Обобщённая задача Аполлония

Е. А. Морозов

В работе исследуется обобщение известной задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных. Рассматривается вопрос о максимальном возможном числе таких окружностей, в случае если исходных окружностей больше трёх. Доказано, что если не все исходные окружности касаются в одной точке, то в случае четырёх исходных окружностей имеется не более шести решений задачи Аполлония, а в случае пяти исходных окружностей — не более четырёх. Также дано описание всех четвёрок окружностей, для которых количество решений максимально.

§ 1. Введение

Задача (классическая задача Аполлония). Построить циркулем и линейкой окружность, касающуюся каждой из трёх данных.

Так сформулировал задачу известный древнегреческий геометр Аполлоний Пергский в III в. до н. э. С тех пор придумано много остроумных решений первоначальной задачи, однако нас будет интересовать лишь вопрос о максимально возможном числе искомых окружностей. Известно, что классическая задача имеет не более восьми решений (см., например, [1]). Мы рассмотрим обобщение этого вопроса на случаи четырёх и пяти окружностей.

Ключевую роль в наших рассуждениях играет инверсия. Это преобразование плоскости позволяет упростить конфигурацию исходных окружностей и осуществить перебор. Поэтому перед доказательством основных теорем мы подробнее рассмотрим конструкции, к которым нас приведёт это преобразование (см. § 3). Также мы используем один из результатов полного перебора всех случаев классической задачи Аполлония, описанного в [1].

Среди приёмов, которые мы используем для доказательства различных случаев основной теоремы, будут: подсчёт количества точек пересечения окружностей, использование их взаимного расположения на плоскости, а также факт об объединении решений классической задачи в пары, использующий алгебраическую интерпретацию окружности, — об этом подробнее в § 5.

§ 2. Формулировки основных результатов

Обобщённой окружностью (*объектом*) назовём окружность, прямую или точку на плоскости.

Две обобщённые окружности *обобщённо касаются*, если это одна из следующих конфигураций:

1) две касающиеся окружности или касающиеся окружность и прямая;
2) две параллельные прямые;
3) точка, лежащая на окружности или прямой.

Так как все касания у нас будут обобщёнными, то для краткости вместо «обобщённо касаются» будем говорить просто «касаются».

Заметим, что посредством стереографической проекции плоскость с добавленной к ней бесконечно удалённой точкой ∞ можно перевести в сферу. При этом преобразовании обобщённая окружность на плоскости перейдёт в окружность или точку на сфере, а касающиеся обобщённые окружности на плоскости — в касающиеся окружности или точку и проходящую через неё окружность на сфере. Поэтому фактически нами рассматривается сфера и её непустые пересечения с плоскостями. В дальнейшем мы будем считать, что бесконечно удалённая точка на плоскости присутствует — в частности, через эту точку проходят все прямые и сама она является обобщённой окружностью. Эту точку можно вернуть на видимую плоскость с помощью инверсии, которая меняет её местами со своим центром. Строгие определения и некоторые теоремы см. в [5].

Теперь можно сформулировать основные результаты.

Теорема 1. *На плоскости даны четыре различные обобщённые окружности, которые не все касаются в одной точке. Тогда существует не более шести обобщённых окружностей, касающихся каждой из данных.*

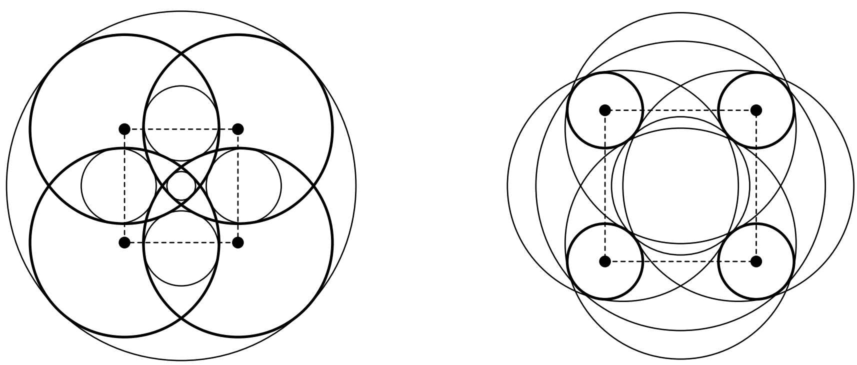


Рис. 1. Примеры к теореме 1

Теорема 2. *На плоскости дано пять различных обобщённых окружностей, которые не все касаются в одной точке. Тогда существует не более четырёх обобщённых окружностей, касающихся каждой из данных.*

Нетрудно найти примеры, когда количество окружностей, указанное в теоремах 1 и 2, действительно достигается. Соответствующие примеры для четырёх окружностей приведены на рис. 1. В этих примерах исходные окружности имеют равный радиус, а их центры лежат в вершинах квадрата. Обоснование примеров очевидно и не нуждается в комментариях.

