Задачник

(составитель А. Я. Канель-Белов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Лягушка совершает прыжки, каждый — на метр. Направление каждого прыжка выбирается случайно (считаем, что случайная величина, равная углу поворота, распределена равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$). С какой вероятностью после трёх прыжков лягушка окажется на расстоянии не больше 1 м от начальной точки?

   (*American Mathematical Contest, 2010*)

2. а) Монетка подбрасывается до тех пор, пока не выпадет две решки подряд. Уже сделано 9 бросков, и игра ещё не закончена. Какова вероятность, что десятый бросок окажется последним? (*В. К. Ковальджи*)

   б) Рассмотрим решётку $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\colon\, y+1\geqslant x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0\}$. Лягушка прыгает по ней параллельно координатным осям, длина прыжка равна единице. Каково число возможных путей длины $3n$ из точки $(0,0,0)$ в точку (n,n,n)? (*А. Вершик, Ф. Петров*)

3. Может ли быть, что три человека, находящиеся на расстоянии 0, 1 и 2 от начала дороги, пройдут, не обгоняя друг друга, до точек, находящихся на расстоянии 1000, 1001 и 1002 от начала дороги так, чтобы

последний всё время видел первого, но ни в какой момент не видел второго (дорога идёт в одном направлении по горизонтали, но может подниматься и спускаться)? (*Н. Н. Константинов*)

4. Докажите, что середины сторон произвольного описанного четырёхугольника, отличного от квадрата, лежат на эллипсе, касающемся вписанной окружности в двух точках (возможно, мнимых). (*А. А. Заславский*)

5. а) Назовём два различных натуральных числа m и n *родственными*, если они имеют одни и те же простые делители, причём числа $m-1$ и $n-1$ обладают тем же свойством. Докажите, что существует бесконечно много пар родственных чисел. (*Фольклор*)

   б) Найдите все такие пары многочленов $P(x)$, $Q(x)$ с комплексными коэффициентами, что P делит Q^2+1, а Q делит P^2+1. (*IMC-2018, предложил R. Angelo*)

6. Все вершины выпуклого 10^9-угольника имеют целые координаты. Докажите, что его диаметр не меньше 10^{12}. (*А. Я. Канель-Белов*)

7. Даны многочлены $P(x), Q(x)$ с неотрицательными коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Докажите, что все их коэффициенты равны 0 или 1, если $P(x)Q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. (*Б. И. Каневский, В. А. Сендеров*)

8. При каких n любой треугольник можно разрезать на n равных треугольников? (*А. Ю. Сойфер*)

9. Пусть α, β — положительные числа. Рассмотрим такую симметрическую матрицу (a_{ij}), что
$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+\alpha} \cdot \frac{1}{i+j+\beta}.$$
   Докажите, что эта матрица положительно определена. (*А. А. Логунов*)

10. а) Полицейский ловит Гангстера в городе, представляющем собой квадрат 10×10, разбитый улицами на квадратные клетки — кварталы. Полицейский видит Гангстера, только если на него натыкается, и оба они ездят только по улицам. Скорость Полицейского в 10 000 раз больше скорости Гангстера. Может ли Полицейский поймать Гангстера за ограниченное время? (*А. Я. Канель-Белов*)

    б) Тот же вопрос, если потребовать, чтобы путь Полицейского был *конечнозвенной ломаной*. (*А. Я. Канель-Белов*)

11. Найдите предел
$$\lim_{R\to\infty} \sum_{(a,b)\,\in\, D_R} \frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2},$$
если D_R есть множество целочисленных точек (x, y), находящихся от нуля на положительном расстоянии, не превосходящем R.
(*IMC-2018, предложил R. Angelo*)

12. С переменной x и действительными числами разрешается провести не более 100 операций сложения, умножения и возведения в любую натуральную степень. Можно ли получить многочлен с любым данным числом действительных корней? (*Фольклор*)

Дополнение к задачнику

Хорошая задача обычно существует не сама по себе, она ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Публикуем дополнения к очередным задачам.

