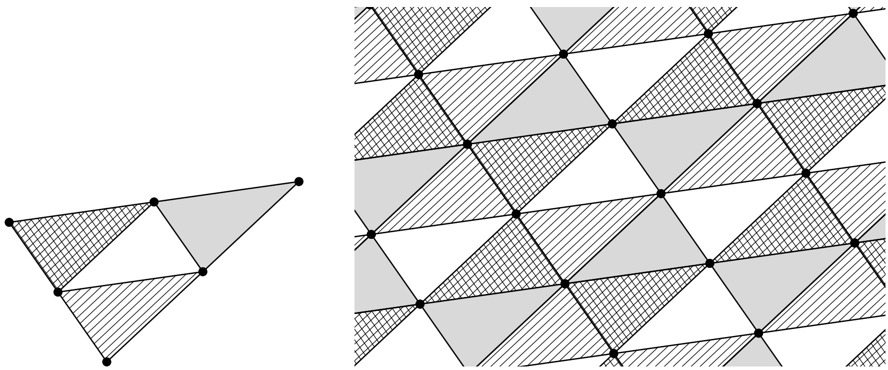
В принципе, теорема 1 следует из приведённой в данной работе леммы 1 и теоремы 10 из статьи Кеньёна [1] с довольно сложным доказательством. Здесь мы фактически приведём элементарное доказательство результата Кеньёна для частного случая, которое, скорее всего, может быть обобщено.

Некоторые результаты и методы этой работы относятся не только к правильному тетраэдру, но и к любым равногранным тетраэдрам (то есть тетраэдрам, все четыре грани которых равны). Например, в следующем параграфе мы рассматриваем понятия, определённые для всех равногранных тетраэдров. Другой подход к разрезаниям поверхностей на квадраты, связанный с электрическими цепями, можно найти в работе [4].

Автор частично поддержан грантом Президента РФ МК-6137.2016.1.

§ 2. От тетраэдра к плоскости

Мотивировка. Возьмём равногранный тетраэдр и покрасим его грани в четыре цвета[1]. Разрежем его поверхность вдоль трёх рёбер, исходящих из одной вершины, и развернём на плоскость. Получится «большой» треугольник, состоящий из четырёх «маленьких» треугольников разных цветов, на которые он разбивается своими средними линиями (рис. 1а). Эти «маленькие» треугольники были гранями исходного тетраэдра. Далее замостим «большим» треугольником плоскость, отражая его относительно середин его сторон, затем относительно середин сторон новых треугольников и т. д. Получится разбиение плоскости на «маленькие» треугольники четырёх цветов (рис. 1б). Каждый «маленький» треугольник граничит по сторонам с треугольниками трёх оставшихся цветов.



а) б)

Рис. 1. Разноцветное замощение

Определение. Пусть плоскость разбита на треугольники четырёх цветов, как показано на рис. 1б. Вершины этих треугольников образуют решётку на плоскости. Назовём две точки на плоскости *эквивалентными*, если одну можно перевести в другую композицией нескольких центральных симметрий относительно узлов этой решётки. Заметим, что если точки эквивалентны, то они лежат в треугольниках одного цвета, и каждый треугольник может быть переведён композицией центральных симметрий относительно узлов решётки в любой другой того же цвета. Значит, если мы возьмём на плоскости треугольник, состоящий из треугольников разбиения всех четырёх цветов (рис. 1а), в нём будут присутствовать точки, являющиеся представителями всех классов эквивалентности. Назовём такой треугольник

[1] Цвета на рисунках заменены различной штриховкой.

фундаментальным. С другой стороны, фундаментальный треугольник является развёрткой равногранного тетраэдра на плоскость. Назовём отображение из фундаментального треугольника на поверхность тетраэдра, переводящее точку треугольника в её прообраз при развёртке, *склейкой.* Композицию отображения, переводящего точку плоскости в эквивалентную ей точку фундаментального треугольника, с последующей склейкой, назовём *накрытием.*

Определение. Прообразы всех вершин тетраэдра при накрытии образуют решётку на плоскости. Будем говорить, что эта решётка *порождена* данным тетраэдром.

