О вычислении конечных тригонометрических сумм

Н. Н. Осипов

Введение

О явном вычислении (или, как ещё говорят, о вычислении в замкнутой форме) конечных *тригонометрических сумм* написано довольно много работ (см., например, статьи [18–23, 26, 27], а также библиографию к ним). Цель настоящей статьи — познакомить читателя с наиболее простыми методами нахождения таких сумм.

Зачем нужно точно вычислять тригонометрические суммы или зачем могут потребоваться тригонометрические тождества с суммами? Ведь для большинства случаев точные формулы не нужны, а достаточно каких-то оценок и неравенств. Это, конечно, верно, но иногда, для получения особо точных оценок, тождества могут сильно помочь.

Например, классические теоремы Чебышёва и Коркина — Золотарёва об *экстремальных многочленах* (алгебраических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на данном отрезке в C-норме и L_1-норме соответственно) легко доказываются, если воспользоваться тригонометрическими тождествами

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \cos^k \frac{\pi j}{n} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant k < n, \\ \frac{n}{2^{n-2}}, & \text{если } k = n \end{cases}$$

(см., например, [2] или, в более элементарном изложении, [5] в случае теоремы Чебышёва). В статье [6] с помощью разнообразных тригонометрических тождеств выводится другой классический результат — *неравенство Бернштейна* для производной (тригонометрического, а затем и алгебраического) многочлена.

Типичные элементарные задачи, приводящие к конечным тригонометрическим суммам, обычно связаны с геометрией правильного многоугольника. Их можно решать с помощью геометрических рассуждений (и обычной алгебры), но есть и более алгоритмический подход, использующий *алгебру комплексных чисел* (см., например, § 10 в книге [10]). Вот простейший пример такой задачи: найти сумму всех векторов, исходящих из центра правильного N-угольника в его вершины. Эта задача сводится к вычислению тригонометрической суммы

$$\sum_{j=0}^{N-1} \zeta^j.$$

Здесь и далее ζ — фиксированный *первообразный корень* N-й степени из единицы, например

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N} = \exp\frac{2\pi i}{N}.$$

Далее мы будем рассматривать в основном *стандартные тригонометрические суммы* — суммы вида

$$S(N) = \sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta^j), \tag{0.1}$$

где $R(z)$ — некоторая *рациональная функция*. Именно к таким суммам приводят наиболее содержательные геометрические задачи про правильный N-угольник.

При вычислении стандартных тригонометрических сумм очень эффективными оказываются методы *теории функций комплексного переменного*: разложение в степенные ряды (Тейлора или Лорана) и теория вычетов. Всё это содержится в любом учебнике по ТФКП (см., например, [12]), и мы будем предполагать, что читатель знаком с соответствующей техникой.

В теореме 1 (см. § 1) предлагается простой регулярный способ вычисления сумм вида (0.1). Все удобства (как и недостатки) этого способа читатель сможет оценить только в процессе решения конкретных задач — с этой целью в § 2 приводится небольшая коллекция задач, а в § 3 даны решения, указания и ответы к ним. Самыми яркими экземплярами в данной коллекции являются, несомненно, задача 2.12 о тождествах М. Рисса и задача 2.13 о тождестве Эйзенштейна. Тождества Рисса играют важную роль при доказательстве упомянутого выше неравенства Бернштейна (подробности см. в [6]). Тождество Эйзенштейна — это один из примеров так называемых *теорем взаимности* для тригонометрических сумм. Подробный рассказ об общих теоремах взаимности выходит за рамки этой статьи (их доказательство обычно требует более тонкой и менее элементарной техники, образцы которой читатель может найти в статьях [18] и [22]).

Элементарный подход к вычислению стандартных тригонометрических сумм основан на *теории многочленов*: здесь главным инструментом является теорема о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших рациональных дробей (см., например, главу 3 в учебнике [4]). В принципе, такой подход может быть доступен даже школьникам (в первую очередь, конечно, ученикам математических классов).

Для вычисления стандартных тригонометрических произведений, аналогичных (0.1), также достаточно теории многочленов, но мы только слегка затронем эту тему (см. теорему 2 в § 1 и задачи 1.2, 2.15–2.17).

В завершающем § 4 мы рассмотрим тригонометрические суммы нескольких специальных типов, но ограничимся лишь отдельными примерами и описанием общего подхода к вычислению.

Значения сумм первых двух типов (см. разделы 4.1 и 4.2) выражаются в терминах различных *арифметических функций*, наиболее известными примерами которых являются функция Эйлера $\varphi(N)$ и функция Мёбиуса $\mu(N)$. Техника вычисления широко использует аппарат теории *мультипликативных функций* (в частности, *свёртку Дирихле* и *формулу обращения Мёбиуса*). В подробном изложении основные факты об арифметических (в частности, о мультипликативных) функциях читатель может найти в соответствующих главах учебников [9] и [15]. Быстро навести справки можно, например, по ссылке [29].

Третий тип специальных тригонометрических сумм — это суммы, аналогичные *квадратичным суммам Гаусса* (см. раздел 4.3). Несмотря на полностью элементарную конструкцию, значения таких сумм иногда могут иметь весьма нетривиальный смысл в рамках *теории дивизоров* мнимых квадратичных полей.

§ 1. Немного теории

Мы начнём с одной геометрической задачи для школьников, решение которой непосредственно сводится к вычислению некоторой тригонометрической суммы, и заодно продемонстрируем один элементарный подход к нахождению таких сумм.

Задача 1.1. На окружности единичного радиуса равномерно расположены N точек, где N нечётно. Одну из этих точек соединили отрезками с остальными и затем подсчитали сумму величин, обратных квадратам расстояний от центра окружности до проведённых отрезков. Докажите, что получилось N^2-1.

Решение. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ — данные точки, причём A_0 — та точка, которую соединяли со всеми остальными. Легко видеть, что указанные расстояния суть $\cos(\alpha_j/2)$, где α_j — угол, под которым видна хорда

A_0A_j из центра окружности. Ясно, что

$$\alpha_j = \begin{cases} \dfrac{2\pi j}{N}, & \text{если } j < \dfrac{N}{2}, \\ \dfrac{2\pi(N-j)}{N}, & \text{если } j > \dfrac{N}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению суммы

$$S(N) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\cos^2 \dfrac{\pi j}{N}} \tag{1.1}$$

(для удобства суммирования мы добавили единицу), а точнее, к доказательству равенства $S(N) = N^2$. Точки A_j можно интерпретировать как комплексные числа ζ^j, где $j = 0, 1, \ldots, N-1$, а сумму $S(N)$ — записать в виде

$$S(N) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{4\zeta^j}{(\zeta^j+1)^2}.$$

Чтобы вычислить $S(N)$, заметим, что

$$S(N) = \lim_{r\to 1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{4r\zeta^j}{(r\zeta^j+1)^2}.$$

Зачем понадобилось переходить к пределу? Дело в том, что при $|r| < 1$ можно (а при $r = 1$ — нельзя) написать следующую цепочку равенств:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{4r\zeta^j}{(r\zeta^j+1)^2} = 4\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}k(r\zeta^j)^k = 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}kr^k\sum_{j=0}^{N-1}\zeta^{kj} ==$$

$$= 4N^2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}lr^{Nl} = 4N^2\frac{r^N}{(r^N+1)^2}.$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемым равенством

$$\sum_{j=0}^{N-1}\zeta^{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \not\equiv 0 \pmod N, \\ N, & \text{если } k \equiv 0 \pmod N, \end{cases} \tag{1.2}$$

а также разложением в ряд

$$\frac{z}{(z+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}kz^k,$$

имеющим место при $|z| < 1$. Теперь, поскольку

$$\lim_{r\to 1}\left(4N^2\frac{r^N}{(r^N+1)^2}\right) = N^2,$$

требуемое соотношение доказано. □

Как вариант, можно было бы вычислить сумму

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{4\zeta^j}{(z-\zeta^j)^2} = -4\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{z-\zeta^j} + 4z\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{(z-\zeta^j)^2} \tag{1.3}$$

и затем в найденное выражение подставить $z = -1$. Первая сумма в правой части равенства (1.3) есть *логарифмическая производная* $P'(z)/P(z)$ многочлена

$$P(z) = \prod_{j=0}^{N-1}(z-\zeta^j) = z^N - 1.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{z-\zeta^j} = \frac{Nz^{N-1}}{z^N-1}.$$

Вторая сумма находится дифференцированием по z полученного равенства:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{(z-\zeta^j)^2} = \frac{Nz^{N-2}(N+z^N-1)}{(z^N-1)^2}.$$

В итоге имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{4\zeta^j}{(z-\zeta^j)^2} = \frac{4N^2z^{N-1}}{(z^N-1)^2}.$$

Подставив сюда $z = -1$, получим

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{4\zeta^j}{(1+\zeta^j)^2} = N^2.$$

Попутно можно также обнаружить следующие равенства:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{1+\zeta^j} = \frac{N}{2}, \quad \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{(1+\zeta^j)^2} = \frac{-N^2+2N}{4}.$$

Действуя в том же духе, нетрудно продолжить этот ряд равенств:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{(1+\zeta^j)^3} = \frac{-3N^2+4N}{8}, \quad \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{(1+\zeta^j)^4} = \frac{N^4-22N^2+24N}{48} \quad \text{и т. д.}$$

Этот способ вычисления суммы (1.1) отличается от предыдущего тем, что полностью элементарен (обходится без разложений в степенные ряды), но нам повезло — многочлен $P(z)$ оказался на самом деле «малочленом», и потому с ним удобно вычислять. Вообще, если аналог многочлена $P(z)$ допускает «разумную» форму записи, то такой способ вычисления соответствующих тригонометрических сумм будет работать (см. ниже раздел 4.1). С другой стороны, чтобы получить эту «разумную» форму записи, иногда могут потребоваться разложения в ряды (как, например, в разделе 4.3; см. также решение задачи 2.14).