Из шести окружностей на рис. 1, касающихся каждой из четырёх данных, выберем любые пять. Рассматривая эти пять окружностей в качестве исходных, получаем пример к теореме 2.

Итак, найти какие-то примеры, подтверждающие точность теоремы 1, нетрудно. Но *все* эти примеры допускают единое описание!

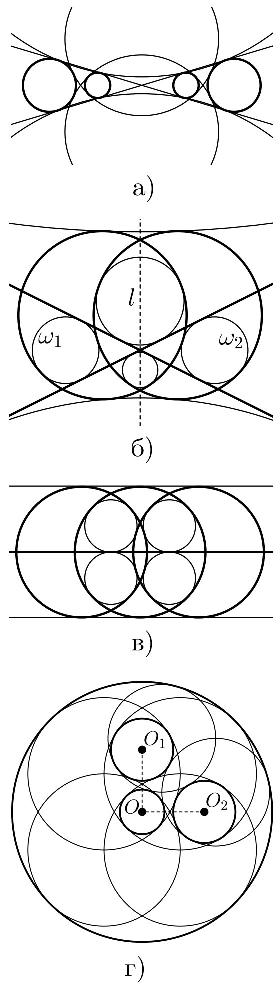
Теорема 3. *Пусть конфигурация четырёх обобщённых окружностей на плоскости такова, что существует ровно шесть обобщённых окружностей, касающихся каждой из данных. Тогда несколькими инверсиями её можно свести к одной из следующих четырёх.*

1. *Исходные окружности — две непересекающиеся окружности, вписанные в угол, и две симметричные им относительно вершины этого угла* (рис. 2а).

2. *Возьмём непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2, симметричные относительно прямой l. Исходные обобщённые окружности — две окружности, касающиеся ω_1 и ω_2 и симметричные друг другу относительно l, и две общие внутренние касательные к ω_1 и ω_2* (рис. 2б).

3. *Исходные обобщённые окружности — прямая и три окружности радиуса 1 с центрами на этой прямой, причём расстояние между соседними центрами равно $2/\sqrt{5}$* (рис. 2в).

4. *Возьмём две концентрические окружности с центром O и отношением радиусов $3+2\sqrt{2}$ — это две из исходных окружностей. Рассмотрим четыре окружности с центрами в вершинах квадрата, касающиеся обеих концентрических, причём так, что одна из концентрических содержит их, а другая*



а) б) в) г)

Рис. 2

в них содержится. Две оставшиеся исходные окружности с центрами O_1 и O_2 касаются этих четырёх, причём $\angle O_1OO_2 = 90^\circ$ (рис. 2г).

Примеры на рис. 1 соответствуют конфигурациям 1 и 2.

§ 3. Обозначения, договорённости и используемые конструкции

Договоримся о некоторых общих обозначениях. Данные в (обобщённой) задаче Аполлония объекты назовём *исходными*, а объект, касающийся всех данных, назовём *решением*. Назовём конфигурацию обобщённых окружностей *вырожденной*, если какие-то три из них касаются в одной точке. Вырожденная тройка объектов, очевидно, имеет бесконечно много решений.

Мы пользуемся следующими известными свойствами инверсии (о них см., например, [5]).

1. Пару непересекающихся окружностей или непересекающиеся окружность и прямую можно перевести инверсией в концентрические окружности.
2. Пару пересекающихся в двух точках окружностей или пересекающиеся в двух точках окружность и прямую можно перевести инверсией в пересекающиеся прямые.
3. Пару касающихся окружностей или касающиеся окружность и прямую можно перевести инверсией в параллельные прямые.
4. Если точка лежит вне окружности, то существует инверсия с центром в этой точке, оставляющая окружность на месте.
5. Если точка лежит внутри окружности, то существует композиция инверсии и центральной симметрии с общим центром в этой точке, оставляющая окружность на месте.

