Решения задач из прошлых выпусков

11.4. Условие. d-Мерная ладья бьёт по прямым вдоль осей координат. Расстановку ладей в k-мерном кубе назовём *полной*, если ладьи не бьют друг друга и количество ладей максимально возможное.

а) Какое максимальное число ладей можно расставить в d-мерном кубе $n \times \ldots \times n$ так, чтобы они не били друг друга?

б) Слоем трёхмерного куба $n \times n \times n$ назовём квадрат $n \times n$, состоящий из клеток с одинаковой третьей координатой. Пусть первые k слоёв заполнены полно (т. е. в них стоят nk ладей). Докажите, что эту расстановку можно продолжить до полной расстановки всего куба. Верно ли аналогичное утверждение для четырёхмерного куба?

в) В трёхмерном кубе $n \times n \times n$ расставили ладьи и зафиксировали угловую клетку. Каково максимальное число подкубов с полной расстановкой и той же угловой клеткой? Аналогичный вопрос для d-мерного куба.

(*А. Я. Канель*)

а) Ответ. k^{n-1}.

Решение. Оценка. Легко видеть, что больше расставить нельзя: рассмотрим проекцию на $(n-1)$-мерную грань. Каждая её клетка будет покрыта проекциями ладей не более одного раза — иначе две ладьи окажутся на одной вертикали и будут бить друг друга.

Пример. Начнём со стандартного олимпиадного решения для трёхмерного куба с ребром 8. Цифра обозначает номер слоя, в котором стоит ладья над данной клеткой:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь при переходе к следующему слою происходит циклический сдвиг. Аналогичным образом, в четырёхмерном пространстве при переходе к следующему трёхмерному слою со всеми его двумерными слоями также происходит циклический сдвиг и т. д. Мы предоставляем это воображению читателя и приведём изящное описание этой конструкции.

Разместим ладьи в точках с координатами $x_1, \ldots, x_n$, где

$$\sum x_i \equiv 0 \mod k.$$

Легко видеть, что указанное расположение ладей удовлетворяет условию задачи (и соответствует чисто комбинаторному описанию, данному выше).

Следующее упражнение относится к кодам, регистрирующим ошибки. Последовательность битов означает вершину куба. Если в одном бите случается ошибка, то происходит сдвиг на ребро. Можно отметить половину вершин куба, попарно не соединённых рёбрами (кстати, ровно двумя способами), а больше — нельзя.

Упражнения.

1. В n-мерном кубе покрашено более половины вершин. Ребро называется *покрашенным*, если покрашены обе ограничивающие его вершины. Докажите, что покрашено не менее n рёбер.
2. Докажите, что минимальное количество ладей в n-мерном кубе, которое может бить все его клетки, составляет $\lceil n^2/2 \rceil$, т. е. наименьшее целое число, не меньшее чем $n^2/2$.

б) Решение. Пусть k слоёв трёхмерного куба $n \times n \times n$ полно заполнены. Нам достаточно показать, что можно полно заполнить ещё один слой. В каждой горизонтали нового слоя будет k запрещённых (соответственно, $n - k$ разрешённых) позиций, куда можно ставить ладью; то же верно и для столбцов. Задача сводится к известной *теореме Холла о паросочетаниях*.

Аналогичный результат для куба размерности больше 3 нам неизвестен. Мы будем признательны читателям за соображения на эту тему.

Упражнения.

1. Сто сумасшедших красят доску 100×100 в 100 цветов, соблюдая единственное правило: в одной строке и в одном столбце не может быть двух клеток, раскрашенных одинаково. Могут ли сумасшедшие правильно раскрасить доску, если уже раскрашено 100 клеток?
2. Единичный квадрат разбит двумя способами на n равновеликих многоугольников. Докажите, что можно выбрать n точек так, что в каждой из полученных $2n$ частей окажется по одной точке.
3. (*Н. С. Келлин*) Сто замов получили взыскания от ста завов. При этом каждый зав наложил по одному взысканию на 15 замов, а каждый зам

получил по одному взысканию от 15 завов. Докажите, что директор может снять 1400 взысканий так, что у каждого зама останется по одному взысканию и все взыскания будут наложены разными завами.

в) Ответ. Размеры двух подкубов с полными расстановками ладей и общим углом должны различаться не менее чем в два раза. Тогда кубов с полной расстановкой ладей будет не более чем $\log_2 n$.

Решение. Отметим, что для любого s любой s-мерный клетчатый слой k-мерного куба с полной расстановкой ладей сам имеет полную расстановку ладей (их в нём будет n^{s-1}). Взяв $s=2$, сводим задачу к следующей очевидной лемме.

Лемма. *Пусть в углу квадрата $n\times n$ отмечен клеточный подквадрат $m\times m$, где $n/2<m<n$. Тогда невозможно в большом квадрате $n\times n$ вне подквадрата $m\times m$ поместить n ладей так, чтобы они не били друг друга* (*максимальное число ладей, которые можно поместить, равно* $2(n-m)$).

Можно привести пример k-мерного куба с ребром 2^n, в котором имеется n подкубов с общим углом и полной расстановкой ладей. Для этого напомним определение *побитового сложения*. Если даны два числа M и N в двоичной записи, то результатом побитового сложения (XOR) $L=M\oplus N$ будет такое L, i-я ($i=1,2,\ldots$) двоичная цифра которого равна 0, если i-е цифры в M и N одинаковы, и 1, если они разные.