Естественное желание обобщить (т. е. фактически предложить *алгоритм вычисления* тригонометрических сумм типа (1.1)) рано или поздно приведёт к утверждению наподобие следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\zeta = \exp(2\pi i/N)$, $R(z)$ — *рациональная функция, множество полюсов* P_R *которой не содержит точек* ζ^j $(j=0,1,\ldots,N-1)$. *Тогда*

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta^j) = \sum_{0\neq z_*\in P_R} \operatorname*{res}_{z=z_*} F(z) + \operatorname*{res}_{z=0} F(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} F(z), \tag{1.4}$$

где

$$F(z) = \frac{R(z)}{z(1-z^N)}.$$

Доказательство получается в результате применения *теоремы о полной сумме вычетов* к рациональной функции $F(z)$. В качестве упражнения читателю рекомендуется аккуратно вычислить вычеты $F(z)$ в точках $z=\zeta^j$ (см. ниже (1.5)). □

Теорема 1 является более элементарным вариантом способа вычисления тригонометрических сумм с помощью вычетов, предлагаемого в задаче 30.04 из сборника задач [8]. Напомним общее правило вычисления вычетов, которого обычно достаточно для практических приложений: если z_* — полюс функции $F(z)$ кратности $k \geqslant 1$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_*} F(z) = \lim_{z\to z_*} \frac{G^{(k-1)}(z)}{(k-1)!},$$

где $G(z) = (z-z_*)^k F(z)$. В частности, при $z_* = \zeta^j$ и функции $F(z)$, определённой выше, получим

$$\operatorname*{res}_{z=z_*} F(z) = -\frac{R(\zeta^j)}{N}. \tag{1.5}$$

Кроме того, если $R(z)=f(z)/g(z)$ и $z_*\neq 0$ — *простой* полюс $R(z)$, $z_*^N \neq 1$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_*} F(z) = \frac{f(z_*)}{g'(z_*)z_*(1-z_*^N)}.$$

С помощью теоремы 1 сумма (1.1) вычисляется очень легко: имеем

$$R(z)=\frac{4z}{(z+1)^2},\quad F(z)=\frac{4}{(z+1)^2(1-z^N)},$$

поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0}F(z)=\operatorname*{res}_{z=\infty}F(z)=0,\quad \operatorname*{res}_{z=-1}F(z)=N$$

и, таким образом, $S(N)=N^2$.

Теорему 1 легко модифицировать на случай, когда среди полюсов $R(z)$ присутствуют некоторые ζ^j, т. е. корни из единицы N-й степени. А именно, из суммы в левой части равенства (1.4) нужно всего лишь удалить не имеющие смысла слагаемые, соответствующие этим ζ^j. В качестве упражнения по вычислению вычетов читателю предлагается показать, что при чётном N сумма (1.1) без слагаемого с номером $j=N/2$ равна $(N^2-1)/3$.

Попутно отметим, что нахождение аналогичных (0.1) *тригонометрических произведений* оказывается существенно проще. Поскольку рациональная функция есть отношение многочленов, можно ограничиться рассмотрением случая, когда $R(z)$ — многочлен. Как показывает следующая теорема, здесь достаточно обычной элементарной алгебры.

Теорема 2. *Пусть $\zeta=\exp(2\pi i/N)$, $R(z)$ — многочлен степени k со старшим коэффициентом 1 и корнями $\theta_1,\dots,\theta_k$. Тогда*

$$\prod_{j=1}^{N-1}R(\zeta^j)=(-1)^{k(N-1)}\prod_{l=1}^{k}\frac{\theta_l^N-1}{\theta_l-1}. \tag{1.6}$$

Если некоторые из корней θ_l равны 1*, то соответствующие сомножители в правой части равенства* (1.6) *следует считать равными N.*

Доказательство получается с помощью разложений

$$R(z)=\prod_{l=1}^{k}(z-\theta_l),\quad \frac{z^N-1}{z-1}=(-1)^{N-1}\prod_{j=1}^{N-1}(\zeta^j-z)$$

и непосредственного перемножения. □

В качестве иллюстрации рассмотрим один важный пример, который пригодится нам далее (см. раздел 4.3).

Задача 1.2. Пусть N нечётно, $N=4m+r$, где $r\in\{1,3\}$. Докажите, что

$$\prod_{l=1}^{(N-1)/2}2\sin\frac{2\pi(2l-1)}{N}=(-1)^m\sqrt{N}. \tag{1.7}$$

Решение. К произведению P в левой части равенства (1.7) теорема 2 неприменима, но с её помощью можно найти P^2. Заметим, что

$$P = (-1)^{(N-1)/2} \prod_{l=1}^{(N-1)/2} 2\sin\frac{2\pi(N-(2l-1))}{N}.$$

Когда l меняется от 1 до $(N-1)/2$, переменные $2l-1$ и $N-(2l-1)$ вместе пробегают все значения от 1 до $N-1$, поэтому

$$P^2 = (-1)^{(N-1)/2} \prod_{l=1}^{(N-1)/2} 2\sin\frac{2\pi(N-(2l-1))}{N} \prod_{l=1}^{(N-1)/2} 2\sin\frac{2\pi(2l-1)}{N} =$$

$$= (-1)^{(N-1)/2} \prod_{j=1}^{N-1} 2\sin\frac{2\pi j}{N} = (-1)^{(N-1)/2} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{\zeta^j - \zeta^{-j}}{i} = \prod_{j=1}^{N-1} (\zeta^{2j} - 1),$$

где $\zeta = \exp(2\pi i/N)$. Последнее произведение вычисляется с помощью теоремы 2 и оказывается равным N. Итак, $P = \pm\sqrt{N}$. Осталось найти знак P. Он определяется числом тех l от 1 до $(N-1)/2$, для которых

$$\sin\frac{2\pi(2l-1)}{N} < 0.$$

Это число может быть выражено как

$$\left[\frac{N-1}{2}\right] - \left[\frac{N+2}{4}\right] = m + \left[\frac{r-1}{2}\right] - \left[\frac{r+2}{4}\right]$$

(квадратные скобки обозначают взятие целой части) и в каждом из случаев $r = 1$ и $r = 3$ оказывается равным m. Отсюда следует (1.7). $\square$

Дальнейшее развитие (в элементарном русле) сюжета о тригонометрических произведениях читатель может найти, например, в статье [20].

§ 2. Подборка задач

Предлагаемые ниже задачи так или иначе связаны с вычислением конечных тригонометрических сумм. Основной инструмент для решения задач — это, конечно, теорема 1, хотя иногда возможны и другие варианты.

2.1. Корни из единицы

Следующие две задачи предназначены исключительно для разминки. Первая задача — ещё одно упражнение в применении фундаментального равенства (1.2). Вторая задача дана скорее в довесок к первой, но может быть интересна и сама по себе.

Задача 2.1. Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — некоторый набор комплексных корней степени N из единицы, т. е. $z_l^N = 1$ ($l = 1, \ldots, m$). Предположим, что для каждого $j = 1, \ldots, N-1$ выполняется равенство

$$\sum_{l=1}^{m} z_l^j = 0.$$

Докажите, что m делится на N, а заданный набор состоит из m/N раз повторяющихся чисел $1, \zeta, \ldots, \zeta^{N-1}$, где $\zeta = \exp(2\pi i/N)$.

Задача 2.2[1]. Дан многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Известно, что все его комплексные корни по модулю равны 1. Докажите, что все корни многочлена суть корни из 1.

2.2. Правильный N-угольник

Пусть правильный N-угольник $A_0A_1 \ldots A_{N-1}$ ($N > 1$) вписан в окружность радиуса 1. В следующей серии задач рассматриваются суммы

$$S_k^{(1)}(P) = \sum_{j=0}^{N-1} |PA_j|^k, \quad S_k^{(2)}(P) = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j |PA_j|^k, \quad S_k^{(3)}(P) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(P)^k,$$

где точка P принадлежит данной окружности, $h_j(P)$ — расстояние от центра окружности до прямой PA_j.

Задача 2.3[2]. Докажите, что:

а) если k чётно и $0 \leqslant k < 2N$, то $S_k^{(1)}(P)$ не зависит от P;

б) если $k \equiv N \pmod 2$, $0 \leqslant k < N$ и P лежит на дуге $A_{N-1}A_0$, то $S_k^{(2)}(P) = 0$;

в) $S_k^{(3)}(P) = 2^{-k} S_k^{(1)}(-P)$.

Задача 2.4. Вычислите:

а) $S_{2N}^{(1)}(P)$; б) $S_N^{(2)}(P)$, если P лежит на дуге $A_{N-1}A_0$.

Задача 2.5. Докажите, что если P лежит на дуге $A_{N-1}A_0$, то

$$\sum_{j=0}^{N-2} \frac{1}{|PA_j| \cdot |PA_{j+1}|} = \frac{1}{|PA_0| \cdot |PA_{N-1}|}.$$

Задача 2.6. Вычислите:

а) $S_{-2}^{(1)}(P)$; б) $S_{-1}^{(2)}(P)$, если P лежит на дуге $A_{N-1}A_0$ и N нечётно.

---

[1] XXII Российский фестиваль юных математиков, 2011 г.

[2] Случай $k = 1$ п. б) хорошо известен (см., например, задачу 609(а) в книге [14]).

2.3. Тригонометрические суммы: техника вычисления

Здесь предлагаются технически более сложные задачи, поэтому можно не стесняться в выборе средств для их решения. Разумеется, мы рекомендуем в первую очередь попробовать теорему 1.

Задача 2.7. В условиях теоремы 1 дайте элементарный способ вычисления суммы $\sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta^j)$, основанный на разложении рациональной функции $R(z)$ в сумму простейших дробей.