Если среди внутренних точек квадрата на плоскости нет узлов решётки, порождённой данным равногранным тетраэдром, то образ этого квадрата при накрытии назовём *квадратом на поверхности тетраэдра.*

Оклеить поверхность тетраэдра квадратами без просветов и наложений (*разрезать* на квадраты) значит представить её в виде объединения конечного числа квадратов на поверхности тетраэдра, не имеющих общих внутренних точек.

Лемма 1. *Поверхность равногранного тетраэдра можно разрезать на квадраты тогда и только тогда, когда можно разрезать плоскость на квадраты так, чтобы разрезание переходило в себя при центральных симметриях относительно узлов порождённой этим тетраэдром решётки и внутренние точки квадратов не были узлами этой решётки.*

Доказательство. По определениям накрытия и квадрата на поверхности тетраэдра, прообразом квадрата на поверхности тетраэдра при накрытии будет множество квадратов на плоскости, переходящее в себя при центральной симметрии относительно любого узла порождённой решётки. И если поверхность тетраэдра представлена в виде объединения квадратов, то и плоскость будет представлена в виде объединения их прообразов.

При этом любое множество квадратов на плоскости, внутренние точки которых не являются узлами решётки, при накрытии переходит в множество квадратов на поверхности тетраэдра. Если же плоскость разрезана на квадраты и разрезание переходит в себя при симметрии относительно каждого узла решётки, причём внутренние точки квадратов не являются узлами решётки, то при накрытии все квадраты, содержащие прообраз фиксированной точки, перейдут в один квадрат на поверхности тетраэдра. Увидеть это можно следующим образом: если мы отразим квадрат на плоскости относительно узла решётки, то его образ при накрытии не изменится, а все квадраты, содержащие прообраз фиксированной точки, можно получить композицией таких преобразований из любого из них. Это означает, что поверхность тетраэдра будет оклеена квадратами без просветов и наложений. □

Пример. Сделаем небольшое отступление и приведём пример тетраэдра, поверхность которого можно разрезать на квадраты. А именно, возьмём равногранный тетраэдр, грани которого равны треугольнику с вершинами в точках A, B и C, имеющих на плоскости соответственно декартовы координаты $(0, 0)$, $(2, 2)$ и $(3, 0)$, и покажем, как разрезать плоскость симметрично относительно узлов порождённой этим тетраэдром решётки.

Разобьём плоскость на прямоугольники следующим образом. Возьмём решётку, порождённую этим тетраэдром, и проведём через каждую её вершину прямую, параллельную стороне AB. Назовём прямую, проходящую через A, чётной, а соседние прямые — нечётными. Далее назовём соседей нечётных прямых чётными, и т. д. Опустим из всех вершин нечётных прямых перпендикуляры на соседние прямые (рис. 2). Получилось разбиение плоскости на прямоугольники, симметричное относительно всех узлов решётки. Нетрудно проверить, что стороны этих прямоугольников равны $2\sqrt{2}$ и $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, т. е. они относятся как $4:3$, а значит, их можно разрезать на $4 \cdot 3 = 12$ квадратов. Тогда по лемме 1 и заданный равногранный тетраэдр можно оклеить квадратами.