Искомая расстановка задаётся уравнением, немного отличающимся от решения п. а): $\bigoplus_i x_i=0$. Наглядно её можно представить по индуктивной конструкции: куб с ребром 2^n разбивается на 2^k кубиков с ребром 2^{n-1}, которые красятся в шахматном порядке. В чёрных осуществляется уже построенная полная расстановка ладей, а белые остаются пустыми.

(*А. Я. Канель*)

11.5. Условие. На плоскости отметили n непересекающихся отрезков и $n+2$ точки, которые не лежат на этих отрезках. Докажите, что найдутся две точки, которые «видят» друг друга (т. е. соединяющий их отрезок не пересекает отмеченные отрезки). (*М. Л. Концевич*)

Решение. Прежде всего, можно считать отрезки находящимися в *общем положении*, т. е. никакие три прямые, на которых лежат эти отрезки, не пересекаются в одной точке, никакие две не параллельны и никакая отмеченная точка не лежит на этих прямых. Это достигается малым шевелением. Далее, будем продлевать отрезки до пересечения друг с другом. Если при этом конец отрезка упирается в другой отрезок, то движение этого конца останавливается. Если при этом расширении точки «видят» друг друга, то они «видели» друг друга и раньше.

В результате получается граф на плоскости с $2n$ вершинами (от каждого отрезка по 2 конца), все вершины которого имеют степень 3 или 1. Следовательно, у него не более $3n$ рёбер и, с учётом формулы Эйлера, не более $n + 1$ клетки. В одну из них попадут две точки, и они будут «видеть» друг друга.

Комментарий. Данная задача связана с вычислением средней площади части, на которую разбивают плоскость случайно расположенные трещины в процессе разрастания. При разрастании конец трещины, когда она упирается в другую, перестаёт двигаться. Средняя площадь части обратна среднему числу частей в пересчёте на единицу площади, а это среднее число и оказывается примерно равным среднему числу трещин в единице площади, как видно из решения задачи 11.5.

Обобщение результата на размерности выше 2 неизвестно.

Упражнение. а) Докажите, что все грани выпуклого многогранника не могут одновременно иметь больше 5 сторон. Кроме того, все вершины не могут одновременно иметь степень выше 5.

б) Треугольник разбит на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что найдётся вершина разбиения степени 3.

в) Выпуклый 2018-угольник разбит на выпуклые семиугольники. Докажите, что четыре стороны одного из них выходят на границу.

г) Плоскость разбита на выпуклые семиугольники единичного диаметра. Докажите, что внутри круга радиуса 100 их не меньше миллиарда.

Список литературы

[1] *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978.

[2] *Сантало Л. А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983.

(*А. Я. Канель-Белов*)

13.4. Условие. Для каких $\lambda \in [0, 1]$ для любой непрерывной функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, такой, что $f(0) = f(1)$, обязательно найдётся такое $x \in [0, 1 - \lambda]$, что $f(x) = f(x + \lambda)$? (*Фольклор*)

Ответ. Для всех λ вида $\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, и только для них.

Решение. Переформулируем вопрос: Для каких $\lambda \in [0, 1]$ для любой непрерывной функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, такой, что $f(0) = f(1)$, обязательно найдётся горизонтальная хорда длины λ, концы которой лежат на графике этой функции?

Определим функцию $g_\alpha(x)$ следующим образом: $g_\alpha(x)=f(x)-f(x+\alpha)$. Покажем, что

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, x\in\Big[0,1-\frac{1}{n}\Big]\colon g_{1/n}(x)=0.$$

Рассмотрим

$$g_{1/n}(0),\ g_{1/n}\Big(\frac{1}{n}\Big),\ g_{1/n}\Big(\frac{2}{n}\Big),\ \ldots,\ g_{1/n}\Big(\frac{n-1}{n}\Big).$$

Без ограничения общности считаем, что $g_{1/n}(0)\geqslant 0$.

Если $g_{1/n}(0)=0$, то утверждение доказано.

Пусть $g_{1/n}(0)>0$. Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_{1/n}\Big(\frac{k}{n}\Big)=f(0)-f\Big(\frac{1}{n}\Big)+f\Big(\frac{1}{n}\Big)-f\Big(\frac{2}{n}\Big)+f\Big(\frac{n-1}{n}\Big)-f(1)=f(0)-f(1)=0.$$

Так как $g_{1/n}(0)>0$, то $\exists\, k\in\mathbb{N}\colon g_{1/n}\Big(\dfrac{k}{n}\Big)<0$. Но тогда по теореме о промежуточном значении

$$\exists\, x\in\Big[0,\frac{k}{n}\Big]\colon g_{1/n}(x)=0,\quad \text{т. е.}\quad \exists\, x\in\Big[0,1-\frac{1}{n}\Big]\colon f(x)=f\Big(x+\frac{1}{n}\Big),$$

что и требовалось.

Докажем, что при $\lambda\in[0,1]\setminus\Big\{\dfrac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\Big\}$ ответ отрицательный. Положим $k=[1/\lambda]$, $\delta=1-kc$. Построим на плоскости ломаную, состоящую из двух семейств параллельных отрезков. Выберем произвольное $a\in(-1/k,0)$. Соединим отрезком точки $[0,0]$ и $[\delta,-ka]$, а другим отрезком — точки $[\delta,-ka]$ и $[\lambda,a]$. Построенный участок перенесём параллельно себе так, чтобы начальная точка перенесённого участка совпала с концом исходного. Будем действовать аналогично, пока не достроим ломаную до точки с абсциссой $k\lambda$. На участке $[k\lambda,1]$ построим отрезок, соединяющий точки $(k\lambda,ka)$ и $(1,0)$. Он будет параллелен и равен (с точностью до параллельного переноса) отрезкам первого семейства.