Задача 2.8. Пусть

$$S_k = \sum_{j=0}^{N-1} \cos^k \frac{2\pi j}{N}.$$

а) Докажите, что если k нечётно и $1 \leqslant k < N$, то $S_k = 0$.
б) Докажите, что если N нечётно, то $S_{-1} = (-1)^{(N-1)/2} N$.

Задача 2.9. При нечётном N вычислите сумму

$$\sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi j}{N}\right),$$

где число θ таково, что все слагаемые имеют смысл.

Задача 2.10. Докажите, что

$$\sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi j}{N} = \frac{(N-1)(N-2)}{3}.$$

Задача 2.11 [3]. Пусть $0 \leqslant k \leqslant N$. Докажите, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\sin \dfrac{\pi k(4j+1)}{2N}}{1 - \cos \dfrac{\pi(4j+1)}{2N}} = kN.$$

Задача 2.12 [4]. Пусть $0 \leqslant k \leqslant n$. Докажите *тождества Рисса*:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1} \frac{\cos \dfrac{\pi k(2j-1)}{2n}}{\sin^2 \dfrac{\pi(2j-1)}{4n}} = 0, \qquad \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1} \frac{\sin \dfrac{\pi k(2j-1)}{2n}}{\sin^2 \dfrac{\pi(2j-1)}{4n}} = 4kn.$$

---

[3] IV Соросовская олимпиада (I тур, задача 10 для 11 класса).
[4] См. [6, задача 35].

Задача 2.13[5]. Докажите *тождество Эйзенштейна*:

$$l\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi lj}{k}}{\operatorname{tg}\dfrac{2\pi j}{k}}+k\sum_{j=1}^{l-1}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi kj}{l}}{\operatorname{tg}\dfrac{2\pi j}{l}}=-\frac{(k-l)^2}{2},$$

где k, l — нечётные взаимно простые натуральные числа.

Задача 2.14. Докажите, что при нечётном N

$$\sum_{j=0}^{N-1} j\operatorname{tg}\frac{\pi j}{N}=\frac{N}{2}\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j\operatorname{ctg}\frac{\pi j}{N}.$$

2.4. Тригонометрические произведения

Для решения следующих задач читателю предлагается применять теорему 2 как наиболее эффективное средство (хотя, конечно, возможны и другие способы решения).

Задача 2.15. Докажите, что

$$\prod_{j=1}^{N-1}\sin\frac{\pi j}{N}=\frac{N}{2^{N-1}}.$$

Задача 2.16. При нечётном N докажите, что

$$\prod_{j=1}^{N-1}\operatorname{tg}\frac{\pi j}{N}=(-1)^{(N-1)/2}N.$$

Задача 2.17. Докажите, что

$$\prod_{j=1}^{N-1}\Bigl(5-4\cos\frac{2\pi j}{N}\Bigr)=(2^N-1)^2.$$

§ 3. Решения, указания и ответы

2.1. Положим $z_l=\zeta^{k_l}$, $k_l\in\{0,1,\ldots,N-1\}$. При фиксированном $k\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ рассмотрим новый набор чисел $w_1,\ldots,w_m$, где $w_l=$ $=\zeta^{-k}z_l=\zeta^{k_l-k}$. Ясно, что для каждого $j=1,\ldots,N-1$

$$\sum_{l=1}^{m}w_l^j=\zeta^{-kj}\sum_{l=1}^{m}z_l^j=0.$$

[5] Цит. по статье [18].

Суммируя эти равенства, получим

$$\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{m}\zeta^{(k_l-k)j}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1}\zeta^{(k_l-k)j}=0, \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{N-1}\zeta^{(k_l-k)j}=m.$$

Из (1.2) следует, что

$$\sum_{j=0}^{N-1}\zeta^{(k_l-k)j}=\begin{cases} N, & \text{если } k_l=k,\\ 0, & \text{если } k_l\neq k.\end{cases}$$

Значит, количество k_l, равных k, равно m/N и тем самым одинаково для всех k.

2.2. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — эти корни. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ рассмотрим точку

$$P^{(j)}=\bigl(s_1(z_1^j, \ldots, z_n^j), \ldots, s_n(z_1^j, \ldots, z_n^j)\bigr),$$

где $s_k(x_1, \ldots, x_n)$ — *элементарные симметрические многочлены*. Как следует из *основной теоремы о симметрических многочленах*, $P^{(j)} \in \mathbb{Z}^n$ для любого j. Кроме того, из условия следует, что k-я координата всех точек $P^{(j)}$ ограничена биномиальным коэффициентом C_n^k $(k=1, \ldots, n)$. Значит, $P^{(j)}=P^{(l)}$ для некоторых $j \neq l$, откуда

$$(z_1^j, \ldots, z_n^j)=(z_{\alpha_1}^l, \ldots, z_{\alpha_n}^l)$$

для некоторой перестановки $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Если эта перестановка является тождественной, то утверждение задачи очевидно. Если она циклическая, скажем $\alpha=(2, 3, \ldots, n, 1)$, то

$$j \arg z_k \equiv l \arg z_{k+1} \pmod{2\pi}, \quad k=1, \ldots, n,$$

где $z_{n+1}=z_1$. Отсюда видно, что все $\arg z_k$ соизмеримы с π, и утверждение задачи верно. Осталось сослаться на тот факт, что всякую перестановку можно разложить в произведение циклических.

2.3. Пусть $A_j=\zeta^j$, где $\zeta=\exp(2\pi i/N)$. Точку P будем считать комплексным числом с условием $|P|=1$. Пусть также $\xi=\exp(\pi i/N)$, так что $\zeta=\xi^2$ и $\xi^N=-1$.

а) Обозначим $m=k/2$. Из условия $|P|=1$ следует, что

$$|PA_j|^2=|P-\zeta^j|^2=2-\frac{P}{\zeta^j}-\frac{\zeta^j}{P}=-\frac{(\zeta^j-P)^2}{P\zeta^j}.$$

Далее можно рассуждать двумя способами.

Первый способ. Имеем

$$S_k^{(1)}(P) = \sum_{j=0}^{N-1} |P-\zeta^j|^k = \sum_{j=0}^{N-1}\Bigl(2-\frac{P}{\zeta^j}-\frac{\zeta^j}{P}\Bigr)^m =$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{m}(-1)^l C_m^l 2^{m-l}\Bigl(\frac{P}{\zeta^j}+\frac{\zeta^j}{P}\Bigr)^l = \sum_{l=0}^{m}(-1)^l C_m^l 2^{m-l}\sigma_l,$$

где введено обозначение

$$\sigma_l = \sum_{j=0}^{N-1}\Bigl(\frac{P}{\zeta^j}+\frac{\zeta^j}{P}\Bigr)^l.$$

Поскольку $0 \leqslant l \leqslant m < N$, достаточно убедиться, что σ_l не зависит от P при $0 \leqslant l < N$. В самом деле,

$$\sigma_l = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{l} C_l^t P^{2t-l}\zeta^{(l-2t)j} = \sum_{t=0}^{l} C_l^t P^{2t-l}\sum_{j=0}^{N-1}\zeta^{(l-2t)j} = \begin{cases} 0, & l \text{ нечётно}, \\ NC_l^{l/2}, & l \text{ чётно}, \end{cases}$$

так как $|l-2t| \leqslant l < N$. Таким образом,

$$S_k^{(1)}(P) = N\sum_{t=0}^{[m/2]} 2^{m-2t} C_m^{2t} C_{2t}^t.$$

Второй способ. Имеем

$$S_k^{(1)}(P) = \sum_{j=0}^{N-1} |P-\zeta^j|^k = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(-1)^m(\zeta^j-P)^{2m}}{P^m\zeta^{mj}} = \sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta^j),$$

где

$$R(z) = \frac{(-1)^m(z-P)^{2m}}{P^m z^m}.$$

Далее воспользуемся теоремой 1. В данном случае

$$F(z) = \frac{(-1)^m(z-P)^{2m}}{P^m z^{m+1}(1-z^N)}.$$

Так как $m < N$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} F(z) = 0$. Кроме того,

$$\operatorname*{res}_{z=0} F(z) = \frac{(-1)^m}{P^m}\, c_m,$$

где c_m — коэффициент при z^m в разложении

$$\frac{(z-P)^{2m}}{1-z^N} = (z^{2m} + \ldots + (-1)^m C_{2m}^m P^m z^m + \ldots + P^{2m})(1 + z^N + z^{2N} + \ldots).$$

Из неравенства $m < N$ следует, что $c_m = (-1)^m C_{2m}^m P^m$. Значит,

$$\operatorname*{res}_{z=0} F(z) = C_{2m}^m.$$

Следовательно, $S_k^{(1)}(P) = NC_{2m}^m$.

Замечание. Второй способ приводит к ответу в замкнутой форме, зато первый способ позволяет получить формулу

$$S_k^{(1)}(P) = N \sum_{t=0}^{[m/2]} C_m^{2t} C_{2t}^t |P|^{2t}(|P|^2+1)^{m-2t},$$

где P произвольна (при $|P| = 1$ правая часть упрощается до NC_{2m}^m).

б) Пусть $m = (N-k)/2$. Для точки P дуги $A_{N-1}A_0$ имеем

$$|PA_j| = |P - \zeta^j| = \lambda(P) \cdot \frac{\zeta^j - P}{\xi^j}, \tag{3.1}$$

где $\lambda(P) = |1-P|/(1-P)$. Следовательно,

$$S_k^{(2)}(P) = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j |P-\zeta^j|^k = \lambda^k(P) \sum_{j=0}^{N-1} \zeta^{mj}(\zeta^j - P)^k = \lambda^k(P) \sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta^j), \tag{3.2}$$

где $R(z) = z^m(z-P)^k$. Далее воспользуемся теоремой 1. В данном случае

$$F(z) = \frac{z^{m-1}(z-P)^k}{1-z^N}.$$

Так как $m \geqslant 1$, то $\operatorname{res}_{z=0} F(z) = 0$, а так как $m+k-1 = (N+k)/2 - 1 \leqslant N-2$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} F(z) = 0$. Таким образом, $S_k^{(2)}(P) = 0$.

