Нам пишут

Простое доказательство изопериметрической теоремы

В этом письме приводятся чёткая формулировка и короткое доказательство основного результата работы [1] Е. И. Алексеевой (см. ниже), а также проясняется его связь с изопериметрической теоремой для плоскости Лобачевского. Доказательство по сути не отличается от приведённого в [1]. Однако ввиду красоты и важности результата короткое доказательство, освобождённое от ненужных деталей, может быть интересно читателю.

Теорема 1 [1]. *На плоскости Лобачевского среди треугольников ABC с заданными длинами двух сторон AB и AC максимальную площадь имеет тот, у которого угол A равен сумме углов B и C.*

Изопериметрическая теорема для плоскости Лобачевского утверждает, что среди фигур данной площади, ограниченных спрямляемыми кривыми, наибольший периметр имеет круг. Эта теорема и её многомерные аналоги давно и хорошо известны [4]. Классическому рассуждению Я. Штейнера об изопериметрах (см., например, [2, с. 19–22] или [3, с. 30–31]) недостаёт именно теоремы 1, чтобы оно стало доказательством изопериметрической теоремы для плоскости Лобачевского. Действительно, в рассуждении

Это письмо составлено из отзывов В. О. Бугаенко и О. В. Шварцмана на работу [1], которые были переданы Е. И. Алексеевой в 2009 г. для улучшения этой работы, представленной на Московскую математическую конференцию школьников, см. www.mccme.ru/mmks. (Хотя рецензирование на ММКШ анонимное, рецензенты любезно согласились на публикацию настоящего письма с их именами.)

Штейнера в силу этой теоремы нужно рассматривать треугольники ABC с равенством $\angle A = \angle B + \angle C$. Это равенство означает, что на отрезке BC имеется точка D, для которой $\angle BAD = \angle B$, $\angle CAD = \angle C$, что эквивалентно равенствам $DB = DA = DC$. Таким образом, точка A лежит на окружности с диаметром BC, а это и требуется в рассуждении Штейнера. Поэтому мы не исключаем, что теорема 1 была известна специалистам или любителям элементарной математики, хотя никаких ссылок найти не удалось.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через α, β, γ углы треугольника ABC. Воспользуемся моделью Пуанкаре в круге. Вершину A поместим в центр модели. Рассмотрим евклидову окружность ω и евклидову прямую, содержащие гиперболические прямые BC и AB соответственно. Они пересекаются в двух точках B и B' (рис. 1).

Докажем, что *площадь гиперболического треугольника ABC равна удвоенной величине евклидова угла $AB'C$,* который мы обозначим через τ. Действительно, угол между хордой BC и окружностью ω также равен τ, поскольку угол между хордой и касательной равен соответствующему вписанному углу. Так как сумма углов евклидова треугольника ABC равна $\alpha + \beta + \gamma + 2\tau = \pi$, имеем $S(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 2\tau$.

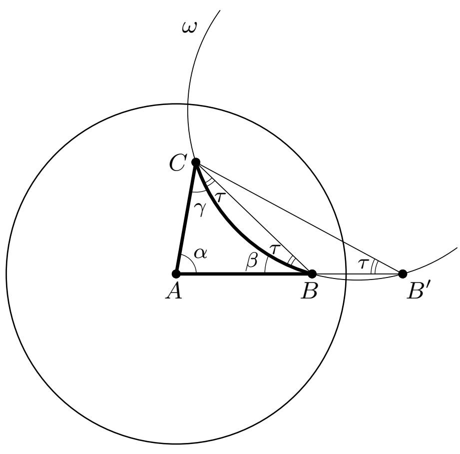

Рис. 1

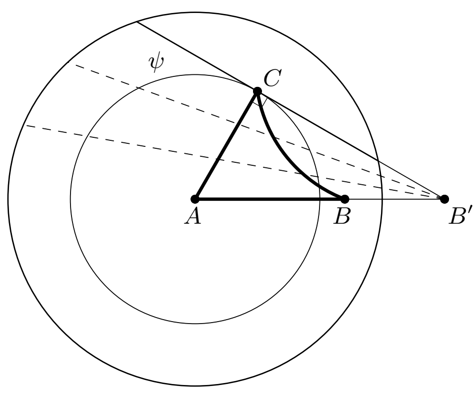

Рис. 2

Таким образом, треугольник ABC имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда угол $AB'C$ максимален. Поскольку длины сторон AB и AC фиксированы, а меняется лишь угол между ними, можно считать фиксированными точки A и B; тогда точка C может перемещаться по окружности ψ с центром A. Очевидно, что угол $AB'C$ максимален, если евклидова прямая $B'C$ касается окружности ψ (рис. 2).

Это, в свою очередь, означает, что евклидов угол ACB' прямой. Последнее условие равносильно тому, что $\pi/2 = \angle CAB' + \angle CB'A = \alpha + \tau$. Сопоставив это с выведенной ранее формулой $S(ABC) = 2\tau$ и формулой $S(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ для площади треугольника, получаем требуемое $\alpha = \beta + \gamma$. $\square$

Список литературы

[1] *Алексеева Е.* Гиперболические треугольники максимальной площади с двумя заданными сторонами // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14 М.: МЦНМО, 2010. С. 175–183. См. также: *Alekseeva J. I.* Hyperbolic triangles of the maximum area with two fixed sides, http://arxiv.org/abs/0911.5319

[2] *Крыжановский Д. А.* Изопериметры. М.: Физматгиз, 1959.

[3] *Протасов В. Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. М.: МЦНМО, 2012.

[4] *Schmidt E.* Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl // Math. Zeitschrift. 1943. Bd. 49. S. 1–109.

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ

http://www.mccme.ru/~skopenko