Построенная ломаная является графиком некоторой функции

$$h(x)\colon[0,1]\to[-1,1].$$

Из построения следует, что если $x,x+\lambda\in[0,1]$, то $h(x+\lambda)=h(x)+a$. Это означает, что не существует горизонтальной хорды длины λ с концами на графике. Тогда такой хорды нет и у функции

$$f(x)=\frac{h(x)+1}{2}\colon[0,1]\to[0,1],$$

что и требовалось. (*М. Третьяков, Г. Юшков, ученики 10 класса школы № 57 г. Москвы*)

13.7. Условие. Существует ли множество из $2(2n-1)$ точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, которое можно разбить на $2n-1$ пару точек так, чтобы любая прямая, проходящая через точки из разных пар, проходила бы ещё через одну точку этого множества? (*Фольклор*)

Ответ. Да.

Решение. Рассмотрим правильный $(2n-1)$-угольник на плоскости и ещё $2n-1$ точек на бесконечно удалённой прямой, отвечающих направлениям его сторон. Отметим, что, поскольку $2n-1$ число нечётное, каждая диагональ параллельна ровно одной стороне. Кроме того, диагоналям, проведённым из вершины A, отвечают все возможные направления сторон, кроме направления стороны, противоположной вершине A. Сопоставим каждой вершине точку бесконечно удалённой прямой, отвечающую направлению противоположной стороны. Получится искомое расположение на проективной плоскости.

Переведя проективным преобразованием бесконечно удалённую прямую в обычную, сохранив все прямые, соединяющие наши точки, и сами наши точки в качестве обычных (не бесконечно удалённых), мы получим требуемую конфигурацию точек и на обычной (аффинной) плоскости.

Комментарий. При конструировании часто бывает полезно уносить объект на бесконечность. (*А. Я. Канель-Белов*)

15.1. Условие. «Задачи на устный счёт».

а) Найдите первую цифру числа 2^{400}. (*А. Я. Белов*)

б) Найдите $[2^{\sqrt{15}}]$, не пользуясь калькулятором. (*А. В. Спивак*)

в) Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$? (*В. А. Сендеров*)

г) Оцените $\int_0^{2\pi}\sin^{100}x\,dx$ с погрешностью 20 %. (*В. И. Арнольд*)

а) Ответ. 2.

Решение. Как известно, $2^{10}=1024$ или $2^{10}/1000=1{,}024$, и нам достаточно найти первую цифру числа $1{,}024^{40}$. Заметим, что

$$1{,}025^{40}=\left(1+\frac{1}{40}\right)^{40}\approx e=2{,}718281828\ldots$$

При этом

$$\left(\frac{1{,}024}{1{,}025}\right)^{40}=\left(1-\frac{1}{1025}\right)^{40}\approx 0{,}96.$$

Итак, первая цифра равна 2, как и у числа e.

Упражнение (*В. О. Бугаенко*). При переходе улицы в неположенном месте вероятность быть сбитым машиной равна 0,1 %. Хулиган Вася в течение 3 лет каждый день переходит улицу в неположенном месте. Оцените его шансы остаться в живых.

б) Ответ. $[2^{\sqrt{15}}] = 14$.

Решение. Покажем, что на самом деле $14 < 2^{\sqrt{15}} < 15$.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона для показателя $1/2$:

$$\sqrt{15} = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{32} - \frac{1}{2048} - \ldots\right),$$

откуда

$$2^{\sqrt{15}} = 2^{4 - \frac{1}{8} - \frac{1}{512} - \cdots}, \quad 2^{\sqrt{15}}\, 2^{\frac{1}{8} + \frac{1}{512} + \cdots} = 16. \qquad (*)$$

Второй сомножитель меньше $2^{\frac{1}{8} + \frac{1}{256}} = 2^{\frac{33}{256}}$, а это выражение меньше 1,1, так как по формуле бинома Ньютона

$$1{,}1^{\frac{256}{33}} = 1 + 0{,}1 \cdot \frac{256}{33} + 0{,}01 \cdot \frac{256}{33} \cdot \frac{223}{33} \cdot \frac{1}{2} + \ldots = 1 + \frac{256}{330}\left(1 + \frac{223}{660}\right) > 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

С другой стороны, $14 \cdot 1{,}1 < 16$. Значит, $2^{\sqrt{15}} > 14$.

Заметим теперь, что

$$2^{1/8} > 1 + \frac{1}{8} - \frac{7}{128} > 1{,}07,$$

и ввиду $(*)$ имеем $2^{\sqrt{15}} \cdot 1{,}07 < 16$. В то же время $15 \cdot 1{,}07 > 16$. Значит, $2^{\sqrt{15}} < 15$.

в) Ответ. $\sqrt[3]{60} < 2 + \sqrt[3]{7}$.

Решение. Заметим, что $\sqrt[3]{60} = 4\sqrt[3]{1 - \frac{1}{16}}$ и $2 + \sqrt[3]{7} = 2 + 2\sqrt[3]{1 - \frac{1}{8}}$.

Разлагая оба выражения в ряд, имеем, что первые два главных члена совпадают, а третий член уже оказывается существенно больше у второго выражения (перед этим членом стоит знак «плюс»), и это различие не может быть скомпенсировано остальными членами.

г) Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \sin^{100} x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^{100} x\, dx.$$

Этот интеграл надо рассмотреть в окрестности двух точек максимума, где $\cos x = \pm 1$, и в этих точках его поведение одинаково. В окрестности нуля $\cos x$ и $e^{-x^2/2}$ совпадают с точностью до членов четвёртого порядка, поэтому наш интеграл примерно равен выражению

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-50x^2} dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{50}} = \sqrt{\frac{4\pi}{50}} \approx \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пренебречь членами в выражениях для $\cos x$ и $e^{-x^2/2}$ порядка 4 и выше можно в силу «правила трёх сигм»: 98 % площади под графиком функции e^{-x^2/σ^2} заключено в промежутке $[-3\sigma, +3\sigma]$, а в этих пределах остальные члены несущественны (у нас $\sigma^2 = 1/50$). (*А. Я. Белов*)

Упражнения. Латинскими буквами обозначаются вещественные числа. Если условие задачи является утверждением, то задача состоит в том, чтобы это утверждение доказать.

1. Если $x, y \geqslant \sqrt{2}$, то $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}$.

Указание. Замена $x = e^{u/2}$, $y = e^{v/2}$ переводит неравенство в

$$\frac{f(u)+f(v)}{2} \geqslant f\Big(\frac{u+v}{2}\Big),$$

где $f(t) = (1+e^t)^{-1/2}$, $e^u \geqslant 2$, $e^v \geqslant 2$. Но $f''(t) > 0$ при $e^t > 2$.

2. $x^4 + x^3 + x^2 + x + \dfrac{1}{3} > 0$.

Указание. $x^2\Big(x^2 + x + \dfrac{1}{4}\Big) + \Big(\dfrac{3}{4}x^2 + x + \dfrac{1}{3}\Big) = \ldots + \dfrac{3}{4}\Big(x^2 + 2 \cdot \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{9}\Big)$.

3. Если $|x-a| + |y-b| < c$, то $|xy - ab| < \Big(|a| + |b| + \dfrac{c}{4}\Big)c$.

Указание. Положим $z := x - a$ и $t := y - b$. Тогда $4|zt| \leqslant (|z| + |t|)^2 < c^2$.

4. Что больше: $\log_2 5$ или $\log_3 13$?

Указание. $\log_2 5 < 7/3 < \log_3 13$.

5. а) $\operatorname{ctg} x + \dfrac{2}{\pi} > \dfrac{1}{x}$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; б) $1 > \dfrac{2x}{\pi \sin x} > e^{\frac{2x}{\pi} - 1}$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Указание. а) Рассмотрите $f(x) = \operatorname{ctg} x + \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{x}$. Имеем $f(\pi/2) = 0$ и $f'(x) < 0$ при $0 < x < \pi/2$.

б) Подумайте о геометрическом смысле левого неравенства. Для доказательства правого заметьте, что если $f > 0$, $g > 0$, то $f > g$ равносильно $\ln f > \ln g$. Далее воспользуйтесь методом решения и результатом п. а).

6. а) Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$.
б) Что больше: $\sqrt[3]{413}$ или $6+\sqrt[3]{3}$?

а) Указание. Воспользуйтесь равенством

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

б) Ответ. $6+\sqrt[3]{3}$.

Первое решение. См. указание к п. а). Если хотя бы два из трёх чисел a, b, c различны, то знаки чисел $a+b+c$ и $a^3+b^3+c^3-3abc$ совпадают.

Второе решение. Поскольку $6=\sqrt[3]{216}$, задача эквивалентна сравнению чисел $\sqrt[3]{413}$ и $f\left(\frac{213}{2}\right)$, где
$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{219}{2}+x}+\sqrt[3]{\frac{219}{2}-x}.$$
На отрезке $\left[0,\,\frac{219}{2}\right]$ функция $f(x)$ монотонно убывает, и
$$f(0)>\sqrt[3]{413}>f\left(\frac{219}{2}\right).$$
Поэтому достаточно найти такое число x, что $f(x)=\sqrt[3]{413}$. Решая уравнение
$$\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{b},$$
получаем $x^2=a^2-\dfrac{(b-2a)^3}{27b}$, откуда следует ответ.

Третье решение. Сравним 413 и $219+18t^2+108t$, где $t=\sqrt[3]{3}$. Это значит, что сравниваются числа 0 и $P_2(t):=18t^2+108t-194$, т. е. α и t, где α — положительный корень многочлена P_2.

Замечание. Третье решение опирается на рациональность одного из слагаемых. Однако сравнение чисел a и $(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3$, где $a,\,b,\,c\in\mathbb{Q}$, легко приводится к сравнению чисел $\sqrt[3]{x}$ и $y+\sqrt[3]{z}$, где $x,\ y,\ z\in\mathbb{Q}$. Аналогично для рациональных a, b, c при $a>0$ можно выяснить, что больше: $\sqrt[n]{a}$ или $b+\sqrt[3]{c}$.

7. Что больше: а) 300! или 200^{300}? б) 300! или 100^{300}?

а) Ответ. 200^{300}. Указание. $2k/3>(k!)^{1/k}$ при $k\geqslant 3$.

б) Ответ. 300!. Указание. С помощью неравенства $(1+1/k)^k<3$ докажите по индукции, что $(k!)^{1/k}>k/3$. (*В. А. Сендеров*)

15.2. Условие. Может ли сумма двух периодических функций с минимальными периодами 1 и $\sqrt{2}$ снова быть периодической функцией?

