
Геометрия: классика и современность

Теорема о семи окружностях и другие новые теоремы

С. Дж. А. Ивлин, Г. Б. Мани-Каутс, Дж. А. Тиррелл

Вышедшая в 1974 г. книга С. J. A. Evelin, G. V. Money-Coutts, J. A. Tuttle «The seven circles theorem and other new theorems» состоит из трёх независимых параграфов. Ниже публикуется перевод третьего параграфа. Сохранены авторские обозначения. Перевод второго параграфа опубликован в выпуске 21 «Математического просвещения». Редакция признательна С. В. Маркелову, обратившему внимание на эту книгу.

§ 3. ЦЕПОЧКИ ОКРУЖНОСТЕЙ

Цепочкой окружностей в этом параграфе будет последовательность окружностей S_1, S_2, \dots, S_n , каждая из которых касается соседних, т. е. S_1 касается S_2 , S_2 касается S_3, \dots, S_{n-1} касается S_n . Цепочку, в которой S_n также касается S_1 , назовём *замкнутой*. В противном случае будем называть цепочку *открытой*.

Все теоремы этого параграфа связаны с замкнутыми цепочками шести окружностей. Интересно, что каждый раз их формулировки требуют гораздо больше внимания, чем кажется на первый взгляд!

3.1. ТЕОРЕМА О СЕМИ ОКРУЖНОСТЯХ

Наша первая цепочка, к которой относится теорема о семи окружностях, выглядит достаточно просто (рис. 1а). Однако, как мы уже отметили

Перевод А. А. Заславского.

выше, точно изложить соответствующий результат не так легко. Начнём со следующей предварительной формулировки, которая верна лишь при некотором дополнительном условии.

УТВЕРЖДЕНИЕ О СЕМИ ОКРУЖНОСТЯХ. Пусть a, b', c, a', b, c' — замкнутая цепочка окружностей, касающихся окружности ω в шести различных точках A, B', C, A', B, C' соответственно. Тогда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Сразу добавим, что если точки A, B', C, A', B, C' лежат на ω именно в таком циклическом порядке, то утверждение верно без дополнительных условий. Рисунок 1 иллюстрирует именно этот случай. Однако точки могут лежать на ω и в другом порядке; на рис. 2 и 3 приведены примеры, когда утверждение верно, а на рис. 4 — когда не верно.

Чтобы разобраться в ситуации, посмотрим на все конфигурации, иллюстрирующие утверждение, временно исключив из них последнюю окружность c' . Можно заметить, что во всех случаях существуют две окружности, касающиеся a, b и ω , причём если в качестве c' взять одну из них, то без дополнительных условий утверждение верно, а если другую, то неверно. Хочется сказать, что утверждение верно в 50 % случаев! Везде, кроме рис. 4, окружность c' выбрана правильно, а на рис. 4 сделан неверный выбор. Для читателя не составит труда построить на рис. 4 другую окружность c' , для

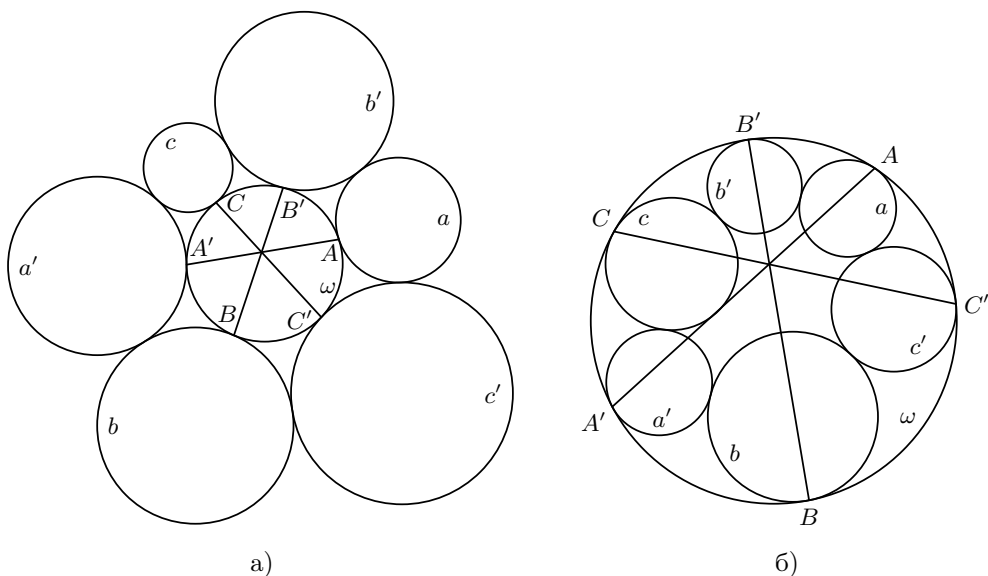


Рис. 1. Примеры, когда утверждение о семи окружностях верно без дополнительных условий

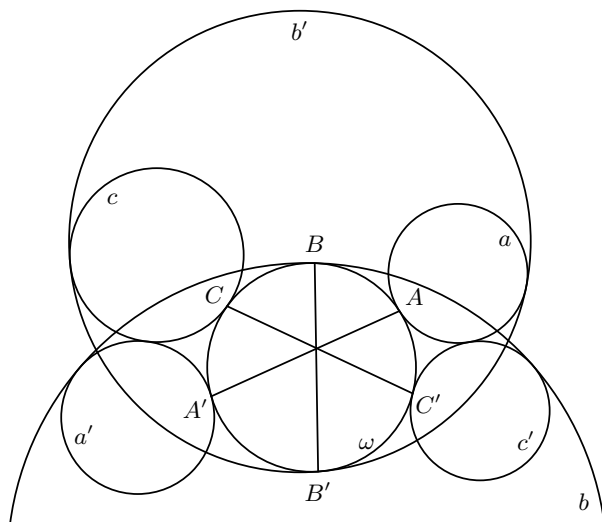


Рис. 2. Пример, когда утверждение о семи окружностях верно

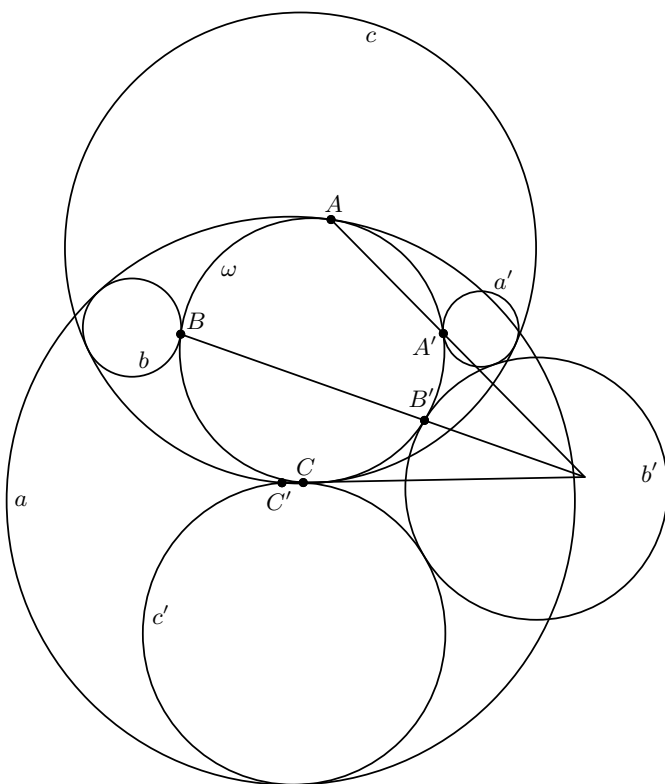


Рис. 3. Пример, когда утверждение о семи окружностях верно

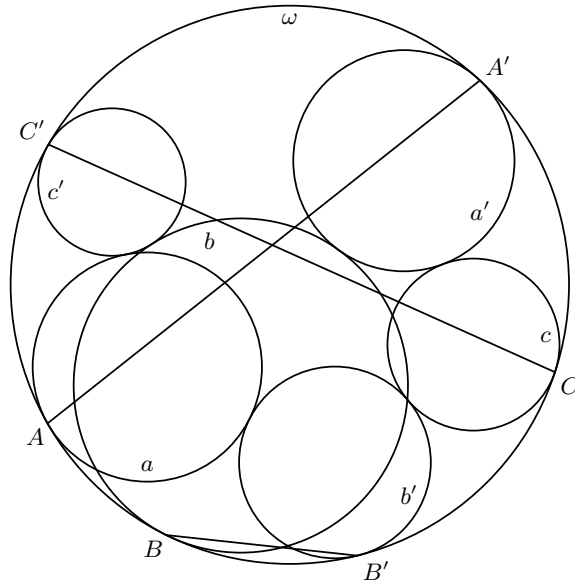


Рис. 4. Пример, когда утверждение о семи окружностях неверно

которой прямые AA' , BB' и CC' будут пересекаться в одной точке. Если исследовать всевозможные расположения окружностей, станет ясно, что справедливость утверждения зависит от некоторого условия на порядок точек A, B', C, A', B, C' на окружности ω .