в) Из геометрических соображений ясно, что $2h_j(P) = |P'A_j|$, где P' — точка, противоположная P: $P' = -P$.

2.4. *Указание.* а) См. решение п. а) задачи 2.3 в случае $k = 2N$. б) См. решение п. б) задачи 2.3 в случае $k = N$.

Ответ. а) $NC_{2N}^N + (-1)^N N(P^N + P^{-N})$; б) $N\lambda^N(P)(1 + (-1)^N P^N)$.

2.5. Опираясь на формулу (3.1), получим равенство

$$\sum_{j=0}^{N-2} \frac{1}{|PA_j| \cdot |PA_{j+1}|} = \lambda^{-2}(P) \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\xi^{2j+1}}{(\zeta^j - P)(\zeta^{j+1} - P)}, \quad \text{где} \quad \lambda(P) = \frac{|1-P|}{1-P}.$$

Далее можно рассуждать двумя способами.

Первый способ. Сумму можно найти с помощью *телескопического суммирования*:

$$\sum_{j=0}^{N-2}\frac{\xi^{2j+1}}{(\zeta^j-P)(\zeta^{j+1}-P)}=\xi\sum_{j=0}^{N-2}\frac{\zeta^j}{(\zeta^j-P)(\zeta^{j+1}-P)}=$$

$$=\frac{\xi}{1-\zeta}\sum_{j=0}^{N-2}\left(\frac{1}{\zeta^{j+1}-P}-\frac{1}{\zeta^j-P}\right)=\frac{\xi}{1-\zeta}\left(\frac{1}{\zeta^{N-1}-P}-\frac{1}{1-P}\right)=\frac{\xi^{N-1}}{(1-P)(\zeta^{N-1}-P)}.$$

Осталось заметить, что

$$\lambda^{-2}(P)\frac{\xi^{N-1}}{(1-P)(\zeta^{N-1}-P)}=\frac{1}{|PA_0|\cdot|PA_{N-1}|}.$$

Второй способ. Указание. С помощью теоремы 1 вычислите сумму

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\zeta^j}{(\zeta^j-P)(\zeta^{j+1}-P)}.$$

2.6. а) Как видно из решения п. а) задачи 2.3,

$$S_{-2}^{(1)}(P)=-\sum_{j=0}^{N-1}\frac{P\zeta^j}{(\zeta^j-P)^2}=-\sum_{j=0}^{N-1}R(\zeta^j),\quad \text{где}\quad R(z)=\frac{Pz}{(z-P)^2}.$$

Далее применим теорему 1. В данном случае $F(z)=\dfrac{P}{(z-P)^2(1-z^N)}$. Легко видеть, что

$$\operatorname*{res}_{z=0}F(z)=\operatorname*{res}_{z=\infty}F(z)=0,\qquad \operatorname*{res}_{z=P}F(z)=N\frac{P^N}{(1-P^N)^2}.$$

Таким образом,

$$S_{-2}^{(1)}(P)=-N^2\frac{P^N}{(1-P^N)^2}.$$

б) Воспользуемся равенством (3.2) при $m=(N+1)/2$ и $k=-1$. Имеем

$$R(z)=\frac{z^{(N+1)/2}}{z-P},\qquad F(z)=\frac{z^{(N-1)/2}}{(z-P)(1-z^N)}.$$

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=0}F(z)=\operatorname*{res}_{z=\infty}F(z)=0,\qquad \operatorname*{res}_{z=P}F(z)=\frac{P^{(N-1)/2}}{1-P^N}.$$

Следовательно,

$$S_{-1}^{(2)}(P)=N\lambda^{-1}(P)\frac{P^{(N-1)/2}}{1-P^N}.$$

2.7. *Указание.* Достаточно уметь вычислять при $k = 1, 2, \ldots$ суммы

$$S_k(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{(z - \zeta^j)^k}.$$

2.8. а) Решение 1. Если $k \geqslant 1$ нечётно, то $\cos^k x$ представляется в виде линейной комбинации $\cos kx$, $\cos{(k-2)x}$, $\ldots$, $\cos x$. Поэтому достаточно показать, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos\frac{2\pi kj}{N} = 0$$

при $1 \leqslant k < N$. Но это очевидным образом следует из равенства (1.2).

Решение 2. Имеем

$$S_k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{N-1} (\zeta^j + \zeta^{-j})^k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \zeta^{(k-2l)j} = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \sum_{j=0}^{N-1} \zeta^{(k-2l)j} = 0,$$

так как $0 < |k - 2l| < N$, и поэтому внутренняя сумма равна нулю.

Решение 3. Применим теорему 1. В данном случае

$$R(z) = \frac{(z^2+1)^k}{2^k z^k}, \quad F(z) = \frac{(z^2+1)^k}{2^k z^{k+1}(1 - z^N)}.$$

Степень числителя равна $2k$, а степень знаменателя есть $k+1+N \geqslant 2k+2$. Поэтому $\operatorname{res}_{z=\infty} F(z) = 0$. Разложим $F(z)$ в ряд Лорана в точке $z = 0$. Поскольку k нечётно и $k < N$, коэффициент при z^{-1} будет нулевым, т. е. $\operatorname{res}_{z=0} F(z) = 0$.

б) Вычислим S_{-1} с помощью теоремы 1. Имеем

$$R(z) = \frac{2z}{z^2+1}, \quad F(z) = \frac{2}{(z^2+1)(1 - z^N)},$$

так что $\operatorname{res}_{z=0} F(z) = \operatorname{res}_{z=\infty} F(z) = 0$. Кроме того,

$$\operatorname*{res}_{z=i} F(z) + \operatorname*{res}_{z=-i} F(z) = \frac{1}{i(1 - i^N)} + \frac{1}{(-i)(1 - (-i)^N)} = (-1)^{(N-1)/2}.$$

Следовательно, $S_{-1} = (-1)^{(N-1)/2} N$.

2.9. Решение 1. Применим теорему 1. В данном случае

$$R(z) = \frac{1}{i} \cdot \frac{az-1}{az+1}, \quad F(z) = \frac{1}{i} \cdot \frac{az-1}{az+1} \cdot \frac{1}{z(1 - z^N)},$$

где $a=\exp(2\theta i)$. Учитывая нечётность N, находим

$$\operatorname*{res}_{z=-1/a} F(z)=\frac{1}{i}\cdot\frac{2a^N}{a^N+1},\quad \operatorname*{res}_{z=0} F(z)=-\frac{1}{i},\quad \operatorname*{res}_{z=\infty} F(z)=0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta^j)=\frac{1}{i}\cdot\frac{2a^N}{a^N+1}-\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{a^N-1}{a^N+1}=\operatorname{tg}(N\theta).$$

Таким образом, искомая сумма равна $N\operatorname{tg}(N\theta)$.

Решение 2. *Указание.* При нечётном N справедливо тождество

$$\operatorname{tg}(Nx)=\frac{C_N^1\operatorname{tg}x-C_N^3\operatorname{tg}^3x+\ldots-(-1)^{(N+1)/2}C_N^N\operatorname{tg}^N x}{C_N^0-C_N^2\operatorname{tg}^2x+\ldots-(-1)^{(N+1)/2}C_N^{N-1}\operatorname{tg}^{N-1}x}.$$

Подставьте сюда $x=\theta+\pi j/N$ для $j=0,1,\ldots,N-1$.

Замечание. При чётном N сумма равна $-N\operatorname{ctg}(N\theta)$.

2.10. Воспользуемся теоремой 1 в её модифицированной версии. Здесь

$$R(z)=-\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2},\quad F(z)=-\frac{(z+1)^2}{z(z-1)^2(1-z^N)}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{res}_{z=0}F(z)=-1$, $\operatorname{res}_{z=\infty}F(z)=0$. Положим

$$G(z)=(z-1)^3F(z)=\frac{(z+1)^2(1-z)}{z(1-z^N)}.$$

Тогда, как показывает прямое, но несколько утомительное вычисление,

$$\operatorname*{res}_{z=1} F(z)=\frac{G''(1)}{2}=\frac{N^2+2}{3N}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1} R(\zeta^j)=\frac{N^2+2}{3N}-1=\frac{(N-1)(N-2)}{3N},$$

откуда и следует утверждение задачи.

Замечание. Как вариант, можно было бы доказать равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1}\operatorname{ctg}^2\left(\theta+\frac{\pi j}{N}\right)=N\operatorname{ctg}^2(N\theta)+\frac{N(N-1)}{\sin^2(N\theta)}$$

(что даже технически проще) и затем, перенеся $\operatorname{ctg}^2\theta$ в правую часть, перейти к пределу при $\theta\to 0$.

2.11. Применим теорему 1. Положим $a = \exp\left(-\dfrac{\pi i}{2N}\right)$, так что $\zeta = a^{-4}$ и $a^N = -i$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\sin\dfrac{\pi k(4j+1)}{2N}}{1-\cos\dfrac{\pi(4j+1)}{2N}} = R(\zeta^j), \quad \text{где} \ \ R(z) = \frac{a^{2k}-z^{2k}}{ia^{k-1}z^{k-1}(a-z)^2}.$$

Таким образом, в данном случае

$$F(z) = \frac{a^{2k}-z^{2k}}{ia^{k-1}z^k(a-z)^2(1-z^N)}.$$

Вычет в (простом!) полюсе $z = a$ находится легко: $\operatorname{res}_{z=a} F(z) = k(1+i)$. Для вычисления вычета в полюсе $z = 0$ воспользуемся рядами

$$\frac{1}{(a-z)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2z}{a^3} + \frac{3z^2}{a^4} + \ldots, \qquad \frac{1}{1-z^N} = 1 + z^N + z^{2N} + \ldots,$$

а также тем, что $k \leqslant N$. Перемножив ряды, найдём

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{z^k(a-z)^2(1-z^N)} = \frac{k}{a^{k+1}}.$$

Отсюда

$$\operatorname*{res}_{z=0} F(z) = \frac{a^{k+1}}{i} \cdot \operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{z^k(a-z)^2(1-z^N)} = \frac{a^{k+1}}{i} \cdot \frac{k}{a^{k+1}} = -ki.$$

Наконец, вычислим вычет в точке $z = \infty$. Поскольку степень числителя $F(z)$ есть $2k-1$, а степень знаменателя есть $k+1+N \geqslant 2k+1$, получим $\operatorname{res}_{z=\infty} F(z) = 0$. Таким образом,

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta^j) = k(1+i) - ki = k,$$

что и требовалось доказать.