(*Фольклор*)

Ответ. Да, может.

Решение. Определим следующие функции $f(x)$, $g(x)$.
$$f(a+b\sqrt{2})=b,\ \text{если } a,b\in\mathbb{Z},\quad f(x)=0 \text{ иначе};$$
$$g(a+b\sqrt{2})=a,\ \text{если } a,b\in\mathbb{Z},\quad g(x)=0 \text{ иначе}.$$
Тогда минимальным периодом функции f является 1, а минимальным периодом функции g является $\sqrt{2}$. Сумма функций $f+g$ имеет вид:
$$(f+g)(a+b\sqrt{2})=a+b,\ \text{где } a,b\in\mathbb{Z},\quad (f+g)(x)=0 \text{ иначе}.$$
Тогда число $\sqrt{2}-1$ является периодом функции $f+g$ (проверяется непосредственно). (*Г. Юшков, ученик 10 класса школы № 57 г. Москвы*)

15.4. Условие. Во все точки целочисленной решётки на плоскости вбиты гвозди. На плоскость положили отрезок длины 2011, не задевающий ни одного из этих гвоздей.

а) Можно ли передвинуть отрезок, не задевая ни одного гвоздя, так, чтобы в результате он развернулся на 180°?

б) Существует ли такое начальное положение отрезка, при котором его можно повернуть вокруг некоторой точки на 180° так, чтобы он не задел ни одного гвоздя?

(Авторам неизвестно, верно ли утверждение пункта б) для произвольного начального положения отрезка.) (*В. А. Сендеров, А. Я. Белов*)

а) Ответ. Можно.

Решение. Будем поворачивать отрезок относительно начала по часовой стрелке, пока не коснёмся (т. е. не подойдём к ней «бесконечно близко») точки решётки. Если при этом коснулись только одной, то будем двигать его дальше, пока не коснёмся второй.

Легко видеть, что, повернув чуть-чуть и перенеся отрезок параллельно самому себе, отрезок можно вывести целиком в нужную сторону относительно системы коснувшихся гвоздей и продолжить этот процесс, повернув вектор дальше по часовой стрелке. Процесс закончится, поскольку всякий раз происходит переход от близости к одному направлению, заданному парой точек решётки, находящихся на расстоянии не больше 2011, к другому направлению. А таких направлений конечное число.

б) Лемма. *Существует такое R, что в кольце $R \leqslant r \leqslant \sqrt{R^2+2011}$ с центром в начале координат нет точек целочисленной решётки.*

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{2012}$ — первые 2012 простых чисел вида $4k+3$. По китайской теореме об остатках существует такое натуральное число N, что $N+j$ $(j=1,\ldots,2012)$ делится на p_j и не делится на p_j^2. Как известно, натуральное число является суммой двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда любой его простой делитель вида $4k+3$ входит в его разложение в чётной степени. Поэтому $R=\sqrt{N+1}$ удовлетворяет условиям леммы. $\square$

Поместим теперь начало отрезка в точку $(R,0)$, а конец поместим в точку $(R,\sqrt{2011})$. Тогда при вращении его относительно начала координат $(0,0)$ он весь будет находиться в кольце, указанном в лемме, и не заденет целочисленной точки.

Упражнения.

1. Решите уравнение в целых числах: $x^2+4=y^3$. (*В. А. Сендеров*)

2. Докажите, что для любого k существует окружность с центром в начале координат, на которой лежит ровно $4k$ точек с целыми координатами. (Задача допускает решение без использования гауссовых чисел.)

(*А. Я. Белов*)

17.2. Условие. а) Найти 300-ю цифру после запятой числа $\sqrt[3]{0{,}\underbrace{99\ldots9}_{100}}$.

б) С помощью калькулятора найти первую цифру числа 2^{10^6}.

(*А. Я. Белов*)

Решение. а) $\sqrt[3]{0{,}\underbrace{99\ldots9}_{100}} = \sqrt[3]{1-10^{-100}}$. Разлагая последнее выражение в ряд по формуле бинома Ньютона[1)], имеем:

$$\sqrt[3]{1-10^{-100}} = 1 - \frac{10^{-100}}{3} - \frac{10^{-200}}{9} - \frac{5\cdot 10^{-300}}{81} - \frac{10\cdot 10^{-400}}{243} - \ldots$$

Из разложения видно, что эта цифра равна 5.

б) Первая цифра числа $M = 2^{10^6}$ равна k, если при некотором натуральном l выполняется неравенство $k\cdot 10^l \leqslant M < (k+1)\cdot 10^l$, т. е. $\{10^6 \lg 2\} \in (\lg k, \lg(k+1))$. Остаётся вычислить $\lg 2$ на калькуляторе, сдвинуть десятичную точку на 6 позиций вправо, отбросить целую часть и сравнить результат с числами $0, \lg 2, \ldots, \lg 9, 1$.

В итоге имеем:

$$\lg 2 = 0{,}30102999566, \quad \{10^6\ \lg 2\} = 0{,}99566, \quad \lg 9 = 0{,}95424250943,$$

так что первая цифра числа 2^{10^6} равна 9. (*А. Я. Белов*)

Упражнение. Что больше: $A = \sqrt{2+\sqrt[3]{3}} + \sqrt{2-\sqrt[3]{3}}$ или а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt[3]{2}$?

а) Ответ. $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}} + \sqrt{2-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt{2}$.

Решение. Надо воспользоваться выпуклостью подграфика функции $\sqrt{x}$.