Для точной формулировки этого условия введём понятие *положительной дуги*: пусть P, Q, R — три точки окружности; дугу между P и R , содержащую Q , будем обозначать (PQR) и называть положительной дугой, если движение по ней от P к R происходит в положительном (против часовой стрелки) направлении. Теперь завершим формулировку теоремы о семи окружностях (используем обозначения из утверждения на с. 52).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть среди четырёх дуг $(BC'A')$, $(C'AA')$, $(AB'A')$, $(B'SA')$ чётное число положительных. Тогда утверждение о семи окружностях верно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем инверсию с центром A' . Сохраняя для полученной фигуры исходные обозначения, получим:

(i) a' и ω являются параллельными прямыми (как образы окружностей, касающихся в точке A');

(ii) b и c , касаясь параллельных прямых a' и ω , являются *равными* окружностями;

(iii) b, c', a, b', c образуют открытую цепочку окружностей, касающихся ω в точках B, C', A, B', C соответственно.

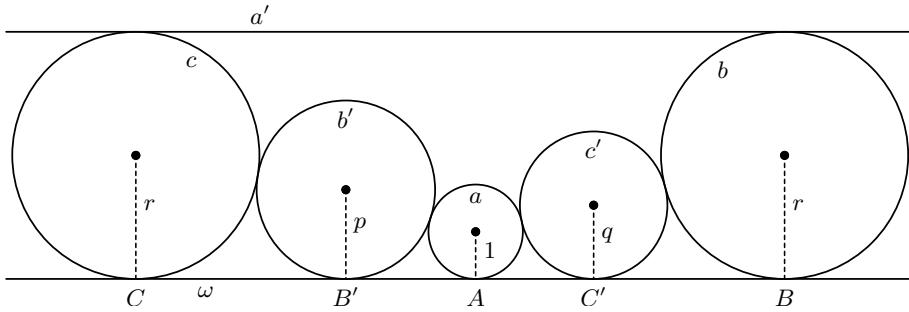


Рис. 5. Конфигурация после инверсии

Одна из возможных фигур изображена на рис. 5. Могут возникнуть и другие весьма различные конфигурации, однако все они должны удовлетворять следующим двум условиям.

(а) Все окружности в образе инверсии лежат по одну сторону от ω : иначе нашлись бы две касающиеся окружности, лежащие по разные стороны от ω , т. е. касающиеся ω в одной точке, что противоречит условиям теоремы. В терминах исходной конфигурации это означает, что окружности a, b', c, a', b, c' лежат либо все вне, либо все внутри ω .

(б) Все касания окружностей в открытой цепочке b, c', a, b', c являются внешними (хотя в исходной фигуре могло быть иначе). Действительно, окружности, касающиеся друг друга внутренним образом, не могли бы касаться ω в разных точках.

Читателю будет полезно в процессе доказательства обращаться к рис. 5, однако доказательство проходит для всех возможных конфигураций.

На рис. 5 не изображена точка, в которой находился центр инверсии, так как её положение несущественно для дальнейшего. Тем не менее, нам понадобится обозначение для этой точки, поэтому будем называть её O (обозначение A' не годится, так как точка A' при инверсии перешла в бесконечно удалённую). Образами прямых AA', BB' и CC' при инверсии будут соответственно прямая OA и окружности OBV' и OCC' . А поскольку пучок прямых при инверсии (если её центр не совпадает с их общей точкой) переходит в пучок соосных окружностей, наша теорема означает, что прямая OA является радикальной осью окружностей OBV' и OCC' . Так как O лежит на этих окружностях, достаточно доказать, что A лежит на их радикальной оси, т. е.

$$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AC}) \tag{1}$$

(эти выражения равны степеням точки A относительно обеих окружностей). Равенство (1) относится к *направленным отрезкам* на прямой ω , и его нужно доказать с учётом и абсолютных величин, и знаков.

Используя равенства

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'B}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C},$$

приведём (1) к виду

$$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'B}) = (\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{AC'}). \quad (2)$$

Прежде всего покажем, что левая и правая части (2) имеют одинаковый знак. Согласно дополнительному условию теоремы, среди дуг $(BC'A')$, $(C'AA')$, $(AB'A')$, $(B'CA')$ в исходной фигуре чётное число положительных; значит, после инверсии, переводящей A' в бесконечно удалённую точку, чётное число из отрезков BC' , $C'A$, AB' , $B'C$ имеет направление, совпадающее с положительным направлением на прямой ω (независимо от того, какое из двух направлений мы считаем положительным). Следовательно, знаки частей в (2) совпадают.

Осталось показать, что правая и левая части (2) равны по абсолютной величине. Для этого будем считать, что радиусы окружностей a , b' , c' на рис. 5 равны 1, p и q соответственно, а радиус окружностей b и c равен r . Элементарно доказывается, что если окружности с радиусами r_1 , r_2 касаются внешним образом, то длина их общей касательной равна $2\sqrt{r_1 r_2}$. И так как любые соседние окружности в открытой цепочке b , c' , a , b' , c касаются внешним образом, то (без учёта знаков)

$$BC' = 2\sqrt{qr}, \quad C'A = 2\sqrt{q}, \quad AB' = 2\sqrt{p}, \quad B'C = 2\sqrt{pr}.$$

Итак, обе части (2) равны по модулю $4\sqrt{pqr}$, что и доказывает теорему. \square

Попутно заметим, что левая и правая части (2) равны по модулю, даже если применить инверсию к «неправильной» конфигурации рис. 4, результат изображён на рис. 6. В этом случае теорема неверна из-за того, что знаки частей в (2) противоположны.

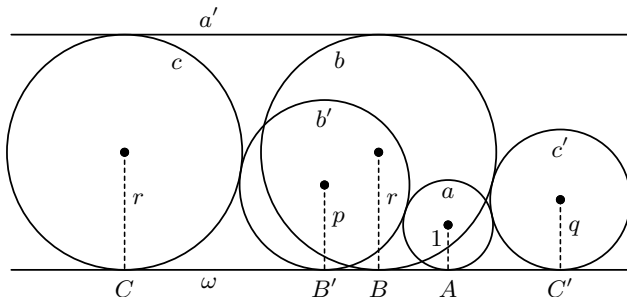


Рис. 6. Пример, когда утверждение о семи окружностях неверно.
Конфигурация после инверсии

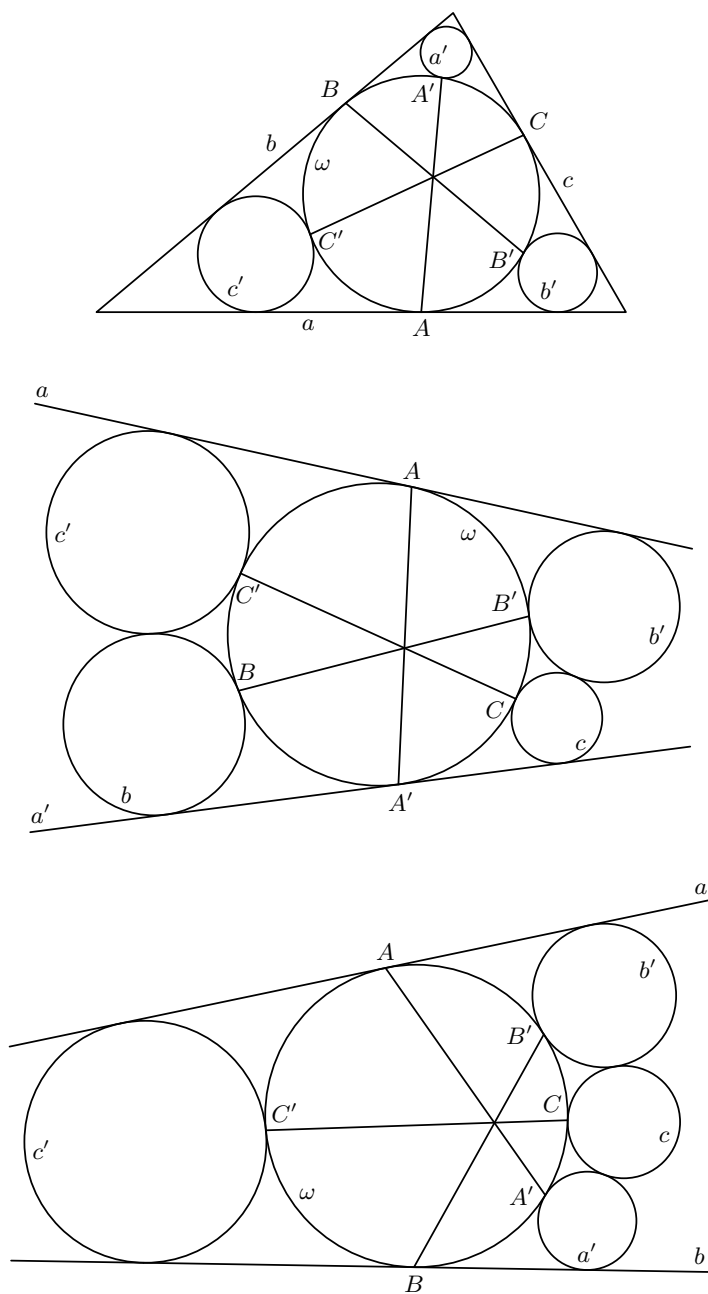


Рис. 7. К теореме о семи окружностях. Вырожденные случаи

Также можно заметить, что (в правильной конфигурации) точка пересечения прямых AA' , BB' и CC' является точкой Бриансона шестиугольника, образованного касательными к ω в точках A, B', C, A', B, C' . Это непосредственно следует из известного факта, что если хорды AA' и BB' окружности (или любой коники) пересекаются в точке X , то X лежит на прямой, соединяющей полюса прямых AB' и $A'B$.