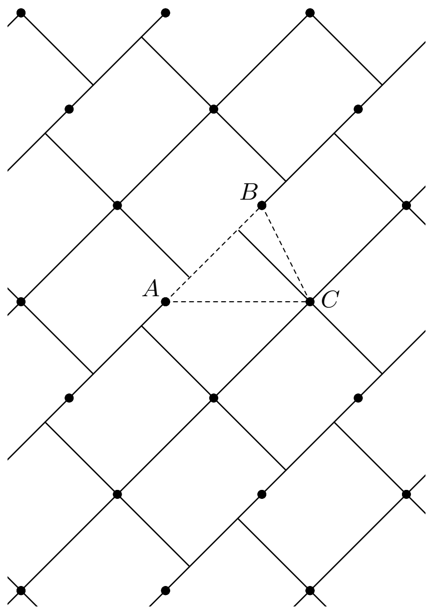


Рис. 2. Разбиение на прямоугольники

Теперь вернёмся к обсуждению понятий, необходимых для доказательства теоремы 1.

Определение. Возьмём решётку, порождённую некоторым равногранным тетраэдром. Прообразом фиксированной вершины при накрытии будет подрешётка вдвое большего размера. Будем говорить, что такая подрешётка *порождена* вершиной.

Замечание. Нетрудно проверить, что композицией двух центральных симметрий относительно узлов решётки, порождённой тетраэдром, является параллельный перенос на удвоенный вектор, соединяющий два центра симметрии, т. е. на удвоенный вектор решётки. Значит, прообраз разрезания тетраэдра переходит в себя при параллельных переносах на векторы подрешётки, порождённой вершиной тетраэдра.

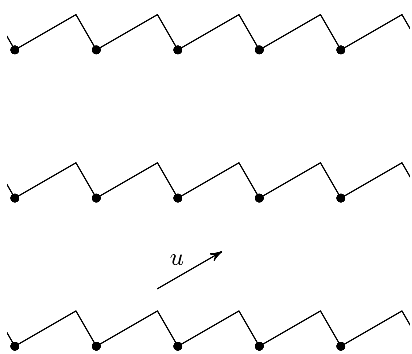
Обозначение. Правильный тетраэдр порождает правильную треугольную решётку на плоскости. Зафиксируем какую-нибудь его вершину. Она порождает правильную треугольную подрешётку, стороны которой в два раза больше сторон исходной. Наконец, у этой подрешётки есть прямоугольная подрешётка, прямоугольник которой имеет отношение сторон $\sqrt{3}$, меньшая из которых равна стороне треугольника правильной подрешётки. Обозначим такую прямоугольную решётку буквой Г.

Далее мы в основном будем рассматривать решётку Г. Заметим также, что прообраз разрезания тетраэдра переходит в себя при параллельном переносе на любой вектор этой решётки.

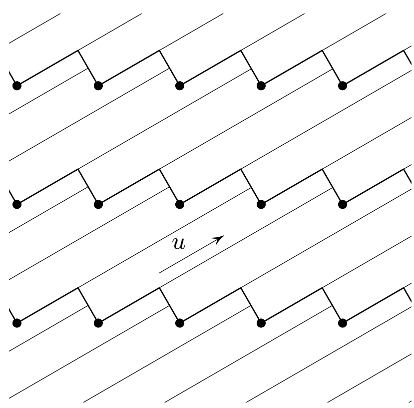
§ 3. От плоскости к уголкам

Мотивировка. Пусть на плоскости с фиксированной решёткой дано направление разрезания: стороны квадратов, на которые мы хотим разрезать плоскость, либо параллельны, либо перпендикулярны этому направлению. Если мы докажем невозможность разрезания в каждом данном направлении, мы докажем и невозможность разрезания вообще.

Определение. Нарисуем решётку Г так, чтобы вертикальные стороны её прямоугольников относились к горизонтальным как $\sqrt{3}$. Пусть дано негоризонтальное направление u разрезания. Между каждыми соседними по горизонтали узлами нарисуем «ступеньку» (два перпендикулярных



а)



б)

Рис. 3. Разбиение на уголки

отрезка с общим концом), одна из сторон которой параллельна u, а другая перпендикулярна (рис. 3а). Далее проведём через каждую вершину отрезки, параллельные u, до пересечения со «ступенькой» выше. Получим разбиение плоскости на прямоугольники или L-образные шестиугольники, которые будем называть *уголками* (рис. 3б).