В выпуске 5 была опубликована

Задача 5.5. Докажите, что пересечение 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр (вершины тетраэдров являются вершинами додекаэдра), есть икосаэдр. (*А. Я. Белов*)

Она связана с задачей, которую В. А. Сендеров дал на матбое между школами 2 и 179 в далёком 1979 году:

Задача 5.5$'$. Дан додекаэдр. Какое наименьшее число его движений нужно взять, чтобы любое движение додекаэдра можно было представить в виде их композиции? (*Фольклор*)

В выпуске 6 была опубликована

Задача 6.1. На пир собрались 100 людоедов, и они стали есть друг друга. Оказалось, что из любых 10 найдётся один, оказавшийся в желудке у другого. Докажите, что найдётся цепочка из 12 вложенных людоедов. (*В. А. Сендеров*)

В этой связи интересен следующий апгрейд задачи VI Турнира городов (осень 1984 г., основной вариант, 9–10 класс, № 4):

Задача 6.1$'$. Каждый вечер некоторые дамы дают приём (всего n дам), а остальные ходят на приём к тем дамам, которые в этот вечер принимают. Каково минимальное число вечеров, чтобы каждая дама попала к каждой?
(*А. Я. Канель-Белов*)

В номере 8 была опубликована

Задача 8.11. Ряд $\sum a_n$ *сходится в среднем*, если существует предел средних арифметических его частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n s_k}{n}, \quad s_k=\sum_{m=1}^k a_k.$$

Пусть ряд $\sum a_n$ сходится в среднем и при этом а) $a_n = o(1/n)$ (т. е. $\lim na_n = 0$); б) $a_n = O(1/n)$ (т. е. $\exists\, C>0\colon |na_n|<C$).

Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится. (*А. Я. Белов*)

Естественно рассмотреть родственную ситуацию, а именно, когда вместо *сходимости в среднем* рассматривается существование предела

$$\lim_{r\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n. \tag{0.1}$$

Тогда возникает

Задача 8.11′. Предположим, что предел (0.1) существует. Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится, если а) $a_n = o(1/n)$; б) $a_n = O(1/n)$.

В выпуске 11 была опубликована

Задача 11.4. d-Мерная ладья бьёт по прямым вдоль осей координат. Расстановку ладей в k-мерном кубе назовём *полной*, если ладьи не бьют друг друга и количество ладей максимально возможное.

а) Какое максимальное число ладей можно расставить в d-мерном кубе $n\times\ldots\times n$ так, чтобы они не били друг друга?

б) Слоем трёхмерного куба $n\times n\times n$ назовём квадрат $n\times n$, состоящий из клеток с одинаковой третьей координатой. Пусть первые k слоёв заполнены полно (т. е. в них стоят nk ладей). Докажите, что эту расстановку можно продолжить до полной расстановки всего куба. Верно ли аналогичное утверждение для четырёхмерного куба?

в) В трёхмерном кубе $n\times n\times n$ расставили ладьи и зафиксировали угловую клетку. Каково максимальное число подкубов с полной расстановкой и той же угловой клеткой? Аналогичный вопрос для d-мерного куба.

(*А. Я. Канель*)

В связи с этой задачей возникла

Задача 11.4′. Сколько полных расстановок ладей в трёхмерном кубе $4\times 4\times 4$? (*А. Ю. Эвнин*)

В выпуске 11 была также опубликована

Задача 11.9. Можно ли множество рациональных точек единичной сферы раскрасить в два цвета (чёрный и белый) так, что если три точки отвечают концам трёх ортогональных векторов, то одна из них будет чёрной, а две другие — белыми? (*Д. Муштари*)

Отметим, что множество **всех** точек единичной сферы так раскрасить нельзя (см. решение задачи 10.8 в предыдущем выпуске 22). Задача 10.8 содержится в книге Ю. И. Манина «Доказуемое и недоказуемое» (с. 89, 94–97) в связи с доказательством отсутствия скрытых параметров в квантовой механике.