Наконец, заметим, что утверждение теоремы можно переформулировать следующим образом: (A, A') , (B, B') , (C, C') являются тремя парами соответственных точек некоторой инволюции окружности ω . Отсюда можно получить нетривиальное утверждение для случая, когда ω вырождается в прямую.

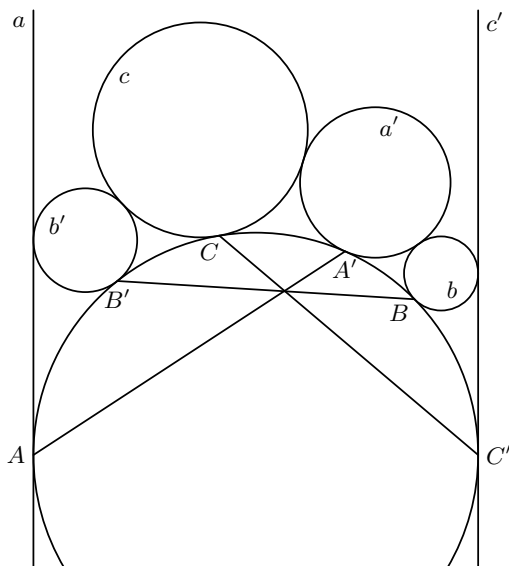


Рис. 8. К теореме о семи окружностях. Вырожденный случай

Другие специальные случаи теоремы получаются, когда в прямые вырождаются некоторые из окружностей a, b', c, a', b, c' ; см. рис. 7–8 (на рис. 8 прямые a и c' параллельны).

3.2. ТЕОРЕМА О ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ И ШЕСТИ ОКРУЖНОСТЯХ

Теорема, обсуждаемая в этом пункте, как мы увидим, родственна теореме о семи окружностях. Было бы интересно получить более общий результат, включающий обе эти теоремы как частные случаи, но нам пока не удалось доказать простую теорему такого рода.

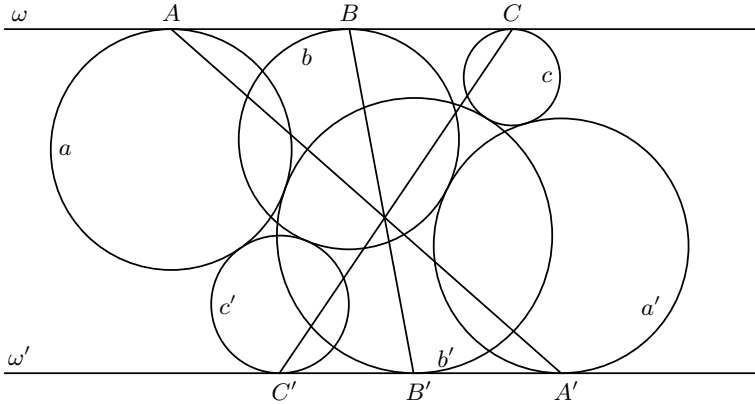


Рис. 9. К теореме 3.2 о двух параллельных прямых и шести окружностях

Идея настоящей теоремы заключается в замене окружности ω из теоремы о семи окружностях парой параллельных прямых ω и ω' и рассмотрении замкнутой цепочки окружностей a, b', c, a', b, c' , поочерёдно касающихся ω и ω' (рис. 9). Тогда при выполнении некоторых условий верно заключение теоремы о семи окружностях, т. е. прямые AA', BB', CC' , соединяющие «противоположные» точки касания, пересекаются в одной точке. Однако и здесь, чтобы точно сформулировать теорему, необходима аккуратность. Так, рассматривая рис. 9, можно заметить, что при данной окружности a окружность b' достаточно большого радиуса может пересекать прямую ω , и в этом случае окружность c может касаться b' как внешним, так и внутренним образом, а прямой ω — как «сверху», так и «снизу».

Чтобы ограничить разнообразие случаев, мы сосредоточимся на конфигурациях, в которых:

- (а) все окружности касаются друг друга внешним образом;
- (б) окружности a, b, c касаются ω снизу;
- (в) окружности a', b', c' касаются ω' сверху.

При этих условиях теорема верна. На самом деле она верна при гораздо более общих условиях, но мы отложим обсуждение этого вопроса до конца этого пункта. Здесь же сформулируем доказываемое утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть a, b', c, a', b, c' — замкнутая цепочка окружностей, поочерёдно касающихся параллельных прямых ω и ω' в точках A, B', C, A', B, C' соответственно, причём выполняются все условия (а)–(в). Тогда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим расстояние между ω и ω' через $2k$. Наше доказательство будет основано на многократном применении следующей простой тригонометрической леммы.

ЛЕММА. Пусть a — окружность с центром X , касающаяся ω снизу, а b' — окружность с центром Y' , касающаяся ω' сверху, причём касание a и b' внешнее. Если горизонтальная проекция отрезка $X Y'$ равна $2rk$, то его вертикальная проекция равна $k(1 - r^2)$, причём эта величина положительна, если X лежит выше Y' , и отрицательна, если X ниже Y' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Обозначим через x и y' радиусы окружностей a и b' соответственно, а через A и B' — точки их касания с ω и ω' . Пусть $\theta = \angle T Y' X$, где T — произвольная точка на продолжении $B' Y'$ за точку Y' . Два возможных случая изображены на рис. 10: на первом угол θ острый, Y' лежит ниже, чем X , и вертикальная проекция отрезка $X Y'$ положительна; на втором угол θ тупой, Y' лежит выше, чем X , и вертикальная проекция отрезка $X Y'$ отрицательна.

Рассмотрим ломаную $A X Y' B'$, её вертикальная проекция равна $2k$ (расстоянию между ω и ω'), поэтому получаем $x + (x + y') \cos \theta + y' = 2k$, т. е.

$$x + y' = \frac{2k}{1 + \cos \theta}. \quad (1)$$

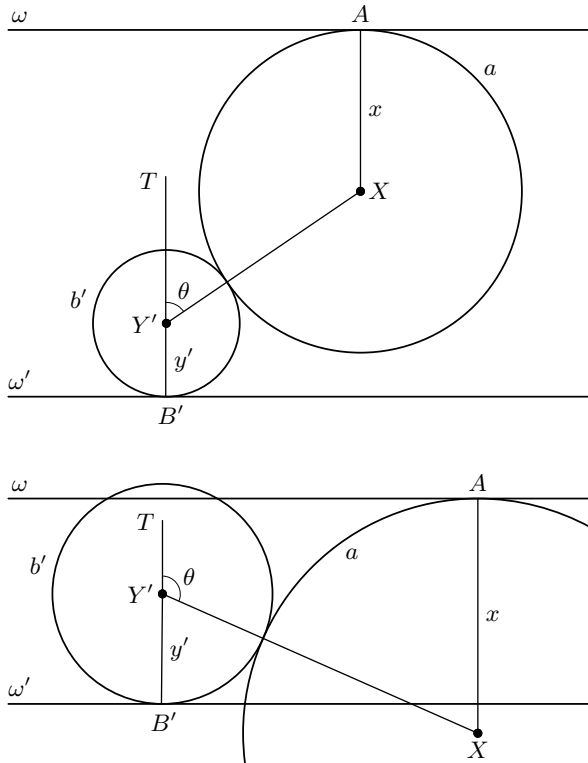


Рис. 10. К доказательству леммы

С другой стороны, горизонтальная h и вертикальная v проекции отрезка XY' равны

$$h = (x + y') \sin \theta, \quad v = (x + y') \cos \theta,$$

причём v положительна, если угол θ острый, и отрицательна, если θ тупой. С учётом (1) получаем

$$h = \frac{2k \sin \theta}{1 + \cos \theta}, \quad v = \frac{2k \cos \theta}{1 + \cos \theta}.$$

Теперь, поскольку

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2},$$

получаем $h = 2kp$, $v = k(1 - p^2)$, где $p = \operatorname{tg}(\theta/2)$. Лемма доказана. \square

Возвращаемся к доказательству теоремы 3.2. Пусть X, Y', Z, X', Y, Z' — центры окружностей a, b', c, a', b, c' соответственно. Обозначим через $2kp, 2kq, 2kr, 2ks, 2kt, 2ku$ горизонтальные проекции отрезков $XY', Y'Z, ZX', X'Y, YZ', Z'X$ соответственно. В формулировке леммы знак горизонтальной проекции был несущественным; однако сейчас будем считать p положительным, если Y' лежит правее X , и отрицательным в противном случае, и аналогично зададим знаки q, r, s, t, u . Так как ломаная $XY'ZX'Y'Z'X$ замкнута, её горизонтальная проекция равна нулю, т. е.

$$p + q + r + s + t + u = 0. \quad (2)$$

Сумма вертикальных проекций также равна 0, что с учётом леммы даёт

$$k(1 - p^2) - k(1 - q^2) + k(1 - r^2) - k(1 - s^2) + k(1 - t^2) - k(1 - u^2) = 0. \quad (3)$$

Перепишем (3) в виде

$$r^2 - q^2 - s^2 = u^2 - p^2 - t^2. \quad (4)$$

Из (2) получаем

$$(r + q + s)^2 = (u + p + t)^2. \quad (5)$$

Сложив (4) и (5) и разделив на 2, получим

$$(r + s)(q + r) = (u + p)(t + u),$$

т. е.

$$\frac{r + s}{t + u} = \frac{u + p}{q + r}. \quad (6)$$

Но $k(r + s)$ — это сумма горизонтальных проекций отрезков ZX' и $X'Y$, т. е. горизонтальная проекция отрезка ZY , которая, очевидно, равна CB .