Замечание. В случае когда уголок вырождается в прямоугольник, будем тоже называть его «уголком», считая, что одна из его сторон равна нулю. В случае же, когда направление u горизонтально, заменим его на вертикальное.

Определение. Будем называть уголок *разрезаемым*, если можно взять несколько квадратов (не обязательно равных), как-то разрезать каждый из них на конечное число прямоугольников, а затем из всех получившихся прямоугольников составить данный уголок.

Лемма 2. *Если плоскость можно разрезать на квадраты вдоль заданного направления так, чтобы разбиение переходило в себя при всех параллельных переносах на векторы решётки* Γ, *то уголок, построенный по этому направлению, разрезаем.*

Доказательство. Заметим, что уголки, на которые мы разбили плоскость, совмещаются параллельным переносом на векторы решётки Γ. Более того, разрезания, проведённые внутри каждого уголка, также совмещаются. Это означает, что если квадрат на плоскости разбивается линиями уголков на несколько частей, то равные им части лежат в каждом из уголков. Следовательно, мы можем разрезать уголок на несколько частей, из которых можно сложить квадраты. И так как при этом все разрезания будут параллельны сторонам квадратов, то и обратно — мы сможем разрезать квадраты на прямоугольники и сложить из них уголок. А это и есть определение разрезаемости. □

§ 4. Определение x-площади

Нам потребуется несколько обозначений для определения x-площади. О том, как это определение естественно возникает в одном из доказательств известной теоремы Дена, можно прочитать в работе [3].

Определение 1. Зафиксируем некоторый уголок. Пусть он получается вырезанием прямоугольника $c \times d$ из прямоугольника $a \times b$. Пусть он разрезан на прямоугольники и $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_k$ — все длины сторон этих прямоугольников. Обозначим

$$P = \{a, a\sqrt{3}, b, b\sqrt{3}, c, c\sqrt{3}, d, d\sqrt{3}, r_1, r_1\sqrt{3}, \ldots, r_k, r_k\sqrt{3}\}.$$

Найдём такие числа $t_1, t_2, \ldots, t_n \in P$, чтобы любое число $p \in P$ единственным образом представлялось в виде

$$p = y_0 a + y_1 a\sqrt{3} + y_2 t_1 + \ldots + y_{n+1} t_n$$

с рациональными $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$. Это можно сделать следующим образом [2, решение задачи 25.8.18]: выпишем в строку все числа из P, начиная с a и $a\sqrt{3}$, и подчеркнём те числа, которые не представляются в виде линейной комбинации предыдущих с рациональными коэффициентами. Это и будут искомые $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Иными словами, дополним a и $a\sqrt{3}$ до *базиса* в пространстве линейных комбинаций чисел из множества P с рациональными коэффициентами. Назовём числа, представимые в виде такой комбинации, *хорошими.* Заметим, что если число z хорошее, то и число $z\sqrt{3}$ тоже хорошее.

Пусть даны вещественное число x и прямоугольник с хорошими сторонами

$$z_0 a + z_1 a\sqrt{3} + z_2 t_1 + \ldots + z_{k+1} t_n$$

и

$$w_0 a + w_1 a\sqrt{3} + w_2 t_1 + \ldots + w_{k+1} t_n,$$

где z_i и w_i рациональны. Его *x-площадью* (или *площадью Гамеля*) назовём число $(z_0 + z_1 x)(w_0 + w_1 x)$.