В выпуске 22 опубликована также заметка Д. Х. Муштари «О правильной раскраске 16-мерной сферы» (с. 218–219), где показано, что не существует правильной раскраски множества рациональных точек 16-мерной единичной сферы (когда любые две точки, отвечающие перпендикулярным векторам, раскрашены в разные цвета). Здесь возникает семейство интересных задач.

Решение задачи 11.9 использует идеи, содержащиеся в заметке Д. Х. Муштари. С ней связана

Задача 11.9′. Существует ли вписанная в решётку нечётнозвенная замкнутая ломаная, все звенья которой имеют одинаковую длину? (*А. К. Ковальджи*)

В выпуске 14 была опубликована

Задача 14.6. $f(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция от двух переменных с локальным минимумом в нуле. Других критических точек у неё нет. Верно ли, что этот минимум глобальный? (Точка называется *критической*[1], если в ней обе частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ обращаются в нуль.) (*Фольклор*)

Данная задача в своё время была распространена среди учеников замечательного математика Н. А. Бобылева, увы, ныне покойного. Другая близкая задача, также распространённая среди его учеников, такова.

Задача 14.6′. Многочлен $P(x, y)$ от двух переменных принимает только положительные значения. Может ли он принимать все положительные значения? (*Фольклор*)

В номере 14 была также опубликована

Задача 14.12. По некоторым рёбрам клеток плоской решётки проведены перегородки. Пьяница с равной вероятностью идёт из квадрата, где он находится, в любой соседний квадрат, куда он может пройти. Докажите, что он с вероятностью 1 вернётся в исходную точку. (*А. Я. Канель, М. Б. Скопенков*)

[1] Для бесконечно дифференцируемой функции.

Эта задача оказывается связана со следующей задачей.

Задача 14.12$'$. Из резисторов спаяли цепь. Может ли сопротивление цепи увеличиться, если, ничего не размыкая, к каким-то двум клеммам припаять ещё один резистор? (*Фольклор*)

В семнадцатом выпуске была опубликована

Задача 17.4. $\mathcal{A}$ — отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояние (т. е. $|XY| = |\mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)|$ для любых точек X, Y плоскости). Доказать, что $\mathcal{A}$ — отображение плоскости на себя (т. е. каждая точка имеет прообраз при этом отображении). (*Фольклор*)

С ней тесно связана

Задача 17.4$'$. $\mathcal{A}$ — отображение плоскости в себя, сохраняющее *единичные* расстояния (если $|XY| = 1$, то $|\mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)| = |XY| = 1$). Доказать, что $\mathcal{A}$ сохраняет *все* расстояния. (*Фольклор*)

В выпуске 18 была опубликована

Задача 18.1. На плоскости начерчен угол величиной в n градусов, где $n < 180$ — натуральное число.

(а) Для каких n этот угол можно разделить с помощью циркуля и линейки на n равных углов?

(б) Пусть m — произвольное натуральное число. Для каких n угол A можно разделить с помощью циркуля и линейки на m равных углов?

(в) Пусть m и n — натуральные взаимно простые числа и $m/n < 180$, а k — ещё одно натуральное число. На плоскости начерчен угол A величиной в m/n градусов. Для каких k угол A можно разделить с помощью циркуля и линейки на k равных углов? (*Г. А. Гальперин*)

С ней связана весьма поучительная классическая задача:

Задача 18.1$'$. Какие правильные многоугольники можно вписать в (не обязательно квадратную) решётку? (*Фольклор*)

В прошлом выпуске 22 была опубликована

Задача 22.12. а) Любую ли фигуру из зеркального стекла можно осветить изнутри одной лампочкой?

б) Любой ли многоугольник из зеркального стекла можно осветить изнутри одной лампочкой? (*Фольклор*)

С этим сюжетом связана следующая

Задача 22.12$'$. Докажите, что луч света, бегающий в зеркальном эллипсе, касается либо некоторого эллипса, либо некоторой гиперболы. (*Фольклор*)