Аналогично $k(t + u)$, $k(u + p)$, $k(q + r)$ равны соответственно BA , $C'B'$ и $B'A'$. Поэтому (6) эквивалентно равенству

$$\frac{CB}{BA} = \frac{C'B'}{B'A'},$$

а так как A, B, C и A', B', C' лежат на параллельных прямых ω и ω' соответственно, то AA', BB', CC' проходят через одну точку. Теорема доказана. \square

Заметим, что, за исключением леммы, доказательство базируется на прямых алгебраических выкладках, т. е. оно остаётся верным во всех случаях, когда верно утверждение леммы (независимо от того, верны ли условия о внешнем касании окружностей и т. п.). Но лемма оказывается верной и при значительном ослаблении сформулированных выше условий. А именно, если горизонтальная проекция отрезка XU' равна $2kr$, то вертикальная равна (с правильным знаком) $k(1 - p^2)$ в следующих случаях:

(i) если одна окружность касается ω снизу, другая касается ω' сверху и окружности касаются внешним образом;

(ii) если обе окружности касаются соответственно ω и ω' сверху и касаются внутренним образом;

(iii) если обе окружности касаются соответственно ω и ω' снизу и касаются внутренним образом.

Проверку случаев (ii) и (iii) оставляем читателю; наше доказательство, разумеется, соответствовало случаю (i). Поскольку при условии справедливости леммы доказательство теоремы сводится к алгебраическим выкладкам, её можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.2'. *Если a, b', c, a', b, c' — замкнутая цепочка окружностей, поочерёдно касающихся параллельных прямых ω и ω' в точках A, B', C, A', B, C' соответственно, причём для каждой пары соседних окружностей выполнено какое-либо из условий (i), (ii), (iii), то прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.*

На рис. 11 пары (b, c') и (b', c) удовлетворяют условию (i), пары (a, b') и (a, c') — условию (ii), пары (a', b) и (a', c) — условию (iii).

В заключение этого пункта рассмотрим не лишённый изящества рис. 12. С одной стороны, это частный случай доказанной теоремы, поэтому прямые AA', BB', CC' пересекаются в некоторой точке X . С другой стороны, это частный случай теоремы о семи окружностях, поэтому прямые BB', DD', EE' пересекаются в некоторой точке Y . В качестве упражнения предлагаем читателю показать, что *точки X и Y совпадают*. (Подсказка: пусть K и K' — середины BC и $B'C'$, тогда KK' пересекается с BB' и в точке X , и в точке Y .)

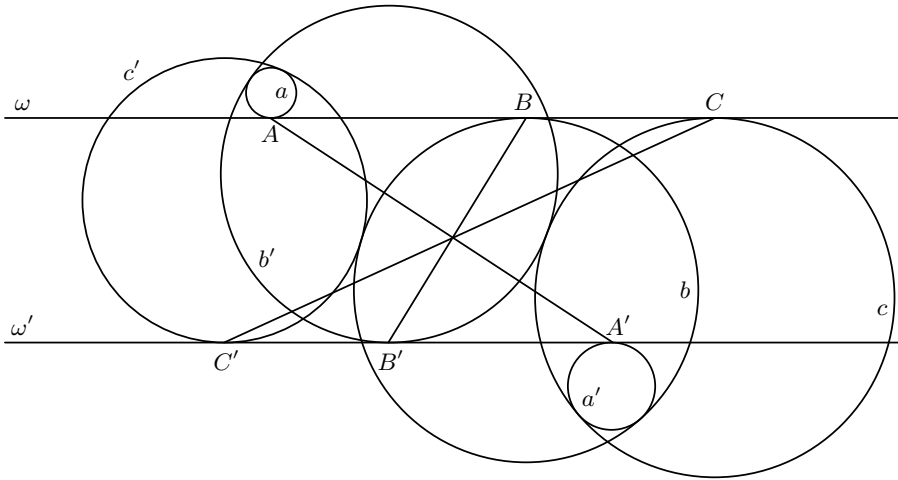


Рис. 11. Одна из конфигураций в теореме 3.2 о двух параллельных прямых и шести окружностях

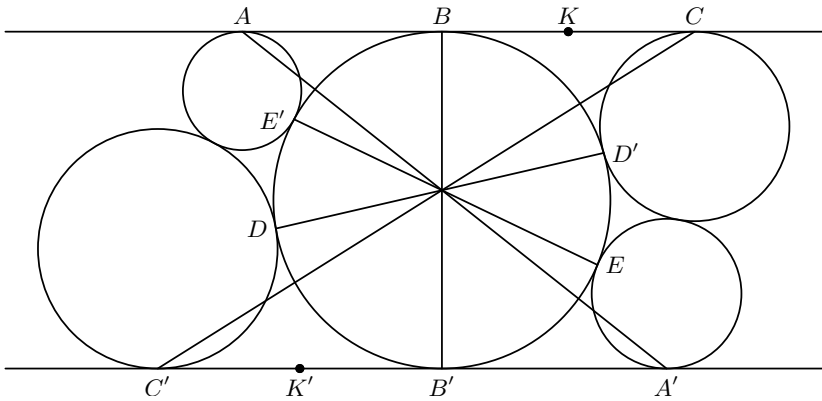


Рис. 12. Частный случай обеих теорем 3.1 и 3.2

3.3. ТЕОРЕМА О ТРЕУГОЛЬНИКЕ И ШЕСТИ ОКРУЖНОСТЯХ

Рассмотрим цепочку окружностей в некотором треугольнике ABC . Начнём с произвольной окружности x , касающейся сторон CA и AB (рис. 13). Построим цепочку, которую назовём *треугольной*, следующим образом:

- окружность y касается AB, BC и x ,
- окружность z касается BC, CA и y ,
- окружность x' касается CA, AB и z ,
- окружность y' касается AB, BC и x' ,
- окружность z' касается BC, CA и y' ,
- окружность x'' касается CA, AB и z' .

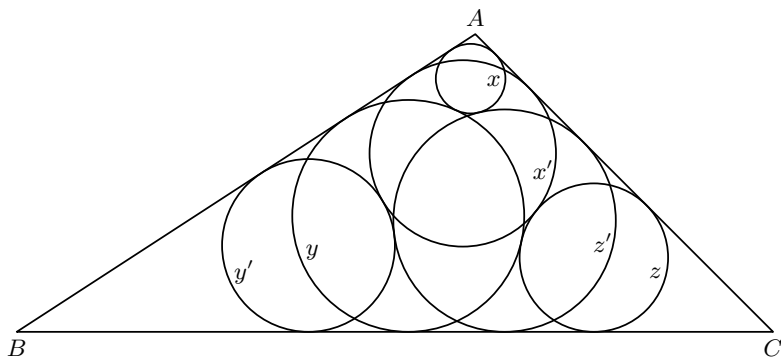


Рис. 13. Треугольная цепочка

Конечно, этих условий недостаточно, чтобы однозначно задать окружности y, z, \dots, x'' ; на каждом шаге для этого есть несколько вариантов. Однако, как будет показано в этом пункте, можно на каждом шаге осуществлять выбор так, что окружность x'' совпадёт с x , т. е. мы получим замкнутую треугольную цепочку из шести окружностей.

Нетрудно заметить тесную связь этого утверждения с классической задачей Мальфатти, которую можно сформулировать так: найти окружность x , которая совпадает с соответствующей окружностью x' . Однако если задача Мальфатти имеет лишь конечное число решений¹⁾, то наша цепочка окружностей замыкается для любой окружности x .

Один из способов ограничить выбор на каждом шаге заключается в требовании, чтобы все окружности лежали внутри треугольника ABC . Легко понять, что тогда на каждом шаге существует не более одной подходящей окружности²⁾, причём получается самая естественная конфигурация из возможных в теореме. Поэтому мы начнём с доказательства теоремы для этого случая, а другие разберём позже.

ТЕОРЕМА 3.3. Если x, y, z, x', y', z', x'' — цепочка окружностей, вписанных в углы треугольника ABC и лежащих внутри него, то x'' совпадает с x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Окружности лежат внутри треугольника, поэтому (i) центры окружностей лежат на соответствующих внутренних биссектрисах треугольника; (ii) все касания в цепочке внешние.

¹⁾ Решение задачи Мальфатти методом, похожим на приведённый в этом пункте, см. в [3]. — Прим. перев.

²⁾ Впрочем, такая цепочка может вообще не существовать. Например, если угол B тупой, а окружность x достаточно мала, то не существует окружности y , лежащей внутри треугольника.

Как обычно, обозначим через a, b, c длины сторон BC, CA, AB , и пусть l, m, n, l', m', n', l'' — длины касательных к x, y, z, x', y', z', x'' из A, B, C, A, B, C, A соответственно. Идея доказательства состоит в том, чтобы получить соотношения между соседними величинами l, m, n, l', m', n', l'' и, исключив из этих соотношений m, n, l', m', n' , вывести равенство $l = l''$, из которого, очевидно, будет следовать утверждение теоремы.