Лемма 3. *Если прямоугольник разрезан на прямоугольники с хорошими сторонами, то его x-площадь равна сумме x-площадей этих прямоугольников.*

Доказательство [2, решение задачи 25.8.16]. Нетрудно убедиться, что сумма x-площадей двух прямоугольников с хорошими сторонами равна x-площади их объединения. Действительно, пусть имеется прямоугольник с x-площадью S, который состоит из двух прямоугольников с общей стороной

$$z = z_0 a + z_1 a\sqrt{3} + z_2 t_1 + \ldots + z_{k+1} t_n$$

и другими сторонами

$$w = w_0 a + w_1 a\sqrt{3} + w_2 t_1 + \ldots + w_{k+1} t_n,$$
$$v = v_0 a + v_1 a\sqrt{3} + v_2 t_1 + \ldots + v_{k+1} t_n.$$

Тогда сумма их x-площадей равна

$$(z_0 + z_1 x)(w_0 + w_1 x) + (z_0 + z_1 x)(v_0 + v_1 x) =$$
$$= (z_0 + z_1 x)((w_0 + v_0) + (w_1 + v_1)x) = S.$$

Пусть теперь количество прямоугольников в разрезании больше двух. Продолжим каждый разрез, как показано на рис. 4. Тогда каждый прямоугольник нового разрезания также будет иметь хорошие стороны. Рассмотрим горизонтальные слои из последовательно приложенных друг к другу по общей стороне прямоугольников. Используя уже доказанное свойство аддитивности x-площади для двух прямоугольников с общей стороной, легко доказать по индукции, что x-площадь любого такого слоя равна сумме x-площадей прямоугольников, составляющих этот слой. Теперь приложим уже эти слои друг к другу и применим только что доказанное утверждение об аддитивности x-площади ряда прямоугольников. Получим, что x-площадь разрезаемого прямоугольника равна сумме x-площадей горизонтальных слоёв. Эта сумма равна сумме x-площадей всех прямоугольников разрезания. □

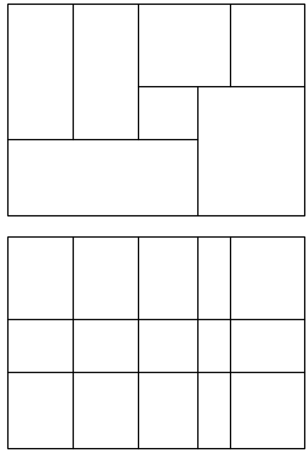


Рис. 4. Продление линий

Определение. Пусть уголок разрезан на конечное число прямоугольников с хорошими сторонами. Назовём его *x-площадью* сумму x-площадей прямоугольников, на которые он разрезан.

Следствие (из леммы 3). *Если уголок, полученный вырезанием прямоугольника $c \times d$ из прямоугольника $a \times b$, разрезан на прямоугольники с хорошими сторонами, то сумма x-площадей этих прямоугольников равна сумме x-площадей прямоугольников $a \times (b - d)$ и $(a - c) \times d$.*

Доказательство. Нарисуем разрезание уголка на прямоугольники и продлим сторону уголка длины c до пересечения с границей. Получилось новое разрезание уголка на прямоугольники с хорошими сторонами. В частности, уголок состоит из двух прямоугольников $a \times (b - d)$ и $(a - c) \times d$ с хорошими сторонами, каждый из которых, в свою очередь, разбит на несколько прямоугольников с хорошими сторонами. Значит, по лемме 3, x-площади этих двух прямоугольников равны сумме x-площадей прямоугольников, из которых они состоят. Тогда сумма x-площадей прямоугольников $a \times (b - d)$ и $(a - c) \times d$ равна сумме x-площадей всех прямоугольников из нового разрезания. Аналогично получаем, что такова же сумма x-площадей прямоугольников из разрезания, данного в условии леммы. □

Лемма 4. *Для любого действительного x верно, что x-площадь квадрата с хорошей стороной неотрицательна.*