б) Ответ. $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}} + \sqrt{2-\sqrt[3]{3}} > 2\sqrt[3]{2}$.

Решение. $A^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt[3]{3}} + \sqrt{2-\sqrt[3]{3}}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{4-\sqrt[3]{3^2}}$. Результат надо сравнить с $\sqrt[3]{2^8}$, получаем сравнение $2 + \sqrt{4-\sqrt[3]{3^2}} \vee \sqrt[3]{2^5}$.

Нужно показать, что $4-\sqrt[3]{3^2} > 4(\sqrt[3]{2^2}-1)^2$, т. е. $-\sqrt[3]{3^2} > 4(\sqrt[3]{2^4}-\sqrt[3]{2^5})$, или

$$\frac{\sqrt[3]{3^2}}{8} < \sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2}-1).$$

[1)] Эта формула для натуральных показателей была известна и до Ньютона. Его заслуга — в обобщении формулы для любого вещественного и комплексного показателя.

Таким образом, надо проверить неравенство

$$\frac{9}{1024} < (\sqrt[3]{2}-1)^3.$$

Заметим, что

$$\frac{9}{1024} < \frac{1}{100} < \frac{1}{729/8} = \frac{1}{(4{,}5)^3}.$$

Поэтому достаточно установить, что $\sqrt[3]{2}-1 > 1/4{,}5 = 2/9$ или $\sqrt[3]{2} > 11/9$. Возводя обе части неравенства в куб, получаем очевидное неравенство $2 > 1331/729$.

Комментарий. Для успешного решения задач необходима культура выкладок. Взяв старые учебники и тренируясь на наиболее громоздких выражениях, можно узнать много мелких идей и простых приёмов, что приводит к заметному улучшению результатов и экономии времени.

(*А. Я. Белов*)

20.5. Условие. Имеется девять точек на плоскости: три красные, три синие, три зелёные. Никакие четыре не лежат на одном цикле (окружности или прямой). Дугами циклов будем называть дуги окружностей и отрезки прямых. Докажите, что существуют три непересекающиеся дуги цикла, на каждой из которых лежит по точке каждого цвета. (*A. Oppenheim*)

Решение. Положим на плоскость сферу достаточно большого радиуса, касающуюся плоскости по южному полюсу в одной из отмеченных точек. Спроектируем точки на эту сферу стереографически, центр проекции — в северном полюсе. Циклы перейдут в циклы: пересекающиеся — в пересекающиеся, непересекающиеся — в непересекающиеся. Задача перенесена на сферу.

Окружим точки шарами малого радиуса так, чтобы никакие четыре точки разных шаров не попали на одну плоскость. Каждый шар равномерно заполним веществом, отвечающим цвету его центра.

Имеет место знаменитая

Теорема о бутерброде с ветчиной. *В n-мерном пространстве даны n ограниченных множеств. Тогда существует плоскость, разделяющая каждое из них на два подмножества равной меры (в трёхмерном пространстве это означает: «поровну хлеба, поровну масла, поровну ветчины»).*

Применим эту теорему. Получим плоскость P, проходящую через три разноцветные точки. Она пересекается со сферой по циклу и делит сферу на две части — «верхнюю» и «нижнюю», в каждой из которых находится по точке каждого цвета. Итак, имеется цикл на P, «верхняя» тройка точек и «нижняя» тройка точек. Дуги соответствующих циклов не пересекаются, что и требовалось.

Упражнение. Дан выпуклый многоугольник. Среди окружностей, проходящих через три его последовательные вершины, выбирается окружность наибольшего радиуса. Докажите, что она содержит его целиком.

Комментарий к решению задачи 20.5. Идея проекции на сферу была предложена М. Л. Концевичем, когда он был школьником. Так решается и следующая задача.

Дано n точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной окружности). Тогда имеется окружность, проходящая через три из них и не содержащая ни одной отмеченной точки внутри, а также окружность, проходящая через три и содержащая внутри все остальные. Имеют место и все промежуточные случаи. (*А. Я. Канель-Белов*)

21.4. Условие. На плоскости отмечено n прямых общего положения, т. е. никакие три не пересекаются в одной точке, никакие две не параллельны и любые три точки пересечения либо не лежат на одной прямой, либо лежат на одной из отмеченных. Сколькими различными способами можно добавить *хорошую* прямую (т. е. не проходящую через точку пересечения двух отмеченных)? Два способа считаются *одинаковыми*, если один можно получить из другого, непрерывно двигая новую прямую так, чтобы она всё время оставалась *хорошей*. (*Фольклор*)

Ответ. $\dfrac{n-1}{8}(n^3-5n^2+22n-8)$.

Решение. Перейдём к проективной плоскости. Пространство прямых на проективной плоскости отличается от пространства прямых на обычной (аффинной) плоскости добавлением одного элемента (бесконечно удалённой прямой). В силу проективной двойственности прямой-«экватору» отвечает «полюс»-точка, соответствующая паре векторов, ортогональных к плоскости экватора. При этом трём прямым, проходящим через точку, отвечают три точки, лежащие на одной прямой, и наоборот. Пространство прямых на проективной плоскости изоморфно ей самой. По двойственности задача для проективной плоскости сводится к следующей.

На проективной плоскости отмечено n точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой и любые три прямые, проходящие через пары точек, либо не имеют общей точки, либо проходят через одну из отмеченных). Сколькими различными способами можно добавить *хорошую* точку (т. е. не лежащую на прямой, соединяющей две отмеченных точки)? Два способа одинаковы, когда один можно получить из другого, непрерывно двигая новую точку так, чтобы она всё время оставалась *хорошей*.