2.12. Воспользуемся теоремой 1 при $N = 2n$. Положим $\xi = \exp\dfrac{\pi i}{2n}$, так что $\zeta = \xi^2$ и $\xi^{2n} = -1$. Удобнее сразу находить комплексную сумму

$$S = \frac{1}{4n}\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1}\frac{\exp\dfrac{\pi k(2j-1)i}{2n}}{\sin^2\dfrac{\pi(2j-1)}{4n}} =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1}\frac{\exp\dfrac{\pi k(2j-1)i}{2n}}{1-\cos\dfrac{\pi(2j-1)}{2n}} = \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1} R(\zeta^j),$$

для которой

$$R(z)=\frac{2z^{n+k+1}}{\xi^{k-1}(z-\xi)^2},\quad F(z)=\frac{2z^{n+k}}{\xi^{k-1}(z-\xi)^2(1-z^{2n})}.$$

Если $0\leqslant k\leqslant n$, то $\operatorname{res}_{z=0}F(z)=\operatorname{res}_{z=\infty}F(z)=0$. Кроме того, $\operatorname{res}_{z=\xi}F(z)=$ $=G'(\xi)=ki$, что получается непосредственным дифференцированием функции

$$G(z)=\frac{2z^{n+k}}{\xi^{k-1}(1-z^{2n})}.$$

В итоге $S=ki$, что и требовалось.

2.13. Рассмотрим рациональную функцию

$$R(z)=\frac{z^2+1}{(z^2-1)(z^l+1)},$$

к которой применим теорему 1 при $N=k$. Обозначим $\zeta_*=\exp(2\pi i/l)$. Имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}R(\zeta^j)=\operatorname*{res}_{z=1}F(z)+\operatorname*{res}_{z=-1}F(z)+\sum_{j=1}^{l-1}\operatorname*{res}_{z=-\zeta_*^j}F(z)+\operatorname*{res}_{z=0}F(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty}F(z),$$

где

$$F(z)=\frac{z^2+1}{z(z^2-1)(z^l+1)(1-z^k)}.$$

Очевидно, что $\operatorname{res}_{z=0}F(z)=-1$, $\operatorname{res}_{z=\infty}F(z)=0$. Чуть сложнее убедиться в том, что для каждого $j=1,\ldots,l-1$

$$\operatorname*{res}_{z=-\zeta_*^j}F(z)=-\frac{1}{l}R_*(\zeta_*^j),\quad\text{где}\quad R_*(z)=\frac{z^2+1}{(z^2-1)(z^k+1)}.$$

И, наконец, самое сложное вычисление:

$$\operatorname*{res}_{z=1}F(z)=\frac{k+l}{4k},\quad\operatorname*{res}_{z=-1}F(z)=\frac{k+l}{4l}$$

(из соображений симметрии достаточно получить только первое равенство). Итак,

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}R(\zeta^j)=\frac{k+l}{4k}+\frac{k+l}{4l}-\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l-1}R_*(\zeta_*^j)-1,$$

что можно переписать в виде

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}R(\zeta^j)+\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l-1}R_*(\zeta_*^j)=\frac{(k-l)^2}{4kl}.$$

Осталось домножить это равенство на $-2kl$ и взять вещественную часть. Читателю рекомендуется аккуратно проверить всё, что касается вычисления вычетов функции $F(z)$.

Замечание 1. Если взять

$$R(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z^l-1)},$$

то аналогичным образом возникнет тождество

$$l\sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{ctg}\frac{\pi j}{k}\operatorname{ctg}\frac{l\pi j}{k} + k\sum_{j=1}^{l-1} \operatorname{ctg}\frac{\pi j}{l}\operatorname{ctg}\frac{k\pi j}{l} = \frac{k^2+l^2+1}{3} - kl, \tag{3.3}$$

где k, l — любые взаимно простые натуральные числа. С помощью тождества (3.3) можно доказать теорему взаимности для так называемых *сумм Дедекинда* (см., например, статью [23], а также § 3.7 в книге [16])

$$s(l,k) = \sum_{r=0}^{k-1} \rho\Big(\frac{r}{k}\Big)\rho\Big(\frac{lr}{k}\Big),$$

где функция $\rho(x)$ вещественного аргумента x определена следующим образом:

$$\rho(x) = \begin{cases} \{x\} - \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(здесь $\{x\}$ — дробная часть x). Для этого нужно предварительно установить равенство

$$s(l,k) = \frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{ctg}\frac{\pi j}{k}\operatorname{ctg}\frac{l\pi j}{k}, \tag{3.4}$$

где k, l предполагаются взаимно простыми. Равенство (3.4), в свою очередь, доказывается на основе представления

$$\rho\Big(\frac{r}{k}\Big) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\Big(\frac{1}{1-\zeta^j} - \frac{1}{2}\Big)\zeta^{rj}, \quad \zeta = \exp\Big(\frac{2\pi i}{k}\Big),$$

которое легко проверить, применив теорему 1 при $N = k$ к рациональной функции $R(z) = z^r/(1-z)$ (подробный вывод равенства (3.4) см. в [23]).

Замечание 2. Можно предложить такой рецепт получения подобных теорем взаимности для тригонометрических сумм: применять теорему 1 при $N = k$ к рациональной функции $R(z) = h(z)/(z^l \pm 1)$, где $h(z)$ — какая-нибудь фиксированная рациональная функция. Конкретные примеры теорем взаимности читатель может найти в статье [18].

2.14. Пусть $\xi = \exp(\pi i/N)$ и $\zeta = \xi^2 = \exp(2\pi i/N)$. Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{\pi j}{N} = -2\operatorname{Im}\frac{1}{\zeta^j+1}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi j}{N} = -2\operatorname{Im}\frac{1}{\zeta^j-1}.$$

Решение 1. Нам понадобится следующий аналог равенства (1.2):

$$\sum_{j=0}^{N-1} j\zeta^{kj} = \begin{cases} \dfrac{N}{\zeta^k-1}, & \text{если } k \not\equiv 0 \pmod N, \\ \dfrac{N(N-1)}{2}, & \text{если } k \equiv 0 \pmod N. \end{cases} \tag{3.5}$$

Вычислим сумму $\sum_{j=0}^{N-1} \frac{j}{r\zeta^j+1}$, где $|r|<1$, используя разложение в ряд

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k.$$

Имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{j}{r\zeta^j+1} = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{\infty} j(-1)^k r^k \zeta^{kj} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^k \sum_{j=0}^{N-1} j\zeta^{kj}.$$

Пусть $k = Nl + j$, где $l \geqslant 0$ и $0 \leqslant j \leqslant N-1$. С помощью (3.5) находим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^k \sum_{j=0}^{N-1} j\zeta^{kj} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{Nl} r^{Nl}\frac{N(N-1)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{Nl+j} r^{Nl+j}\frac{N}{\zeta^j-1} =$$
$$= \frac{1}{r^N+1}\left(\frac{N(N-1)}{2} + N\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j r^j}{\zeta^j-1}\right).$$

Отсюда при $r \to 1$ вытекает равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{j}{\zeta^j+1} = \frac{N(N-1)}{4} + \frac{N}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j}{\zeta^j-1}. \tag{3.6}$$

Осталось перейти к мнимым частям.

Решение 2. Сначала докажем тождество

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{q^j}{\zeta^j+1} = \frac{q^N-1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(-1)^j}{q\zeta^j-1}. \tag{3.7}$$

Действительно, имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{q^j}{r\zeta^j+1} = \sum_{j=0}^{N-1} q^j \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^k \zeta^{kj} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^k \sum_{j=0}^{N-1}(q\zeta^k)^j = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^k \frac{q^N-1}{q\zeta^k-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{Nl+j} r^{Nl+j}\frac{q^N-1}{q\zeta^j-1} = \frac{q^N-1}{r^N+1}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(-1)^j r^j}{q\zeta^j-1}.$$

Теперь тождество (3.7) получается предельным переходом при $r \to 1$.

Далее можно получить равенство (3.6), для чего нужно продифференцировать тождество (3.7) по q и затем перейти к пределу при $q \to 1$.

Решение 3. Здесь мы опираемся на такой аналог равенства (1.2):

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^{kj} = \begin{cases} \dfrac{1-(-1)^k}{1-\xi^k}, & \text{если } k \not\equiv 0 \pmod{2N}, \\ N, & \text{если } k \equiv 0 \pmod{2N}. \end{cases}$$

Как следствие, при нечётном N имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{N-1} \xi^{(N+2k)j} = \frac{1+\xi^{N+2k}}{1-\xi^{N+2k}} = \frac{1-\zeta^k}{1+\zeta^k}.$$

Будем вычислять сумму

$$\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j}{\zeta^j-1} = \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\xi^{Nj}}{\xi^{2j}-1}.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\xi^{Nj}}{(r\xi^j)^2-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}\sum_{j=1}^{N-1}\xi^{(N+2k)j} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}\frac{\zeta^k-1}{\zeta^k+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{\infty} r^{2Nl+2j}\frac{\zeta^j-1}{\zeta^j+1} = \frac{1}{1-r^{2N}}\sum_{j=0}^{N-1} r^{2j}\frac{\zeta^j-1}{\zeta^j+1}.$$

Теперь с помощью *правила Лопиталя* при $r \to 1$ получим

$$\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(-1)^j}{\zeta^j-1} = -\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} j\frac{\zeta^j-1}{\zeta^j+1} = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{j}{\zeta^j+1} - \frac{N-1}{2},$$

что эквивалентно равенству (3.6).