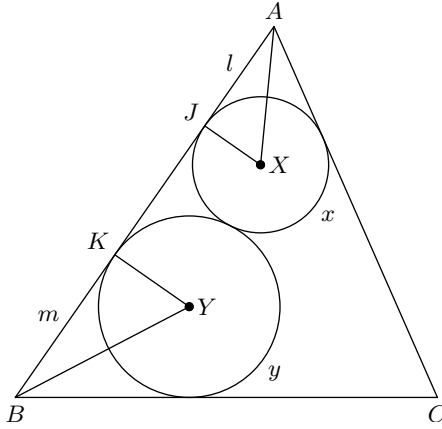


Рис. 14. К теореме 3.3 о треугольнике и шести окружностях

Выведем для начала соотношение между l и m . На рис. 14 изображены окружности x и y , их центры X и Y , а также точки J и K их касания со стороной AB . По определению $AJ = l$ и $BK = m$. Так как X лежит на внутренней биссектрисе угла A , радиус окружности x равен $JX = l \operatorname{tg}(A/2)$. Аналогично радиус окружности y равен $KY = m \operatorname{tg}(B/2)$. Как отмечено в п. 3.1, общая касательная окружностей с радиусами r_1, r_2 , касающихся внешним образом, равна $2\sqrt{r_1 r_2}$; следовательно,

$$JK = 2\sqrt{lm \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}}.$$

Поскольку $AB = AJ + JK + BK$, выполнено равенство

$$c = l + m + 2\sqrt{lm \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}}. \quad (1)$$

Теперь, используя известные формулы, получаем, положив $s = (a + b + c)/2$:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \frac{s-c}{s}.$$

Поэтому (1) приводится к виду

$$c = l + m + 2\sqrt{lm}\sqrt{1 - \frac{c}{s}}, \quad (2)$$

что и даёт нужное соотношение между l и m .

Аналогично получаем, что m и n связаны равенством

$$a = m + n + 2\sqrt{mn}\sqrt{1 - \frac{a}{s}},$$

и т. д., всего имеем шесть равенств.

Чтобы исключить из этих равенств m, n, l', m', n' , воспользуемся следующим любопытным приёмом. Обозначим через p, q, r, p', q', r', p'' значения квадратных корней из l, m, n, l', m', n', l'' , а через f, g, h и t — значения корней из a, b, c и s . Определим также тупые углы θ, φ, ψ следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\sqrt{1 - \frac{a}{s}} = -\sqrt{1 - \frac{f^2}{t^2}}, & \sin \theta &= \frac{f}{t}, \\ \cos \varphi &= -\sqrt{1 - \frac{b}{s}} = -\sqrt{1 - \frac{g^2}{t^2}}, & \sin \varphi &= \frac{g}{t}, \\ \cos \psi &= -\sqrt{1 - \frac{c}{s}} = -\sqrt{1 - \frac{h^2}{t^2}}, & \sin \psi &= \frac{h}{t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Это возможно, поскольку подкоренные выражения лежат между 0 и 1. Теперь (2) можно записать в виде

$$h^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \psi, \quad (4)$$

а пять других равенств приводятся к аналогичному виду с заменой h, p, q, ψ на соответствующие величины. Поскольку наша цель — доказать, что $l = l''$, исключим из (4) и пяти аналогичных равенств переменные q, r, p', q', r' и покажем, что $p = p''$.

Уравнение (4) выражает теорему косинусов для треугольника со сторонами p, q, h и углом ψ , противолежащим h ; пять остальных соотношений выражают теорему косинусов для других пяти треугольников. Два из этих шести треугольников изображены на рис. 15а.

Заметим, что радиусы описанных окружностей всех этих треугольников равны. Действительно, по теореме синусов диаметр описанной окружности первого треугольника равен $h/\sin \psi$, что, согласно (3), равно t ; значение t получается и для остальных пяти треугольников. Следовательно, если у двух треугольников на рис. 15а совместить стороны, равные q , то их описанные окружности тоже совместятся. На рис. 15б показаны три совмещённых таким образом треугольника. Продолжая этот процесс, можно впи-

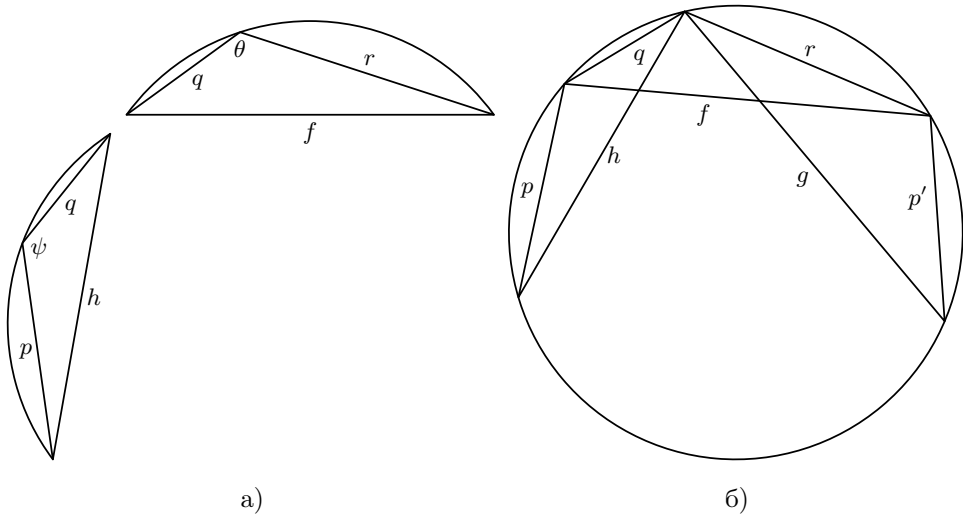


Рис. 15. Совмещение треугольников

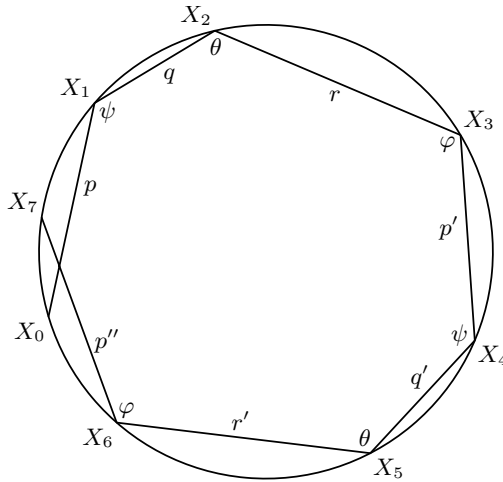


Рис. 16. Описанная окружность шести треугольников

сать в одну окружность все шесть треугольников, как показано на рис. 16 (некоторые отрезки для удобства удалены).

Итак, мы получили вписанную в окружность ломаную $X_0 \dots X_7$ (рис. 16) с углами ψ в вершинах X_1, X_4 , углами θ в вершинах X_2, X_5 и углами φ в вершинах X_3, X_6 ; наша цель — доказать, что $p = p''$, т.е. $X_0X_1 = X_6X_7$. Для этого заметим, что треугольники $X_0X_2X_4$ и $X_3X_5X_7$ равны, поскольку $X_0X_2 = X_3X_5 = h$, $X_2X_4 = X_5X_7 = g$ и углы, противоположные этим

сторонам, опираются на равные дуги. Значит, равны углы $X_0X_2X_4$ и $X_3X_5X_7$. Вычитая эти углы³⁾ из углов $X_1X_2X_3$ и $X_4X_5X_6$, равных θ , получим

$$\angle X_0X_2X_1 + \angle X_3X_2X_4 = \angle X_3X_5X_4 + \angle X_6X_5X_7. \quad (5)$$

Поскольку углы $X_3X_2X_4$ и $X_3X_5X_4$ опираются на одну дугу, из (5) имеем

$$\angle X_0X_2X_1 = \angle X_6X_5X_7.$$

Следовательно, равны и соответствующие этим углам хорды X_0X_1 и X_6X_7 , т. е. $p = p''$. Теорема 3.3 доказана. \square

Вернёмся теперь к описанию других случаев, когда треугольная цепочка замыкается. Ослабим условие, что окружности лежат внутри треугольника, потребовав лишь, чтобы центры окружностей лежали на внутренних биссектрисах его соответствующих углов. Тогда для данной окружности x окружность y можно выбрать тремя различными способами (два из которых при некоторых x приводят к мнимым окружностям).

а) Один из этих способов, который мы назовём *специальным* (он всегда даёт вещественную окружность), существенно отличается от двух остальных: при нём y касается AB в той же точке, что и x (и, следовательно, касается x внутренним образом). Если мы выбрали y специальным способом, то и окружность z надо выбрать специальным способом (касающейся BC в той же точке, что и y), и т. д. Такая цепочка обязательно замыкается (рис. 17).

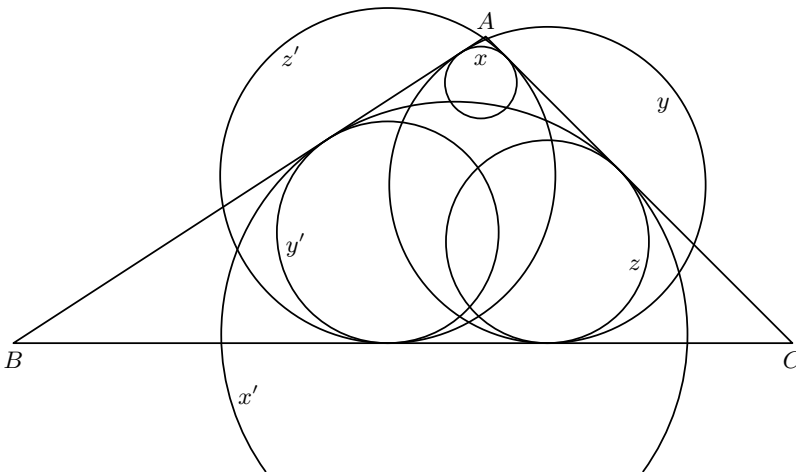


Рис. 17. Специальный выбор окружностей

³⁾ В общем случае нужно рассматривать направленные углы. — Прим. ред.