Доказательство. Если сторона квадрата равна

$$z_0 a + z_1\sqrt{3} + z_2 t_1 + \ldots + z_{k+1} t_n,$$

то его x-площадь равна $(z_0 + z_1 x)^2 \geqslant 0$. $\square$

§ 5. x-Площадь уголка

Пусть плоскость разбита на квадраты вдоль заданного направления u так, что разрезание переходит в себя при сдвиге на любой вектор решётки Γ. Если u горизонтально, заменим его на вертикальное направление. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы началом координат был какой-нибудь узел решётки Γ, ось ординат была параллельна вектору u, а ось абсцисс — перпендикулярному ему вектору v (рис. 5). Обозначим четыре стороны уголка через a, b, c и d, как показано на рис. 5. Нетрудно проверить, что тогда узлы решётки Γ, в которые упирается уголок, имеют координаты (a, d) и (c, b). Обозначим координаты вертикального вектора стороны прямоугольника решётки Γ через (e, f).

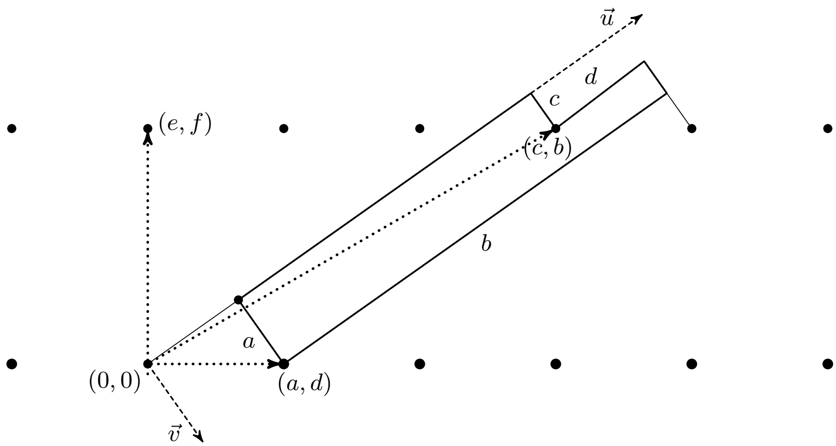


Рис. 5. Обозначения сторон и координат

Заметим, что $a \neq 0$. Иначе направление u горизонтально, а его мы условились заменить на вертикальное.

Лемма 5. *Для любого направления и существует такое число x, что x-площадь уголка (см. определение в § 3) отрицательна.*

Доказательство. Зафиксируем направление разрезания и само разрезание. По этим данным построим базис (см. § 4). Посчитаем x-площадь уголка, изображённого на рис. 4, в зависимости от x. Обозначим через d_0

и d_1 соответственно коэффициенты при a и $a\sqrt{3}$ в разложении числа d по базису. Аналогично введём a_0 и a_1, b_0 и b_1 и c_0 и c_1. В частности, $a_0 = 1$ и $a_1 = 0$.

Вектор (e, f) получается из вектора (a, d) поворотом против часовой стрелки на 90° и растяжением в $\sqrt{3}$ раз. Значит, $(e, f) = \sqrt{3}(-d, a)$, т. е. $e = -\sqrt{3}d$, $f = a\sqrt{3}$. Тогда e и f тоже хорошие. Аналогично предыдущим обозначениям введём e_0 и e_1, f_0 и f_1.

По следствию из леммы 3, x-площадь уголка равна

$$(a_0+a_1x)((b_0+b_1x)-(d_0+d_1x))+((a_0+a_1x)-(c_0+c_1x))(d_0+d_1x) = \\ = (a_0+a_1x)(b_0+b_1x)-(c_0+c_1x)(d_0+d_1x).$$

По построению, так как вершины решётки (a, d) и (c, d) лежат на соседних горизонтальных уровнях решётки (рис. 4), выполняется равенство между координатами соответствующих векторов $(c, b) = (e, f) + m(a, d)$ для некоторого целого m. Это значит, что x-площадь уголка равна

$$(a_0+a_1x)((f_0+f_1x)+m(d_0+d_1x))-(d_0+d_1x)((e_0+e_1x)+m(a_0+a_1x)) = \\ = (a_0+a_1x)(f_0+f_1x)-(d_0+d_1x)(e_0+e_1x).$$

А так как $(a_0+a_1x) = 1$, $(e_0+e_1x) = -3d_1 - d_0x$ и $(f_0+f_1x) = x$, имеем

$$(a_0+a_1x)(f_0+f_1x)-(d_0+d_1x)(e_0+e_1x) = \\ = x-(-3d_1-d_0x)(d_0+d_1x) = 3d_0d_1+(d_0^2+3d_1^2+1)x+d_0d_1x^2.$$

Возможны следующие три случая.