Для решения этой задачи достаточно попарно соединить все отмеченные точки и подсчитать число областей, на которые делят проективную плоскость эти прямые.

У нас $L = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ прямых, попарно соединяющих наши точки. При этом L прямых общего положения делят проективную плоскость на столько же частей, на сколько $L-1$ прямых общего положения делят обычную плоскость (одну из прямых можно объявить «бесконечно удалённой»). Получается $L(L-1)/2+1$ частей, из которых в случае обычной плоскости $2L$ частей неограниченных и, соответственно, $L(L-5)/2+1$ ограниченных.

Наши прямые, однако, не являются прямыми общего положения — имеется n «фокусов» (т. е. отмеченных точек), в которых сходятся по $n-1$ прямых. В каждом из них «схлопнулось» по $(n-1)(n-6)/2+1$ частей, общее количество схлопнувшихся частей равно $n((n-1)(n-6)/2+1)$. В итоге имеем, что искомое число частей составляет

$$\frac{\binom{n}{2}\cdot\left(\binom{n}{2}-1\right)}{2}+1-n\cdot\left(\frac{(n-1)(n-6)}{2}+1\right)=\frac{n-1}{8}(n^3-5n^2+22n-8).$$

Упражнения.

1. В Москве 9 высотных зданий. Приезжий математик хочет найти точку, из которой все здания видны в заданном порядке (считая от МГУ по часовой стрелке). Для любого ли заданного порядка это возможно? А если зданий 5, 6, 7 или 8?

   Указание. Рассмотрите *вырожденные положения* наблюдателя — когда он попадает на прямую, соединяющую два здания. Рассмотрите разбиение плоскости такими прямыми.

2. На сфере отмечено n точек *общего положения*, т. е. никакие три не лежат на одной прямой (дуге большого круга) и, как следствие, никакие две не противоположны. Сколькими способами можно добавить *хорошую* (т. е. не проходящую через отмеченные точки) прямую, если два способа одинаковы, когда один можно получить из другого, непрерывно двигая прямую так, чтобы она всё время оставалась *хорошей*.

3. На единичной сфере отмечено несколько кривых, суммарной длиной меньше π. Докажите, что существует прямая, ни одну из них не пересекающая.

Комментарий. См. статью: *Канель А., Ковальджи А.* Треугольники и катастрофы // Квант. 1992. № 11. С. 42–50, а также `https://www.google.com/search?q="Теорема+Робертса+о+треугольниках"` (*А. Я. Канель-Белов*)

22.1. Условие. Пусть для функции $g(x)$ при всех $x \geqslant 1$ выполняется равенство $g(x)^{g(x)} = x$. Найдите такую элементарную функцию $h(x)$, что $\lim_{x\to\infty}(g(x) - h(x)) = 0$. (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ. $h(x) = \dfrac{\ln x}{\ln\ln x}$.

Решение. Нам потребуется

Лемма. *Пусть $f'(x) \geqslant 1$ в некоторой области значений x. Тогда $|f(A) - f(B)| \geqslant |A - B|$ для любых A, B из этой области.*

Для доказательства леммы достаточно представить ось абсцисс как проволочку, которую функция f растягивает с коэффициентом, равным производной в данной точке. Если он везде больше или равен единице, то длина образа $|f(A) - f(B)|$ не меньше длины исходного отрезка $|A - B|$.

Поскольку при $x>1$ производная функции $x \ln x$ больше единицы, имеем

Следствие. *При $x, y > 1$ выполняется неравенство*

$$|x \ln x - y \ln y| \geqslant |x - y|.$$

Логарифмируя равенство из условия задачи, получаем $g(x) \ln g(x) = \ln x$. Для $h(x) = \dfrac{\ln x}{\ln\ln x}$ в силу следствия имеем

$$|g(x) - h(x)| < |g(x) \ln g(x) - h(x) \ln h(x)| = |\ln x - h(x) \ln h(x)| = \\ = \left|\ln x - \left(\ln x - \frac{\ln x \ln\ln\ln x}{\ln\ln x}\right)\right| \to 0 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Комментарий. В ряде случаев, хотя функция не элементарна, можно найти её асимптотику в виде элементарной функции.

(*А. Я. Канель-Белов*)

22.2. Условие. а) Людям житья не стало от вампиров. Чтобы спасти поголовье людей, добрый волшебник наложил заклятие: 1) каждую ночь может выходить на охоту только один вампир; 2) если вампир ест человека, то следующим днём он превращается в человека и следующей ночью может быть съеден другим вампиром.

Вампир готов стать человеком, но риск быть съеденным другим вампиром ему неприемлем, при этом всем известно, что вампиры бесконечно умные и доверяют интеллектуальным качествам товарищей. Изначально имеется n вампиров. При каких n вампир выйдет на охоту?

б) Пусть вампиры умеют организовываться в банды по $n_1, \ldots, n_k$ вампиров. Если банда решает ночью выйти на охоту, то каждый ест по своему человечку и утром они становятся людьми. Число n называется *экологически равновесным* или просто *экологичным*, если никто из вампиров не собирается выйти на охоту.