Доказательство простое: если, как и раньше, обозначить через l, m, n, l', m', n', l'' длины соответствующих касательных, то

$$\begin{aligned} l + m &= c, & m + n &= a, & n + l' &= b, \\ l' + m' &= c, & m' + n' &= a, & n' + l'' &= b. \end{aligned}$$

Отсюда $l = l''$, что и требовалось.

б) Два других способа дают вещественную окружность тогда и только тогда, когда x не лежит целиком вне треугольника; при этом, очевидно, y касается x внешним образом. Легко убедиться, что, при сохранении введённых ранее обозначений, m и l по-прежнему удовлетворяют соотношению (2), однако нужно использовать оба знака квадратного корня (соответственно двум возможностям выбора y). Поэтому будет удобно переписать (2) без иррациональностей:

$$s(c - l - m)^2 = 4(s - c)lm; \quad (6)$$

при данном l получаем квадратное уравнение относительно m , имеющее вещественные (лежащие между 0 и s) корни тогда и только тогда, когда l лежит между 0 и s . Это подтверждает сделанное выше утверждение об условиях вещественности y ⁴.

Если теперь на каждом шаге построения треугольной цепочки выбирать один из двух неспециальных способов, то после шести шагов мы при данной окружности x получим 64 возможности для окружности x'' ; наша задача — определить, сколько из этих окружностей совпадают с x . С алгебраической точки зрения, мы имеем уравнение (6) и пять аналогичных соотношений для последующих шагов. Исключая m, n, l', m', n' , получаем l'' как 64-значную функцию от l ; нужно определить, сколько из этих 64 значений равны l .

Эту задачу можно решить методом, применённым выше для случая окружностей, лежащих внутри треугольника. Однако представляет интерес и альтернативный подход. Заменим l, m, n, l', m', n', l'' новыми переменными $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda''$:

$$l = s \sin^2 \lambda, \quad m = s \sin^2 \mu, \quad \dots, \quad l'' = s \sin^2 \lambda'', \quad (7)$$

новые переменные определяются с точностью до знака по модулю π . В новых переменных уравнение (6) приводится к виду $\cos 2\mu = \cos(2\lambda \pm 2\psi)$, где ψ определено⁵ в соответствии с (3). Следовательно,

$$\mu = \pm\lambda \pm \psi \pmod{\pi};$$

⁴ Если x совпадает с вневписанной окружностью, то $l = s$, откуда следует сказанное.

⁵ Уравнение (6) выражает теорему косинусов для треугольника с углами, по модулю π равными $\pm\psi, \pm\lambda, \pm\mu$, откуда следует нужное соотношение. — *Прим. перев.*

аналогично пять остальных соотношений приводятся к виду

$$\nu = \pm\mu \pm \theta \pmod{\pi}, \quad \dots, \quad \lambda'' = \pm\nu' \pm \varphi \pmod{\pi}.$$

Таким образом,

$$\lambda'' = \pm\lambda + (\pm\psi \pm \theta \pm \varphi \pm \psi \pm \theta \pm \varphi) \pmod{\pi}, \quad (8)$$

где выбор знаков в правой части соответствует выбору одного из двух способов на каждом шаге построения цепочки. Если удастся выбрать знаки так, что $\lambda'' = \pm\lambda$, то в силу (7) получим, что $l'' = l$. Из (8) следует, что первые три знака можно выбрать произвольно, после чего остальные нужно выбрать так, чтобы слагаемые попарно уничтожились. Поэтому из 64 возможных при данной окружности x неспециальных цепочек замыкаются восемь.

Сформулируем окончательный результат.

ТЕОРЕМА 3.3'. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC , а центры окружностей треугольной цепочки x, y, \dots лежат на биссектрисах AI, BI, CI . Тогда:

- а) если на каждом шаге окружность выбирается специальным образом, то цепочка замыкается;
- б) если на каждом шаге окружность выбирается неспециальным образом, то для любых x, y, z, x' можно выбрать y', z' так, чтобы цепочка замкнулась.

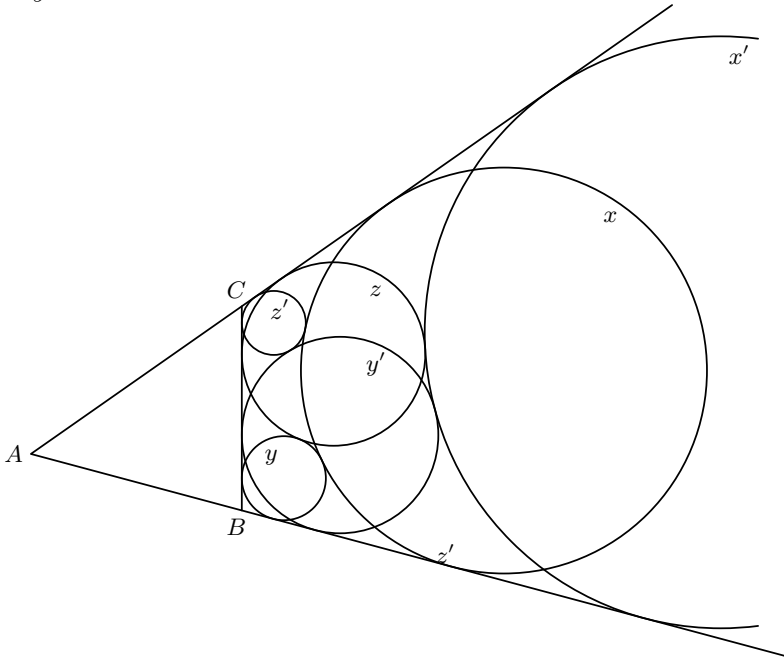


Рис. 18. Цепочка вне треугольника

В заключение отметим, что утверждение теоремы остаётся верным, если заменить I на центр одной из вневписанных окружностей. Пример такой конфигурации изображён на рис. 18.

3.4. ТЕОРЕМА О ДЕВЯТИ ОКРУЖНОСТЯХ

В этом пункте будет описана последняя цепочка. Она является обобщением цепочки из предыдущего пункта и получается из неё заменой сторон треугольника тремя окружностями. А именно, пусть a, b, c — три окружности на плоскости, а x — окружность, касающаяся b и c . Построим цепочку следующим образом:

- окружность y касается c, a и x ,
- окружность z касается a, b и y ,
- окружность x' касается b, c и z ,
- окружность y' касается c, a и x' ,
- окружность z' касается a, b и y' ,
- окружность x'' касается b, c и z' .

Как и в случае треугольной цепочки, на каждом шаге есть несколько способов выбора окружности. Покажем, что при подходящем выборе (что это значит, объяснено ниже) окружность x'' совпадает с x .

На рис. 19 и 20 изображены два примера цепочек. Можно заметить, что девять окружностей $a, b, c, x, y, z, x', y', z'$ образуют симметричную

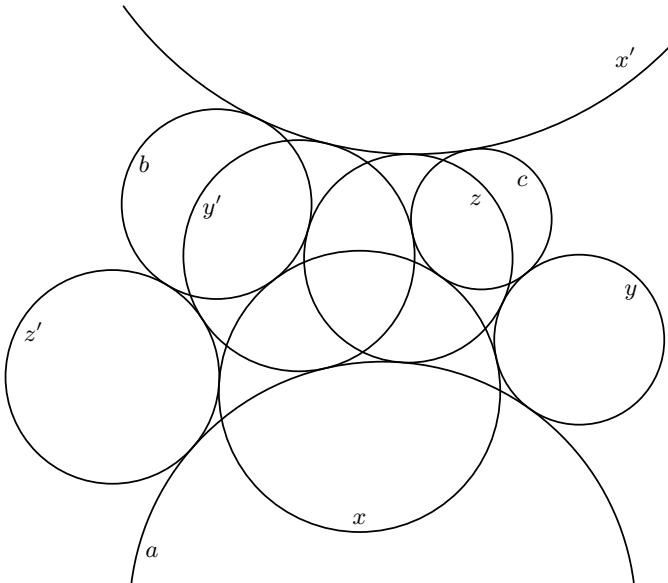


Рис. 19. Пример неспециального выбора

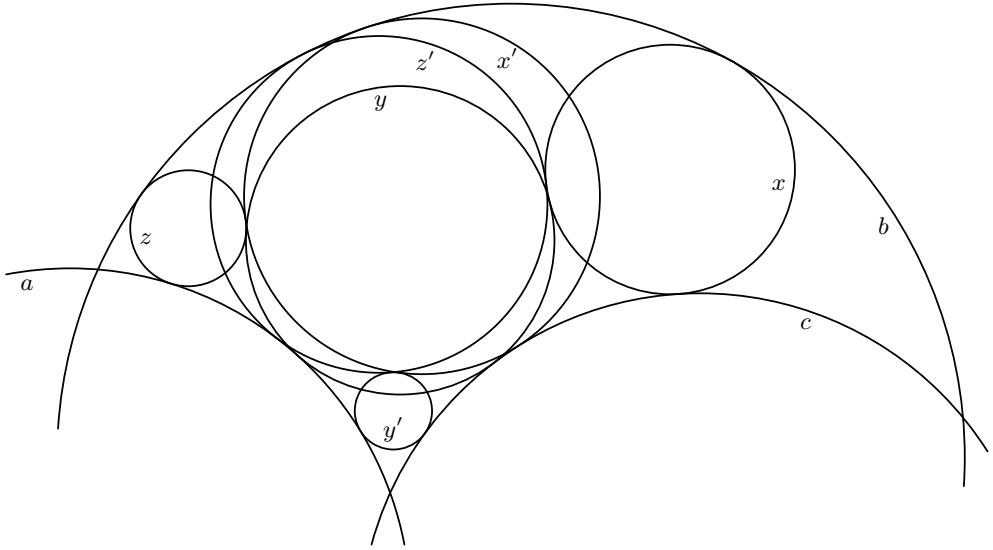


Рис. 20. Пример неспециального выбора

систему, каждая окружность касается четырёх других. Эту симметрию можно описать следующей таблицей:

a	b	c
x	y'	z
x'	y	z'

Две окружности касаются, если (и в общем случае — только если) они не находятся ни в одной строке, ни в одном столбце.