Замечание. Ещё один вариант доказанного равенства выглядит так:

$$\sum_{j=0}^{N-1} j^2 \operatorname{tg} \frac{\pi j}{N} = \frac{N^2}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j \operatorname{ctg} \frac{\pi j}{N}.$$

2.15–2.17. *Указание.* Данные произведения равны

$$\frac{(-1)^{N-1}}{2^{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} (\zeta^j - 1), \quad (-1)^{(N-1)/2} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{\zeta^j - 1}{\zeta^j + 1}, \quad \prod_{j=1}^{N-1} (2\zeta^j - 1)(\zeta^j - 2)$$

соответственно, где $\zeta = \exp(2\pi i/N)$.

§ 4. Вариации и обобщения

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые другие типы тригонометрических сумм.

Суммы первого типа отличаются от стандартных сумм (0.1) тем, что суммирование происходит только по тем $j = 0, 1, \ldots, N-1$, которые взаимно просты с N.

В суммах второго типа суммирование распространяется на все $j = 0, 1, \ldots, N-1$, но j-е слагаемое содержит дополнительный множитель, зависящий от (j, N) — наибольшего общего делителя чисел j и N.

Суммы третьего типа аналогичны классическим квадратичным суммам Гаусса. Мы дополнительно будем считать, что $N = p > 2$ — простое число.

4.1. Суммирование по приведённой системе вычетов

В стандартной тригонометрической сумме (0.1) суммирование происходит по *полной системе вычетов* $Z_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ по модулю N. Можно взять в качестве области суммирования *приведённую систему вычетов* по модулю N:

$$Z_N^* = \{j \in Z_N : (j, N) = 1\}.$$

Пусть, как и выше, $\zeta = \exp(2\pi i/N)$. Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$S^*(N) = \sum_{j \in Z_N^*} R(\zeta^j), \tag{4.1}$$

число слагаемых в которой равно $\varphi(N)$. Легко видеть, что

$$S(N) = \sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta^j) = \sum_{d|N} \sum_{j' \in Z_{N/d}^*} R(\zeta_d^{j'}) = \sum_{d|N} S^*\left(\frac{N}{d}\right) = \sum_{d|N} S^*(d), \tag{4.2}$$

где $\zeta_d = \zeta^d$ есть первообразный корень из единицы степени N/d. Полученное соотношение можно использовать для вычисления суммы $S^*(N)$.

Действительно, непосредственное применение формулы обращения Мёбиуса (см., например, § 3.2 в книге [9]) даёт

$$S^*(N) = \sum_{d|N} \mu(d) S\Big(\frac{N}{d}\Big). \tag{4.3}$$

Таким образом, значения специальной суммы (4.1) могут быть выражены через значения стандартной суммы (0.1). Отметим, что формулу (4.3) можно также получить с помощью хорошо известного из комбинаторики *принципа включений — исключений* (см., например, по ссылке [30]).

Правая часть в равенстве (4.3) допускает дальнейшее упрощение, если функция $S(N)$ мультипликативна, т. е. выполняется равенство

$$S(N_1 N_2) = S(N_1) S(N_2) \tag{4.4}$$

при условии $(N_1, N_2) = 1$. В этом случае функция $S^*(N)$ также будет мультипликативной (как свёртка Дирихле двух мультипликативных функций). Для $N = p^\alpha$, где p — простое число, имеем

$$\sum_{d|N} \mu(d) S\Big(\frac{N}{d}\Big) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \mu(p^\beta) S(p^{\alpha-\beta}) = S(p^\alpha) - S(p^{\alpha-1}).$$

Следовательно, если

$$N = \prod_{p|N} p^\alpha \tag{4.5}$$

— *каноническое разложение* числа N, то

$$S^*(N) = \prod_{p|N} (S(p^\alpha) - S(p^{\alpha-1})).$$

Более того, если функция $S(N)$ *вполне мультипликативна* (равенство (4.4) верно для любых N_1 и N_2), то предыдущая формула упрощается до

$$S^*(N) = S(N) \prod_{p|N} \Big(1 - \frac{1}{S(p)}\Big)$$

(в предположении, что $S(p) \neq 0$ для любого простого числа p).

В качестве примера вычислим сумму

$$S^*(N) = \sum_{j \in Z_N^*} \frac{1}{\cos^2 \dfrac{\pi j}{N}}, \tag{4.6}$$

где N нечётно. Так как в данном случае $S(N)=N^2$ (см. решение задачи 1.1) и эта функция вполне мультипликативна, то сразу получим

$$S^*(N) = N^2 \prod_{p|N}\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\Bigr). \tag{4.7}$$

Способ решения задачи 1.1 через разложения в ряды подсказывает альтернативный путь получения формулы (4.7), но здесь необходим аналог равенства (1.2) для суммы

$$c_N(k) = \sum_{j\,\in\,Z_N^*} \zeta^{kj},$$

которая известна как *сумма Рамануджана*. В частности, имеем

$$c_N(0) = \varphi(N), \quad c_N(1) = \mu(N).$$

Первая из этих формул очевидна по определению. Для доказательства второй заметим, что при любом k сумма Рамануджана $c_N(k)$ является мультипликативной функцией от N (потому что такова правая часть равенства (1.2) как функция от N). Поэтому $c_N(k)$ можно находить по общему правилу, описанному выше. В случае $k=1$ мы таким способом легко получим вторую из формул. Общую формулу

$$c_N(k) = \frac{\varphi(N)\mu(N/(k,N))}{\varphi(N/(k,N))}$$

читателю предлагается вывести, опираясь на формулу для $c_N(1)$. Суммы Рамануджана $c_N(k)$ имеют важные приложения в теории чисел и поэтому представляют самостоятельный интерес (см. оригинальную статью [26], а также § A.7 в книге [24]).

Если для некоторой суммы (0.1) имеет место равенство $S(N)=N^a$, то для соответствующей суммы (4.1) будем иметь $S^*(N)=J_a(N)$, где

$$J_a(N) = N^a \prod_{p|N}\Bigl(1-\frac{1}{p^a}\Bigr)$$

— так называемые *функции Жордана* (см., например, упр. 17 на с. 48 книги [15]). В частности, $J_1(N)$ — это функция Эйлера $\varphi(N)$. Читателю предлагается убедиться, что для $a=1$ и каждого чётного $a\geqslant 2$ существует рациональная функция $R_a(z)$, для которой

$$\sum_{j=0}^{N-1} R_a(\zeta^j) = N^a. \tag{4.8}$$

Например:

$$R_1(z)=\frac{2}{z+1}, \quad R_2(z)=\frac{4z}{(z+1)^2}, \quad R_4(z) = -\frac{8z(z^2-4z+1)}{(z+1)^4} \quad \text{и т. д.}$$

Ещё один способ получения формулы (4.7) таков. Многочлен

$$\prod_{j\,\in\,Z_N^*}(z-\zeta^j)=\Phi_N(z)$$

называется *круговым многочленом* порядка N (см., например, § 13 в книге [11]). С помощью формулы обращения Мёбиуса круговой многочлен может быть записан в виде явной рациональной дроби с целыми коэффициентами:

$$\Phi_N(z)=\prod_{d|N}(z^{N/d}-1)^{\mu(d)}. \tag{4.9}$$

Следовательно,

$$\sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{1}{z-\zeta^j}=\frac{\Phi_N'(z)}{\Phi_N(z)},\quad \sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{1}{(z-\zeta^j)^2}=-\Big[\frac{\Phi_N'(z)}{\Phi_N(z)}\Big]'.$$

Из представления (4.9) следует, что

$$\frac{\Phi_N'(z)}{\Phi_N(z)}=N\sum_{d|N}\frac{\mu(d)}{d}\cdot\frac{z^{N/d-1}}{z^{N/d}-1}. \tag{4.10}$$

При $z=-1$ и нечётном N правая часть последнего равенства равна

$$-\frac{1}{2}\cdot N\sum_{d|N}\frac{\mu(d)}{d}=-\frac{1}{2}\cdot N\prod_{p|N}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=-\frac{1}{2}\cdot J_1(N).$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{1}{1+\zeta^j}=\frac{J_1(N)}{2}.$$

Далее, опираясь на равенство

$$N^a\sum_{d|N}\frac{\mu(d)}{d^a}=J_a(N),$$

аналогично можно показать, что

$$\sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{1}{(1+\zeta^j)^2}=-\frac{J_2(N)}{4}+\frac{J_1(N)}{2}$$

и, вообще, для любого натурального s сумма $\sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{1}{(1+\zeta^j)^s}$ есть линейная комбинация функций Жордана $J_1(N)$ и $J_a(N)$ с чётными $a\leqslant s$. В итоге

$$S^*(N)=\sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{4\zeta^j}{(1+\zeta^j)^2}=4\sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{1}{1+\zeta^j}-4\sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{1}{(1+\zeta^j)^2}=J_2(N),$$

как и ожидалось. Читателю предлагается доказать, что для любого натурального s аналогичная сумма $\sum_{j\,\in\,Z_N^*}\frac{1}{(1-\zeta^j)^s}$ также будет линейной комбинацией функций

Жордана $J_1(N)$ и $J_a(N)$ с чётными $a \leqslant s$ (теперь N — любое натуральное число, большее единицы)[6]. Так, например, имеем

$$\sum_{j \in Z_N^*} \frac{1}{1-\zeta^j} = \frac{J_1(N)}{2}, \quad \sum_{j \in Z_N^*} \frac{1}{(1-\zeta^j)^2} = -\frac{J_2(N)}{12} + \frac{J_1(N)}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Полученные формулы для сумм (4.1) (в частности, формула (4.7) для суммы (4.6)) окажутся полезными при вычислении тригонометрических сумм ещё одного класса.