I. Если $d_0d_1 < 0$, то 0-площадь отрицательна.

II. Если $d_0d_1 = 0$, то x-площадь равна $(d_0^2+3d_1^2+1)x$, тогда (-1)-площадь отрицательна.

III. Если $d_0d_1 > 0$, то $(-d_0/d_1)$-площадь равна $-\dfrac{d_0}{d_1}$, т. е. отрицательна. □

§ 6. Доказательство основной теоремы

Теорема 1. *Поверхность правильного тетраэдра нельзя оклеить конечным числом квадратов без просветов и наложений.*

Доказательство. Если поверхность правильного тетраэдра можно разрезать на квадраты, то по леммам 1 и 2 уголок, построенный по решётке Γ и направлению u, разрезаем. По лемме 3, x-площадь этого уголка равна сумме x-площадей нескольких квадратов (разрезав уголок на прямоугольники, можно собрать несколько квадратов). Но, по лемме 4, x-площадь квадрата неотрицательна для любого x. А по лемме 5 найдётся такое x, что x-площадь уголка меньше нуля. Полученное противоречие доказывает, что поверхность правильного тетраэдра нельзя разрезать на квадраты. □

На этом фоне возникает естественный вопрос: поверхности каких равногранных тетраэдров можно оклеить конечным числом квадратов без просветов и наложений? Этот вопрос пока открыт, однако метод, приведённый в первом разделе данной работы, позволяет сопоставить каждой оклейке равногранного тетраэдра периодическое разрезание плоскости. Последнее, в свою очередь, близко к разрезанию тора на квадраты, что подробно разобрано в [1].

Гипотеза. *Пусть все грани тетраэдра равны треугольнику с вершинами* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *и* (x, y). *Поверхность этого тетраэдра можно оклеить квадратами без просветов и наложений тогда и только тогда, когда точка* (x, y) *лежит либо на окружности с рациональным центром и рациональным радиусом, не пересекающей ось* Ox, *либо на горизонтальной прямой на рациональном расстоянии от оси* Ox.

Задача. Дан конверт в форме прямоугольника $a \times b$. При каких вещественных a и b его можно оклеить квадратными марками без просветов и наложений с обеих сторон? Квадраты разрешается перегибать через край прямоугольника, их размеры могут различаться.

Благодарности

Автор благодарен М. Б. Скопенкову, без которого данная работа не началась бы и не состоялась в том виде, в каком она имеет быть сейчас, а также Ф. А. Шарову за ценные замечания.

Список литературы

[1] *Kenyon R.* Tiling with squares and square-tileable surfaces https://pdfs.semanticscholar.org/eec7/31c9882dcb80a2fb1dbe2073b85e3ed13753.pdf

[2] *Скопенков М. Б., Малиновская О. А., Дориченко С. А., Шаров Ф. А.* Собери квадрат // Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки — к профессии / Ред. А. А. Заславский, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков. М.: МЦНМО, 2018. С. 542–554.

[3] *Шаров Ф. А.* X-площадь // Представлено в «Квант».

[4] *Chien E., Luo F.* Rectangle tilings of closed surfaces from discrete harmonic 1-chains https://pdfs.semanticscholar.org/47a9/0f45fb72847f8caac69c924fd30c7aa74901.pdf

---

Андрей Алексеевич Балакин, НИУ Высшая школа экономики
a99bland@yandex.ru