Опишем теперь упомянутый выше «подходящий выбор». Для начала напомним следующие факты.

(i) Для трёх окружностей общего положения на плоскости существует восемь касающихся их окружностей. Если две из исходных окружностей касаются (этот случай возникает на каждом шаге построения нашей цепочки), число таких окружностей уменьшается до шести. Однако две из них обычно засчитываются дважды, так что общее число остаётся равным восьми. В частности, в каждом семействе соосных окружностей, касающихся x и c , найдутся две окружности, которые также касаются a , и они задают два возможных выбора окружности y . Как и в предыдущем пункте, такой способ выбора y назовём *специальным* (таких окружностей y две, и они засчитываются дважды) четыре остальных выбора окружности y будем называть *неспециальными*. Аналогично будем различать специальные и неспециальные способы выбора окружности на остальных шагах построения цепочки.

(ii) Если окружность z касается двух данных окружностей, то прямая, соединяющая точки касания, проходит через один из двух центров гомоте-

тии этих окружностей. Будем говорить, что s принадлежит этому центру. Из шести возможных способов выбора окружностей y три (один специальный и два неспециальных) принадлежат одному центру и три — другому.

(iii) Напомним, что центры гомотетии трёх окружностей образуют четыре тройки коллинеарных точек, т. е. являются шестью вершинами полного четырёхсторонника.

Приведём точную формулировку теоремы о девяти окружностях.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть a, b, c — три окружности на плоскости. Зафиксируем три коллинеарных центра их гомотетии (по одному для каждой пары окружностей). Будем строить цепочку окружностей x, y, \dots , принадлежащих (см. выше (ii)) выбранным центрам. Тогда:

- а) если на каждом шаге окружность выбирается специальным образом, то цепочка замыкается;
- б) если на каждом шаге окружность выбирается неспециальным образом, то для любых окружностей x, y, z, x', y', z' существуют такие окружности y', z' , что цепочка замыкается.

Примеры неспециального выбора изображены на рис. 19 и 20, специального — на рис. 21.

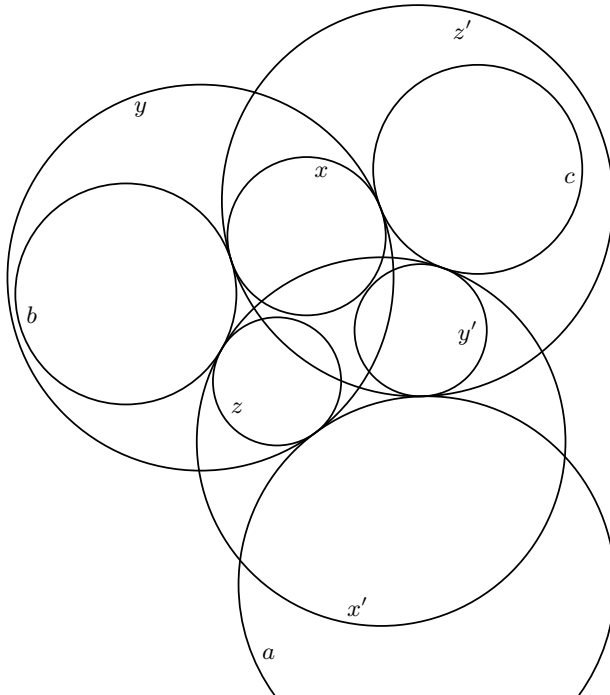


Рис. 21. Пример специального выбора

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственное известное нам полное доказательство теоремы о девяти окружностях использует методы трёхмерной комплексной проективной геометрии и опубликовано в [1]. Здесь мы приведём доказательство, которое, хотя и не является полным, охватывает широкий класс случаев. А именно, мы докажем теорему: а) для случая трёх равных окружностей a, b, c и б) для случая, когда три выбранных центра гомотетии являются бесконечно удалёнными точками. Эти предположения не столь ограничительны, как может показаться, поскольку три данные окружности «как правило» можно инверсией перевести в равные окружности («как правило» означает «если некоторые кривые пересекаются в вещественных точках»).

Рассмотрим три равных окружности a, b, c с центрами A, B, C (рис. 22). Можно считать, что их радиусы равны 1. Пусть O — центр окружности, проходящей через точки A, B, C , а ρ — её радиус, так что $OA = OB = OC = \rho$. Положим также $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle COA = 2\beta$, $\angle AOB = 2\gamma$, так что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Пусть теперь окружность x принадлежит бесконечно удалённому центру гомотетии b и c (это значит, что x касается b и c одинаковым образом,

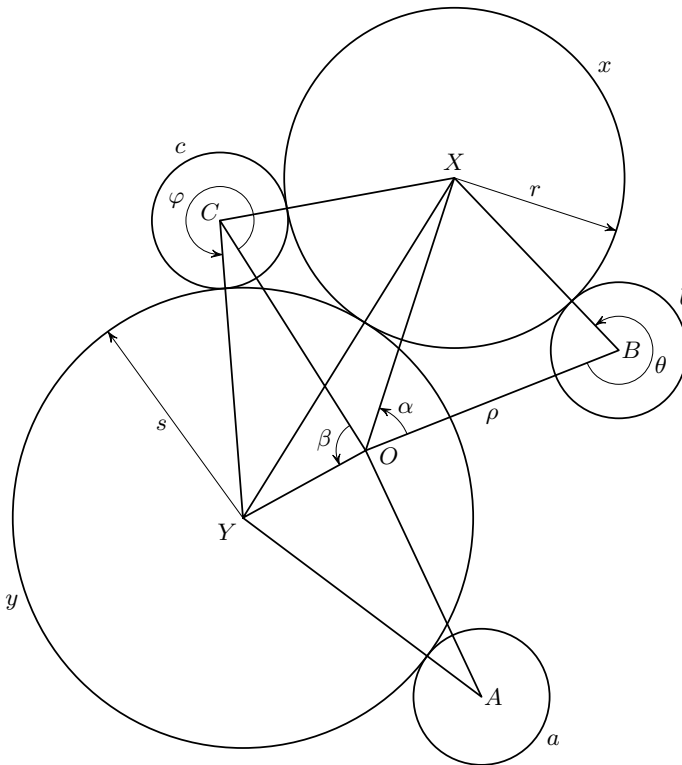


Рис. 22. К теореме о девяти окружностях. Случай равных окружностей

т. е. оба касания внешние или оба внутренние) и это правило соблюдается для всех окружностей цепочки. На рис. 22 изображены окружность x с центром X и радиусом r (с внешними касаниями) и выбранная неспециальным образом окружность y с центром Y и радиусом s . Обозначим через θ ориентированный угол между BO и BX и будем рассматривать θ как параметр, определяющий x . Аналогично будем задавать окружность y ориентированным углом φ между CO и CY , а окружности z, x', y', z', x'' — не показанными на рис. 22 углами $\psi, \theta', \varphi', \psi', \theta''$. Тогда нам надо показать, что $\theta'' = \theta \pmod{2\pi}$.

Сначала рассмотрим случай (не показанный на рис. 22), когда на каждом шаге делается специальный выбор. Тогда y касается c в той же точке, что и x . В этом случае, так как $\angle XBO = \angle XCO$ в силу симметрии, получаем (с учётом ориентации), что $\varphi = 2\pi - \theta$. Аналогично $\psi = 2\pi - \varphi$, $\theta' = 2\pi - \psi$, ..., $\theta'' = 2\pi - \psi'$ и, значит, $\theta'' = \theta$, что и требуется.

