Решение кубических уравнений с помощью трансцендентных функций

А. А. Гольдман

Мы приведём метод точного (или символьного) решения кубического уравнения с вещественными коэффициентами с помощью тригонометрических и гиперболических функций (в *неприводимом* и *приводимом* случаях соответственно), см. теоремы 1 и 2.

При решении кубических уравнений используются либо алгебраические функции (Алг.), либо трансцендентные (Трансц.). Для каждого случая приводимости и каждого типа функций есть свой способ решения:

	Неприводимый случай	Приводимый случай
Трансц.	Метод Виета	Гиперболические функции
Алг.	Метод дель Ферро (комплексный)	Метод дель Ферро

В обоих случаях приводимости корни выражаются через радикалы с помощью метода дель Ферро [3, 10]. Для решения уравнений в неприводимом случае с помощью трансцендентных функций используют метод Виета. В этой работе мы рассматриваем метод решения кубических уравнений в приводимом случае через трансцендентные функции, а именно через гиперболические функции.

Более общий результат Ритта см. в [2, 6]. Для него уже нужны существенно более сложные идеи и методы.

Метод Виета хорошо известен в учебной литературе [1, 3–5, 7, 10, 11]. В этих источниках его формулировка отличается от предложенной далее. Метод гиперболических функций, описываемый в данной работе, также известен. Формулировка метода Виета, предложенная в работе, также может быть найдена в интернете [8].

Перейдём к точным формулировкам.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 23, 2018(212–214)

Уравнение $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ сводится к уравнению вида

$$x^3 + px + q = 0$$

путём деления на a и замены $y = x - b/(3a)$. При $p = 0$ решение очевидно. *Далее считаем* $p \neq 0$. Обозначим через

$$D = -108\Big(\Big(\frac{p}{3}\Big)^3 + \Big(\frac{q}{2}\Big)^2\Big)$$

дискриминант кубического уравнения $x^3+px+q=0$. В зависимости от его знака уравнение решается по-разному:

- при $D>0$ (*неприводимый случай*) методом Виета, использующим тригонометрические функции (см. теорему 1);
- при $D<0$ (*приводимый случай*) аналогично, используя гиперболические функции (см. теорему 2);
- при $D = 0$ применимы оба способа.

При $D < 0$ уравнение имеет один вещественный корень, при $D > 0$ оно имеет три различных вещественных корня, при $D = 0$ все три корня вещественные и среди них есть равные [9, с. 142].

Положим $Q = \dfrac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{|p|}}$.

Теорема 1 (Виет). *Пусть p и q — вещественные числа, $p \neq 0$, $D \geqslant 0$. Тогда уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет вещественные корни*

$$x_k = \sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\Big(\frac{\arccos Q + 2\pi k}{3}\Big), \quad \textit{где} \;\; k = -1, 0, 1.$$

Напомним определения функций, используемых в следующей теореме:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$
$$\operatorname{arch} b = a, \text{ где } \operatorname{ch} a = b \text{ и } a \geqslant 0; \quad \operatorname{arsh} b = a, \text{ где } \operatorname{sh} a = b.$$

Теорема 2. *Пусть p и q — вещественные числа и $D < 0$. Тогда уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет ровно один вещественный корень*

$$x = \begin{cases} -\operatorname{sgn} q\sqrt{\dfrac{-4p}{3}}\operatorname{ch}\dfrac{\operatorname{arsh} Q}{3}, & p < 0,\\[2ex] -\sqrt{\dfrac{4p}{3}}\operatorname{sh}\dfrac{\operatorname{arsh} Q}{3}, & p > 0.\end{cases}$$

Приведём доказательство только для теоремы 2. Теорема 1 доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 2. 1) $p<0$. Сделав замену $x=\sqrt{\frac{-4p}{3}}y$, перейдём к уравнению $4y^3-3y=Q$. Функция $\operatorname{ch} x$ принимает значения на $[1;+\infty)$. Замена на $\operatorname{ch} x$ возможна, если $Q\geqslant 1$. При $D<0$ и $p<0$ это условие выполняется, если $q<0$. Поэтому делаем замену $y=-\operatorname{sgn} q \operatorname{ch} t$, где $t\geqslant 0$. Как известно, $\operatorname{ch} 3x=4\operatorname{ch}^3 x-3\operatorname{ch} x$, поэтому $\operatorname{ch} 3t=Q$, отсюда $t=\frac{\operatorname{arch} Q}{3}$. Значит,

$$y=-\operatorname{sgn} q \operatorname{ch}\frac{\operatorname{arch} Q}{3} \quad \text{и} \quad x=-\operatorname{sgn} q\sqrt{\frac{-4p}{3}}\operatorname{ch}\frac{\operatorname{arch} Q}{3}.$$

2) $p>0$. Сделав замену $x=\sqrt{\frac{4p}{3}}y$, перейдём к уравнению $4y^3+3y=-Q$. Теперь, заменив y на $\operatorname{sh} t$ (функция $\operatorname{sh} x$ принимает значения на $\mathbb{R}$), имеем $\operatorname{sh} 3x=4\operatorname{sh}^3 x+3\operatorname{sh} x$, поэтому $\operatorname{sh} 3t=-Q$, отсюда $t=-\frac{\operatorname{arsh} Q}{3}$. Значит,

$$y=-\operatorname{sh}\frac{\operatorname{arsh} Q}{3} \quad \text{и} \quad x=-\sqrt{\frac{4p}{3}}\operatorname{sh}\frac{\operatorname{arsh} Q}{3}. \qquad \square$$

Список литературы

[1] *Гиндикин С.* «Великое искусство» // Квант. 1976. № 9. С. 2–10.

[2] *Хованский А. Г.* Полиномы Чебышёва и их обращения // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 93–106.

[3] *Клумова И., Фукс Д.* Формула существует, но... // Квант. 1976. № 9. С. 11–16.

[4] *Краснодемская А.* Графическое решение кубических уравнений // Квант. 1976. № 9. С. 18–19.

[5] *Резников А.* Формула Кардано и геометрия // Квант. 1976. № 9. С. 17.

[6] *Ritt J. F.* On algebraic functions which can be expressed in terms of radicals // Trans. AMS. Vol. 24, № 1. 1922. P. 21–30. https://arxiv.org/abs/1610.05968

[7] *Соловьёв Ю.* Вызов Ван Роумена // Квант. 1986. № 6. С. 18–20.

[8] https://ru.wikipedia.org/wiki/ТригонометрическаяформулаВиета

[9] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2017.

[10] *Янкелевич В.* «Неприводимый» случай // Квант. 1971. № 11. С. 20–21.

[11] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки — к профессии / Под ред. А. А. Заславского, А. Б. Скопенкова и М. Б. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2017.

Артур Андреевич Гольдман, факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ
artur-goldman@rambler.ru