Если два объекта из трёх фиксированы, а третий α меняется, то соответствующие решения для всех трёх объектов мы называем *решениями для* α (или *решениями, порождёнными* α), а объект, касающийся только двух фиксированных, мы называем *допустимым*.

Рассмотрим тройку объектов, каждый из которых является окружностью или прямой. Для описания расположения такой тройки объектов на плоскости удобно использовать так называемые *метки Фитцджеральда*. Рассматриваемой тройке объектов сопоставляется набор букв, характеризующий их отношения: буква I используется для обозначения каждой пары пересекающихся объектов, буква T — для обозначения каждой пары касающихся объектов, а буква S — для обозначения того, что некоторая окружность или прямая разделяет два других объекта. Если ни одно из перечисленных выше отношений не имеет места, то мы говорим о пустой метке ($\varnothing$). Если все три объекта имеют общую точку, то запись заключается в квадратные скобки. Таким образом, например, метке $[TTT]$ соответствует вырожденная тройка объектов.

Известно (см. например [4]), что если три окружности или прямые попарно пересекаются, но не проходят через одну точку (это соответствует метке III), то возможны два случая: либо каждая обобщённая окружность разделяет точки пересечения двух других, либо нет. Обозначим эти случаи разными метками — III_1 и III_2 соответственно. Если три окружности попарно пересекаются и проходят через одну точку, то также возможно два случая: либо эти окружности имеют ровно одну общую точку, либо две. Эти случаи тоже обозначим разными метками $[III]_1$ и $[III]_2$ соответственно.

Также нам потребуются некоторые определения, связанные с тремя простейшими конструкциями из обобщённых окружностей. В каждой из них мы фиксируем два объекта и меняем третий.

3-1. Зафиксированы две пересекающиеся исходные прямые. Будем называть четыре части, на которые две пересекающиеся прямые разбивают плоскость, *секторами.* Секторы пронумеруем S_{I}, S_{II}, S_{III}, S_{IV} по традиции обозначения квадрантов — против часовой стрелки. Точку пересечения прямых обозначим через O.

Каждая окружность, касающаяся двух прямых, лежит в одном из секторов. Эти окружности — допустимые. Назовём *распределением* некоторого набора допустимых окружностей ненулевого радиуса упорядоченную четвёрку чисел x–y–z–t, где число на i-м месте обозначает, сколько окружностей вписано в i-й сектор. При необходимости мы указываем, относительно каких пересекающихся прямых записано распределение. Два распределения *изоморфны*, если они совпадают с точностью до переворотов и циклических сдвигов четвёрки x–y–z–t, т. е., например, разбиения 0–1–2–3 и 2–1–0–3 изоморфны. До первого упоминания о нумерации секторов распределения рассматриваются с точностью до изоморфизма.

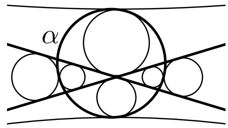
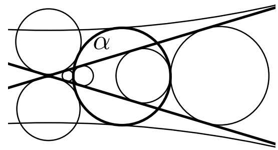
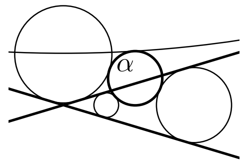
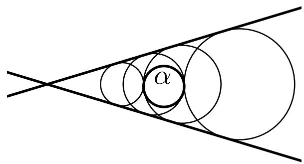
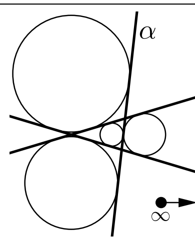
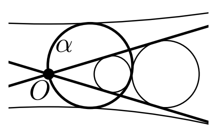
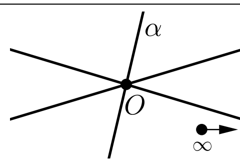
Также решениями могут являться точки O и ∞. Такие решения мы называем *дополнительными.*

Теперь добавим к двум зафиксированным прямым окружность или прямую α. В зависимости от метки этой тройки объектов припишем α некоторый *I-тип.* Посмотрим, каким может быть распределение решений для α.