Оставшаяся часть доказательства посвящена исключительно неспециальному случаю, и первым её шагом будет вывод соотношения между θ и φ . Прежде всего заметим, что в силу симметрии X лежит на серединном перпендикуляре к BC и, значит, $\angle BOX = \alpha$. Поэтому

$$\angle OXB = \pi - \angle BOX - \angle OBX = \theta - \alpha - \pi,$$

и мы, применив к треугольнику BOX теорему синусов, получаем

$$\frac{r+1}{\sin \alpha} = \frac{\rho}{\sin(\theta - \alpha - \pi)}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{r+1} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\rho \sin \alpha}. \quad (1)$$

Аналогично из треугольника COY находим

$$\frac{1}{s+1} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\rho \sin \beta}. \quad (2)$$

Применяя к треугольнику XCY теорему косинусов, получаем, поскольку $\angle XCY = 4\pi - \theta - \varphi$:

$$(r+s)^2 = (r+1)^2 + (s+1)^2 - 2(r+1)(s+1) \cos(4\pi - \theta - \varphi),$$

или, после упрощения,

$$\sin^2 \frac{\theta + \varphi}{2} = \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) \left(1 - \frac{1}{s+1}\right).$$

Откуда с учётом (1) и (2) получаем

$$\sin^2 \frac{\theta + \varphi}{2} = \left(1 - \frac{\sin \xi \sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha}\right) \left(1 - \frac{\sin \xi \sin(\beta - \varphi)}{\sin \beta}\right), \quad \text{где } \sin \xi = \rho^{-1}. \quad (3)$$

(Здесь 2ξ — угол между касательными из O к любой из окружностей a, b, c .)

Уравнение (3) является основным соотношением, связывающим⁶⁾ параметры θ и φ окружностей x и y . Если θ задано, то существуют два значения φ , удовлетворяющие (3), что соответствует наличию двух специальных окружностей y для данной окружности x . Аналогично, заменив в (3) θ , φ , α и β на φ , ψ , β и γ соответственно, мы получим соотношение, связывающее параметры φ и ψ окружностей y и z ; продолжая циклически менять буквы, мы получим аналогичные (3) соотношения, из которых нужно исключить φ , ψ , θ' , φ' , ψ' , для вывода равенства $\theta'' = \theta \pmod{2\pi}$.

Детальное изложение этих выкладок было бы слишком длинным, поэтому ограничимся описанием основного приёма. Как уже было отмечено, уравнение (3) задаёт взаимно двузначное соответствие между θ и φ и, следовательно, может быть разрешено в эллиптических функциях. Соответствующее ему в п. 3.3 уравнение (6) удалось решить тригонометрическими и рациональными заменами, что позволило сравнительно просто доказать теорему о треугольнике. Однако данное уравнение не относится к такому классу и действительно требует применения эллиптических функций или чего-то эквивалентного. Тем не менее, попытаемся введением новых переменных вместо θ , φ , ... свести (3) к некоторой стандартной формуле теории эллиптических функций. Опуская детали, опишем результат такой замены.

Введём следующие обозначения:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \xi)}{\sin(\alpha + \xi)}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\sin(\beta - \xi)}{\sin(\beta + \xi)}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\sin(\gamma - \xi)}{\sin(\gamma + \xi)}}.$$

Отметим, что λ , μ , ν не обязаны быть вещественными. При этом несущественно, какое значение корня выбирается в каждом из трёх случаев. Положим также $k = \lambda\mu\nu$. Введём теперь параметр t посредством равенства

$$\frac{t - 5 - k^2}{t + 1 + 5k^2} = \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{\sin \frac{\theta + \xi - \pi}{2}}{\sin \frac{\theta - \xi + \pi}{2}}, \quad (4)$$

а параметры u , v , ..., связанные с φ , ψ , ..., — аналогичными формулами, в которых λ заменяем на μ , ν , ... соответственно. Уравнение (3) примет вид

$$(t + u + f)(4tuf - g_3) = \left(tu + tf + uf - \frac{1}{2}g_2\right)^2, \quad (5)$$

где $g_2 = 12(1 - 14k^2 + k^4)$, $g_3 = 8(1 + 33k^2 - 33k^4 - k^6)$ и

$$f = \frac{(k^2 + 5)\lambda\mu - (5k^2 + 1)}{\lambda\mu + 1}.$$

⁶⁾ Следует заметить, что при других расположениях x и y доказательство требует некоторой модификации, но в итоге опять будет получено равенство (3).

Теперь уравнение (5) выражает хорошо известную форму теоремы сложения для эллиптической функции Вейерштрасса ρ (см., например, [2, с. 364]) и может быть записано в виде

$$\rho^{-1}(u) = \pm\rho^{-1}(t) \pm \rho^{-1}(f) \quad (\text{по модулю периодов}), \quad (6)$$

где ρ^{-1} — функция, обратная ρ (при этом ρ^{-1} — двuzначная функция по модулю периодов с двумя противоположными, равными по абсолютной величине значениями в каждой точке; поэтому для данного значения t в правой части (6) получаем четыре значения, разбивающиеся на две пары противоположных, т. е. два значения для u).

Уравнение (6) даёт простое выражение параметра u окружности y через параметр t окружности x . Аналогичная формула выражает параметр v окружности z через u ; при этом g_2 и g_3 задаются теми же формулами, поскольку они зависят только от k , а функция k симметрична по α , β , γ . В итоге соотношение между u и v имеет вид

$$\rho^{-1}(v) = \pm\rho^{-1}(u) \pm \rho^{-1}(d) \quad (\text{по модулю периодов}), \quad (7)$$

где ρ — та же эллиптическая функция, что и выше, а d — некоторая новая константа. Точно так же получаем, что параметр t' окружности x' выражается через v соотношением

$$\rho^{-1}(t') = \pm\rho^{-1}(v) \pm \rho^{-1}(e) \quad (\text{по модулю периодов}) \quad (8)$$

с некоторой новой константой e . Объединив (6), (7) и (8), получаем

$$\rho^{-1}(t') = \pm\rho^{-1}(t) \pm \rho^{-1}(f) \pm \rho^{-1}(d) \pm \rho^{-1}(e) \quad (\text{по модулю периодов}), \quad (9)$$

что даёт выражение параметра t' через t . Шестнадцать возможных комбинаций знаков дают для данного t восемь значений t' . Аналогично, сделав три следующих шага, мы получаем выражение параметра t'' окружности x'' как восьмизначной функции от t' :

$$\rho^{-1}(t'') = \pm\rho^{-1}(t') \pm \rho^{-1}(f) \pm \rho^{-1}(d) \pm \rho^{-1}(e) \quad (\text{по модулю периодов}). \quad (10)$$

Очевидно, что при любом выборе знаков в (9) можно выбрать знаки в (10) так, чтобы выполнялось равенство $\rho^{-1}(t'') = \pm\rho^{-1}(t)$, а остальные слагаемые попарно уничтожились. Отсюда $t'' = t$, и из (4) получаем $\theta'' = \theta \pmod{2\pi}$. Теорема доказана. \square

Читатель мог заметить, что конфигурации, иллюстрирующие теорему о девяти окружностях, весьма разнообразны и лишь малая часть их была представлена в данной книге. Можно добавить к ним ещё одну теорему,

также имеющую множество специальных случаев, соответствующих вырождению некоторых окружностей. Как уже было отмечено, теорема п. 3.3 является вырожденным случаем, возникающим при замене окружностей a , b , c прямыми. Другой специальный случай возникает, когда a , b , c вырождаются в точки; его доказательство весьма элементарно и доступно даже школьнику. Также можно получить ряд специальных случаев, допуская совпадение некоторых окружностей. У нас нет возможности детально разобрать все эти возможности, но интересующийся читатель может сделать это самостоятельно.

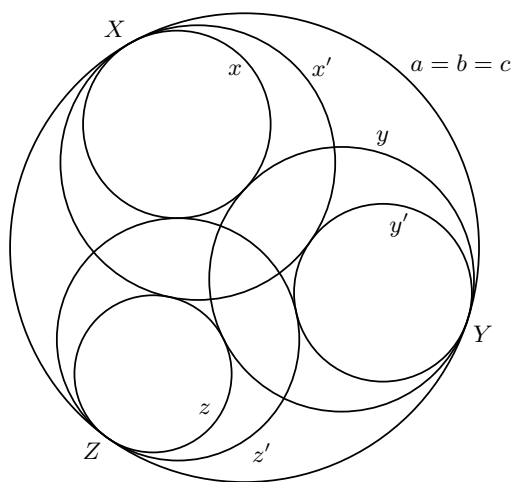


Рис. 23. Предельный случай теоремы о девяти окружностях

Однако мы не можем не остановиться в заключение на одном частном случае теоремы о девяти окружностях, возникающем при совпадении всех трёх окружностей a , b , c . Изобразив соответствующую конфигурацию, можно заметить, что в предельной ситуации верны две совершенно различные теоремы. Одна из них — обращение теоремы о семи окружностях (п. 3.1), а другая утверждает замкнутость цепочки, изображённой на рис. 23, где окружности цепочки касаются внешней окружности в трёх различных точках X , Y , Z . Впрочем, эти результаты значительно проще получаются с помощью инверсии!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tyrrell J. A., Powell M. T. A theorem in circle geometry // Bull. London Math. Soc. 1971. Vol. 3. P. 70–74.
- [2] Copson E. T. Theory of functions of a complex variable. Oxford, 1935.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПЕРЕВОДЧИКОМ

- [3] *Беленький В. З., Заславский А. А.* Решение обобщённой задачи Мальфатти с помощью комплексной (гиперболической) тригонометрии // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 2. М.: МЦНМО, 1998. С. 141–154.
- [4] *Ивлин С. Дж. А., Мани-Каутс Г. Б., Тиррелл Дж. А.* Теорема о семи окружностях и другие новые теоремы: § 2. Обобщения теорем Паскаля и Бриансона // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017. С. 47–63.

Сесил Джон Алвин Ивлин (1904–1976)

Годфри Бёрдет Мани-Каутс (1905–1979)

Джон Алфред Тиррелл (1932–1992)