Рассмотрим игру: имеется n фантиков, разрешается брать по $n_1, \ldots, n_k$ фантиков. Тот, кто не может сделать ход, — проигрывает. Докажите, что множество экологичных чисел в задаче про вампиров совпадает с множеством чисел в задаче о фантиках, проигрышных для начинающих.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. а) Ответ. При нечётных n. Один вампир гарантированно выходит на охоту. Если их два, то каждый опасается выйти: останется его товарищ, который гарантированно выйдет на охоту и может его съесть. Если вампиров три, то каждый понимает, что ему можно охотиться — оставшиеся два товарища будут бояться друг друга. Поэтому кто-нибудь из вампиров выйдет на охоту. Если их четыре, то первый боится охотиться — ибо понимает, что остаются три и в силу предыдущих рассуждений следующей ночью случится охота и т. д. Легко убедиться по индукции, что при нечётном n какой-нибудь вампир выходит на охоту, а при чётном они боятся друг друга.

б) Пусть множества *экологичных чисел* и *проигрышных для начинающего* определены для всех n, меньших некоторого M, и для таких чисел совпадают. Нам надо проверить, что число M либо принадлежит обоим множествам, либо ни одному не принадлежит.

Если $M - n_i$ при некотором i является числом проигрышным для начинающего, то первый делает ход, забирает n_i фантиков и выигрывает. Если же $M - n_i$ ни для какого i не является числом проигрышным для начинающего, то число M проигрышно для начинающего, ибо любой ход приводит к проигрышу.

Аналогичным образом, если $M - n_i$ при некотором i является экологичным числом, то банда из n_i вампиров сможет смело выйти на охоту. Если же $M - n_i$ ни для какого i не является экологичным числом, то, если банда из n_i вампиров выйдет на охоту, после этого останется неэкологичное число $M - n_i$ вампиров, и какая-то банда вампиров выйдет на охоту следом, что первой банде неприемлемо.

Мы видим, что принадлежность числа M множеству экологичных чисел равносильна принадлежности множеству чисел, проигрышных для начинающего, так что задачи про вампиров и фантики изоморфны.

22.4. Условие. Дана кососимметрическая матрица A. Докажите, что некоторая неотрицательная нетривиальная линейная комбинация её столбцов образует вектор, все координаты которого неотрицательны.

(*И. В. Митрофанов*)

Решение 1. Предположим противное. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — векторы столбцов матрицы.

Определим подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ как множество всевозможных сумм вида $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ при неотрицательных вещественных $a_1, \ldots, a_n$, не все из которых нули. Множество точек в $\mathbb{R}^n$ со всеми положительными координатами обозначим $\mathbb{R}^n_+$. Если S и $\mathbb{R}^n_+$ не пересекаются, то нам потребуется

Теорема о разделяющей гиперплоскости. *Пусть X и Y — два непересекающихся выпуклых непустых подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда существуют такой ненулевой вектор v и такое число c, что $\langle x, v\rangle \leqslant c$ и $\langle y, v\rangle \geqslant c$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$.*

Так как множества S и $\mathbb{R}^n_+$ содержат вместе с любым вектором все сонаправленные ему, то вектор v, полученный из теоремы, будет давать неположительные скалярные произведения с векторами из S и неотрицательные с векторами из $\mathbb{R}^n_+$.

Пусть v имеет координаты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Понятно, что $\lambda_i \geqslant 0$ при всех i. Координаты вектора $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A$ — неположительные числа, так как это координаты скалярных произведений v и v_i. Так как A кососимметрична, то

$$A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T = -((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A)^T$$

— нетривиальная комбинация столбцов матрицы без отрицательных координат.

Решение 2. Пусть K_+ — множество ненулевых векторов с неотрицательными координатами, K_- — множество ненулевых векторов с неположительными координатами, $e_1, \ldots, e_n$ — базисные векторы.

Предположим, что для любого $v \in K_+$ найдётся e_i такой, что $e_iAv < 0$. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определённое как

$$f(v) = \min(e_1Av, 0)e_1 + \ldots + \min(e_nAv, 0)e_n$$

(иными словами, вектор v переходит в Av, а затем все положительные координаты заменяются нулями).

Отображение f непрерывно и переводит K_+ в K_-. Обозначив $s(v)$ сумму координат вектора v, рассмотрим отображение

$$g\colon v \to \frac{f(v)}{s(f(v))}.$$

Оно переводит в себя множество неотрицательных векторов с суммой координат 1. Но такое множество векторов гомеоморфно $(n-1)$-мерному шару, поэтому здесь применима

Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку.*

Таким образом, существует вектор $v \in K_+$, для которого $g(v) = v$. Это значит, что $f(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda > 0$. Так как A кососимметрична, то $\langle v, Av\rangle = 0$. Следовательно,

$$\langle f(v), f(v) - Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle - \lambda\langle v, Av\rangle \neq 0.$$

Но из формулы для $f(v)$ следует, что каждая координата равна нулю хотя бы у одного из векторов $f(v)$, $f(v) - Av = \Delta$. Противоречие.

Комментарий. Предположим, что два игрока играют в следующую игру: первый загадывает номер столбца матрицы A, второй загадывает номер её строки, после чего они открываются, и первый получает от второго столько рублей, какое число написано на пересечении загаданных строки и столбца (или отдаёт, если число меньше нуля). Тогда утверждение задачи можно понимать следующим образом: у первого игрока есть такая *вероятностная стратегия* (т. е. распределение вероятностей по столбцам), что при любой вероятностной стратегии второго игрока матожидание выигрыша первого неотрицательно. Если мы возьмём стратегию для первого и аналогично построенную стратегию для второго, то получим *равновесие Нэша* этой игры, матожидание выигрышей в нём будет нулевым.

(*И. Митрофанов*)