4.2. Суммы с наибольшими общими делителями

Одним из обобщений стандартных сумм (0.1) являются суммы вида

$$S^{**}(N) = \sum_{j=0}^{N-1} D((j,N))R(\zeta^j),$$

где $D(N)$ — какая-нибудь арифметическая функция. Очевидным образом модифицируя цепочку равенств (4.2), получим следующую формулу:

$$S^{**}(N) = \sum_{d|N} S^*(d)D\Big(\frac{N}{d}\Big), \tag{4.11}$$

где $S^*(N)$ — сумма (4.1). При наличии дополнительных свойств (типа мультипликативности) у функций $S^*(N)$ и $D(N)$ формула (4.11) допускает дальнейшее упрощение в том же стиле, что и формула (4.3). Не вдаваясь в подробности, рассмотрим конкретный пример, а именно сумму

$$S^{**}(N) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(j,N)}{\cos^2 \dfrac{\pi j}{N}}, \tag{4.12}$$

где N нечётно (см. [25]). В данном случае $D(N)=N$, $S^*(N)=J_2(N)$ (см. формулу (4.7)). Поскольку обе функции мультипликативны, такой же будет и функция $S^{**}(N)$. Это позволяет стандартным способом получить следующую формулу для суммы (4.12) (в терминах канонического разложения (4.5) числа N):

$$S^{**}(N) = N\sum_{d|N} \frac{J_2(d)}{d} = N\prod_{p|N}\Big(p^\alpha + p^{\alpha-1} - \frac{1}{p}\Big). \tag{4.13}$$

В частности, из формулы (4.13) следует, что сумма (4.12) всегда есть целое число.

---

[6] Для начала нужно ответить на вопрос: как подставить $z=1$ в правую часть равенства (4.10)?

Как второй пример рассмотрим сумму

$$S^{**}(N) = \sum_{j=0}^{N-1} (j, N)\zeta^{kj} = N \sum_{d|N} \frac{c_d(k)}{d}.$$

Здесь также возможны дальнейшие упрощения. Например, при $k = 1$ имеем

$$N \sum_{d|N} \frac{c_d(1)}{d} = N \sum_{d|N} \frac{\mu(d)}{d} = \varphi(N).$$

Фактически речь идёт о вычислении *дискретного преобразования Фурье* для последовательности (j, N) при $j = 0, 1, \ldots, N-1$ (подробности см. в [27]).

И ещё один пример: формула

$$\sum_{j=0}^{N-1} (j, N) R_a(\zeta^j) = N \sum_{d|N} \frac{J_a(d)}{d}, \tag{4.14}$$

где N нечётно, а рациональные функции $R_a(z)$ удовлетворяют условию (4.8). Читателю предлагается упростить правую часть равенства (4.14), а также обобщить результаты на случай степенной функции $D(N) = N^b$ или какой-нибудь другой мультипликативной функции.

4.3. Суммы Гаусса и их аналоги

В этом разделе пусть $N = p > 2$ — простое число. Сумма вида

$$g_a(p) = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta^{aj},$$

где $a \in \mathbb{Z}$, называется *суммой Гаусса*[7]. Здесь $\zeta = \exp(2\pi i/p)$, а $\left(\frac{j}{p}\right)$ обозначает *символ Лежандра*: если $j \equiv 0 \pmod p$, то $\left(\frac{j}{p}\right) = 0$, иначе

$$\left(\frac{j}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если сравнение } x^2 \equiv j \pmod p \text{ разрешимо,} \\ -1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(см. любой учебник по элементарной теории чисел, например [9]).

Пусть для краткости $g_1(p) = g(p)$. Легко показать, что

$$g_a(p) = \left(\frac{a}{p}\right) g(p),$$

[7] Точнее, квадратичной суммой Гаусса. Детальное изложение основных фактов о квадратичных суммах Гаусса имеется, например, в главе 6 книги [1]. Существует естественный аналог сумм Гаусса для *конечных полей*, о чём можно прочитать в книге [17].

а также дать другое представление суммы Гаусса при $a \not\equiv 0 \pmod p$:

$$g_a(p) = \sum_{j=0}^{p-1} \zeta^{aj^2}.$$

Гораздо труднее вычислить сумму $g(p)$. Точнее, нетрудно установить равенство

$$g^2(p) = (-1)^{(p-1)/2} p,$$

откуда $g(p) = \pm\sqrt{p}$ или $g(p) = \pm i\sqrt{p}$, но настоящую проблему составляет отыскание *знака* суммы $g(p)$. На самом деле, как доказал сам Гаусс,

$$g(p) = \begin{cases} \sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 4, \\ i\sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 3 \pmod 4). \end{cases} \tag{4.15}$$

Различные доказательства этого факта и его обобщений можно найти в книгах [1, 3, 7, 15, 17] (см. также серию задач на с. 22–24 книги [13]).

Приведём самое, на наш взгляд, элементарное доказательство, которое принадлежит Кронекеру (см. [1, с. 95–98]). Воспользуемся равенством

$$\prod_{l=1}^{(p-1)/2} (\zeta^{2l-1} - \zeta^{-2l+1}) = \begin{cases} \sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 4, \\ i\sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 3 \pmod 4), \end{cases}$$

которое является другой записью равенства (1.7) при $N = p$ (см. задачу 1.2). Из сказанного выше про $g(p)$ следует, что

$$g(p) = \varepsilon \prod_{l=1}^{(p-1)/2} (\zeta^{2l-1} - \zeta^{-2l+1}), \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1.$$

Нужно доказать, что всегда $\varepsilon = 1$. Для этого рассмотрим многочлен

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) x^j - \varepsilon \prod_{l=1}^{(p-1)/2} (x^{2l-1} - x^{p-2l+1}).$$

Понятно, что многочлен $f(x)$ имеет целые коэффициенты, при этом $f(1) = f(\zeta) = 0$. Как известно, круговой многочлен

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + \ldots + x + 1$$

неприводим[8] над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Значит, $f(x)$ должен делиться на произведение $(x-1)\Phi_p(x) = x^p - 1$, т. е. $f(x) = (x^p - 1)g(x)$ для некоторого

[8] Это верно для любого кругового многочлена $\Phi_N(x)$, но в случае когда $N = p$ — простое число, утверждение о неприводимости нетрудно доказывается с помощью хорошо известного *критерия Эйзенштейна* (см., например, § 6.2 в книге [11]).

многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами. Сделаем здесь замену переменной $x = 1 + t$ и посмотрим на коэффициент при $t^{(p-1)/2}$ слева и справа. Слева он равен

$$\sum_{j=0}^{p-1}\Big(\frac{j}{p}\Big)C_j^{(p-1)/2} - \varepsilon\prod_{l=1}^{(p-1)/2}(4l-2-p),$$

а справа он делится на p (из-за множителя $(1+t)^p-1$, все коэффициенты которого, за исключением старшего, кратны p). Как следствие,

$$\sum_{j=0}^{p-1}\Big(\frac{j}{p}\Big)C_j^{q} \equiv \varepsilon\prod_{l=1}^{q}(4l-2)\ (\mathrm{mod}\ p), \tag{4.16}$$

где для удобства записи введено обозначение $q = (p-1)/2$. Имеем

$$q!C_j^q = j(j-1)\dots(j-q+1) = j^q + a_{q-1}j^{q-1} + \dots + a_1 j,$$
$$q!\prod_{l=1}^{q}(4l-2) = (p-1)!.$$

По *теореме Эйлера* $\Big(\frac{j}{p}\Big) \equiv j^q\ (\mathrm{mod}\ p)$, а по *теореме Вильсона* $(p-1)! \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p)$. Следовательно, сравнение (4.16) после домножения на $q!$ приводится к виду

$$\sum_{j=0}^{p-1}(j^{2q} + a_{q-1}j^{2q-1} + \dots + a_1 j^{q+1}) \equiv -\varepsilon \quad (\mathrm{mod}\ p). \tag{4.17}$$

Наконец, заметим, что

$$\sum_{j=0}^{p-1} j^{2q-1} \equiv \dots \equiv \sum_{j=0}^{p-1} j^{q+1} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),$$
$$\sum_{j=0}^{p-1} j^{2q} = \sum_{j=0}^{p-1} j^{p-1} \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p)$$

(в справедливости этих сравнений легко убедиться, если воспользоваться цикличностью группы ненулевых классов вычетов по модулю p). В итоге сравнение (4.17) сводится к сравнению $-1 \equiv -\varepsilon\ \ (\mathrm{mod}\ p)$, откуда и следует, что $\varepsilon = 1$.

Используя классический результат (4.15), докажем равенство

$$\sum_{j=0}^{p-1}\mathrm{tg}\,\frac{\pi j^2}{p} = \begin{cases} 0, & \text{если } p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4),\\ -(-1)^{(p^2-1)/8}2\sigma_0(p)\sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4),\end{cases} \tag{4.18}$$

где

$$\sigma_0(p) = \sum_{b=1}^{(p-1)/2}\Big(\frac{b}{p}\Big).$$

Для этого будем вычислять сумму

$$S^{\dagger}(p)=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{1+\zeta^{j^2}}$$

методом разложения в ряд. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{1+r\zeta^{j^2}}&=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^k\zeta^{kj^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^k\sum_{j=0}^{p-1}\zeta^{kj^2}=\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{a=0}^{p-1}(-1)^{pl+a}r^{pl+a}\sum_{j=0}^{p-1}\zeta^{(pl+a)j^2}=\\&=\frac{p}{1+r^p}+\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l r^{pl}\sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a r^a\sum_{j=0}^{p-1}\zeta^{aj^2}=\\&=\frac{p}{1+r^p}+\frac{g(p)}{1+r^p}\sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a r^a\left(\frac{a}{p}\right).\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $r\to 1$, получим

$$S^{\dagger}(p)=\frac{p}{2}+\frac{g(p)}{2}\sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a\left(\frac{a}{p}\right).$$

Преобразуем сумму в правой части полученного равенства:

$$\sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a\left(\frac{a}{p}\right)=\sum_{b=1}^{(p-1)/2}\left(\frac{2b}{p}\right)-\sum_{b=1}^{(p-1)/2}\left(\frac{p-2b}{p}\right)=\left(\frac{2}{p}\right)\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right)\sigma_0(p).$$

Напомним, что

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2},\qquad \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}.$$

В частности, если $p\equiv 1 \pmod 4$, то

$$\sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a\left(\frac{a}{p}\right)=0.$$

Более того, в этом случае имеем

$$0=\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right)=\sum_{b=1}^{(p-1)/2}\left(\frac{b}{p}\right)+\sum_{b=1}^{(p-1)/2}\left(\frac{p-b}{p}\right)=\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)\sigma_0(p)=2\sigma_0(p),$$

откуда $\sigma_0(p)=0$. Как следствие, $S^{\dagger}(p)=p/2$ при $p\equiv 1 \pmod 4$.

Если же $p \equiv 3 \pmod 4$, то

$$S^{\dagger}(p) = \frac{p}{2} + i(-1)^{(p^2-1)/8}\sigma_0(p)\sqrt{p}.$$

Теперь для получения (4.18) достаточно заметить, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi j^2}{p} = -2\operatorname{Im}\frac{1}{1+\zeta^{j^2}}$$

для каждого $j = 0, 1, \ldots, p-1$, и просуммировать эти равенства.

Ещё один похожий, но технически более сложный пример — это равенство

$$\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{\cos^2\dfrac{\pi j^2}{p}} = \begin{cases} p^2 - (-1)^{(p^2-1)/8}8\sigma_1(p)\sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 4,\\ p^2, & \text{если } p \equiv 3 \pmod 4,\end{cases} \tag{4.19}$$

где

$$\sigma_1(p) = \sum_{b=1}^{(p-1)/2} b\Big(\frac{b}{p}\Big).$$

Для доказательства сумму в (4.19) нужно записать в виде

$$S^{\ddagger}(p) = \sum_{j=0}^{p-1}\frac{4\zeta^{j^2}}{(1+\zeta^{j^2})^2},$$

после чего аналогичным образом получить формулу

$$S^{\ddagger}(p) = p^2 - g(p)\Big(1 + \Big(\frac{-1}{p}\Big)\Big)\sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a a\Big(\frac{a}{p}\Big).$$

Результат дальнейших преобразований таков:

$$\sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a a\Big(\frac{a}{p}\Big) = 2\Big(\frac{2}{p}\Big)\Big(1 + \Big(\frac{-1}{p}\Big)\Big)\sigma_1(p) - p\Big(\frac{-1}{p}\Big)\Big(\frac{2}{p}\Big)\sigma_0(p).$$

Кроме того, если вычислять сумму

$$\sum_{a=1}^{p-1} a\Big(\frac{a}{p}\Big)$$

двумя способами, то можно получить равенство

$$\Big(1 - \Big(\frac{-1}{p}\Big)\Big)\sigma_1(p) + p\Big(\frac{-1}{p}\Big)\sigma_0(p) = 2\Big(\Big(\frac{2}{p}\Big) - \Big(\frac{-2}{p}\Big)\Big)\sigma_1(p) + p\Big(\frac{-2}{p}\Big)\sigma_0(p).$$

При $p \equiv 1 \pmod 4$ оно оказывается тривиальным, а при $p \equiv 3 \pmod 4$ позволяет выразить $\sigma_1(p)$ через $\sigma_0(p)$:

$$\sigma_1(p) = \begin{cases} \dfrac{p\sigma_0(p)}{3}, & \text{если } p \equiv 3 \pmod 8, \\ 0, & \text{если } p \equiv 7 \pmod 8). \end{cases}$$

Читателю предлагается восстановить детали этих рассуждений.

Впрочем, лучше рассуждать так. Полученное нами для $|r| < 1$ равенство

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{1 + r\zeta^{j^2}} = \frac{p}{1 + r^p} + \frac{g(p)}{1 + r^p} \sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a r^a \left(\frac{a}{p}\right)$$

можно истолковать как равенство рациональных дробей от r (т. е. как тождество). Подставляя сюда $r = -1/z$ и затем сокращая на z, получим

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{z - \zeta^{j^2}} = \frac{D_p(z)}{z^p - 1}, \tag{4.20}$$

где введено обозначение

$$D_p(z) = pz^{p-1} + g(p) \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) z^{p-a-1}.$$

Далее тождеством (4.20) можно распорядиться стандартным образом — начать дифференцировать по z и подставлять $z = \pm 1$ с целью вычислить суммы вида

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{(1 + \zeta^{j^2})^s}, \quad \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{(1 - \zeta^{j^2})^s},$$

где s — любое натуральное число. Вот третий пример (в дополнение к примерам (4.18) и (4.19)), который можно обнаружить на этом пути:

$$\sum_{j=1}^{p-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi j^2}{p} = \begin{cases} 0, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 4, \\ \dfrac{2\sigma_0(p)}{3\sqrt{p}}, & \text{если } p \equiv 3 \pmod 8, \\ 2\sigma_0(p)\sqrt{p}, & \text{если } p \equiv 7 \pmod 8. \end{cases}$$

Доказательство предоставляется читателю в качестве очередного упражнения.

Целые числа $\sigma_0(p)$ при $p > 3$ и $p \equiv 3 \pmod 4$ имеют весьма нетривиальный смысл (см. теорему 4 на с. 383 книги [3]): если h — число классов дивизоров мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$, то

$$h = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0(p)}{3}, & \text{если } p \equiv 3 \pmod 8, \\ \sigma_0(p), & \text{если } p \equiv 7 \pmod 8). \end{cases} \tag{4.21}$$

Как следствие, имеем $\sigma_0(p) > 0$ для всех $p \equiv 3 \pmod 4$. Интересно отметить, что элементарное доказательство этого неравенства (не апеллирующее к равенству (4.21)), по-видимому, ещё не найдено. Относительно недавно[9)] последовательность $\sigma_0(p)$ (где p пробегает ряд нечётных простых чисел) была зарегистрирована на хорошо известном сайте OEIS [28]. Что касается последовательности целых чисел $\sigma_1(p)$, то на данный момент запись об этой последовательности на сайте OEIS отсутствует.

Впечатляющее количество примеров тригонометрических тождеств типа (4.18) и (4.19) имеется в статье [19].

Список литературы

[1] *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.

[2] *Андреев Н. Н., Юдин В. А.* Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены и кубатурные формулы чебышевского типа // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 45–57.

[3] *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2017.

[5] *Гашков С.* Задача Чебышёва и тригонометрические многочлены // Квант. 1990. №6. С. 25–27.

[6] *Гашков С. Б.* Неравенство Бернштейна, тождество Рисса и формула Эйлера для ряда обратных квадратов // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 143–171.

[7] *Дэвенпорт Г.* Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.

[8] Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М. А. Евграфова. М.: Наука, 1972.

[9] *Нестеренко Ю. В.* Теория чисел. М.: Academia, 2008.

[10] *Понарин Я. П.* Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: МЦНМО, 2014.

[11] *Прасолов В. В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2014.

[12] *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

[13] *Степанов С. А.* Арифметика алгебраических кривых. М.: Наука, 1991.

[14] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. Планиметрия. 9–11 кл.: От учебной задачи к творческой: Пособие для учащихся. М.: Дрофа, 2001.

[15] *Apostol T. M.* Introduction to analytic number theory. Springer, 1976.

[16] *Apostol T. M.* Modular functions and Dirichlet series in number theory. Springer, 1990.

[9)] Для сравнения отметим, что тождество (4.18) было открыто В. Лебегом в 1850 году.

[17] *Berndt B. C., Evans R. J., Williams K. S.* Gauss and Jacobi sums. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998. (Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts).

[18] *Berndt B. C., Yeap B. P.* Explicit evaluations and reciprocity theorems for finite trigonometric sums // Adv. in Appl. Math. 2002. Vol. 29, № 3. P. 358–385.

[19] *Berndt B. C., Zaharescu A.* Finite trigonometric sums and class numbers // Math. Ann. 2004. Vol. 330, № 4. P. 551–575.

[20] *Chamberland M.* Finite trigonometric product and sum identities // Fibonacci Quart. 2012. Vol. 50, № 3. P. 217–221.

[21] *Cohen E.* Trigonometric sums in elementary number theory // Amer. Math. Monthly. 1959. Vol. 66. P. 105–117.

[22] *da Fonseca C. M., Kowalenko V.* On a finite sum with powers of cosines // Appl. Anal. Discrete Math. 2013. Vol. 7. P. 354–377.

[23] *Grosswald E.* Dedekind — Rademacher sums // Amer. Math. Monthly. 1971. Vol. 78. P. 639–644.

[24] *Nathanson M. B.* Additive number theory: the classical bases. New York: Springer-Verlag, 1996. (Graduate Texts in Math.; Vol. 165).

[25] *Osipov N. N.* Problem 12003 // Amer. Math. Monthly. 2017. Vol. 124, № 8. P. 754.

[26] *Ramanujan S.* On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers [Trans. Cambridge Philos. Soc. 1918. Vol. 22, № 13. P. 259–276] // Collected papers of Srinivasa Ramanujan. Providence, RI: AMS Chelsea Publ., 2000. P. 179–199.

[27] *Schramm W.* The Fourier transform of functions of the greatest common divisor // Integers. 2008. Vol. 8. # A50.

[28] http://oeis.org/A178153

[29] https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic_function

[30] https://en.wikipedia.org/wiki/Inclusion-exclusion_principle

Николай Николаевич Осипов,
Сибирский федеральный университет, Красноярск
nnosipov@rambler.ru