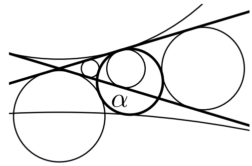
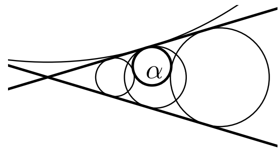
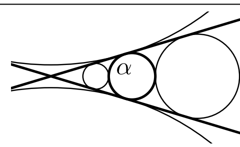
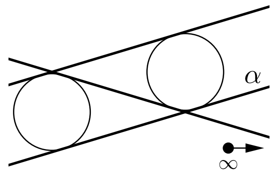
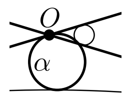
Лемма 3.1. *Даны две пересекающиеся прямые, а также окружность или прямая α, отличная от данных. Тогда, в зависимости от положения α на плоскости, вся тройка имеет одну из меток, указанных в табл.* 1. *Метка однозначно определяет распределение решений для α и количество дополнительных решений* (см. табл. 1).

Таблица 1

I-типы

Тип	Метка	Распределение решений для α	Доп. решения	Всего решений для α	Рисунки
I_1	III_1	2–2–2–2	$\varnothing$	8	
I_2	III_2	4–2–0–2	$\varnothing$	8	
I_3	II	2–2–0–0	$\varnothing$	4	
I_4	I	4–0–0–0	$\varnothing$	4	
I_5	$[III]_1$	2–1–0–1	O или ∞	5	 прямая  окружность
I_6	$[III]_2$	0–0–0–0	O и ∞	2	

Окончание таблицы 1

Тип	Метка	Распределение решений для α	Доп. решения	Всего решений для α	Рисунки
I_7	IIT	3–1–0–2	$\varnothing$	6	
I_8	IT	3–1–0–0	$\varnothing$	4	
I_9	ITT	2–1–0–1	$\varnothing$	4	
I_{10}	$[IIT]$	1–0–0–1	O или ∞	3	 прямая  окружность

Замечание 1. Количество решений указано без учёта кратности.

Замечание 2. Отметим, что окружность типа I_2 всегда пересекает обе стороны некоторого сектора.

Доказательство леммы 3.1 осуществляется одинаково для всех I-типов непрерывным увеличением допустимой окружности в одном из секторов до момента касания с α. Более подробное рассуждение см. в [1]. $\square$

3-2. Зафиксированы две концентрические окружности. Через ω обозначим окружность с меньшим радиусом, а через Ω — с бóльшим. Общий центр ω и Ω обозначим через O. Допустимыми здесь являются все окружности, касающиеся Ω и ω. Они разбиваются на два рода, которые мы обозначим А и В: окружности *рода* А касаются ω внешним образом, а *рода* B — внутренним. Прямую, соединяющую O с центром окружности α, мы называем *диаметром* (а луч — *радиусом*), на котором лежит α. *Противоположными* называются окружности, лежащие на одном диаметре, но по разные стороны от O.

Теперь снова добавим ещё одну окружность α, но потребуем, чтобы она не имела общих точек с ω и Ω. Найдём количество допустимых окружностей, касающихся α.

Лемма 3.2. *Даны две концентрические окружности и окружность или прямая α, не имеющая общих точек с данными. Тогда полученная тройка либо не имеет решений, либо имеет восемь решений* (как на рис. 3).

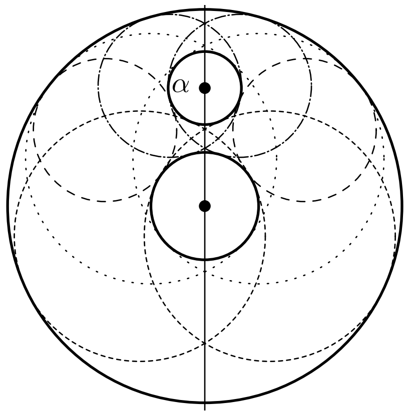


Рис. 3

Доказательство. Возможны следующие случаи:

1) α лежит внутри ω, тогда ω разделяет α и Ω;
2) α лежит снаружи Ω, тогда Ω разделяет α и ω;
3) α лежит внутри Ω, и ω лежит внутри α, тогда α разделяет ω и Ω;
4) α лежит внутри Ω, но ω не лежит внутри α, и α не лежит внутри ω.

Случаи 1–3 соответствуют метке S, и тогда решений нет. Случай 4 соответствует метке $\varnothing$, и тогда есть восемь решений, причём четыре из них имеют род A и ещё четыре — род B. Доказательство осуществляется посредством вращения потенциального решения до момента касания с α. $\square$

Обратим внимание, что полученные восемь решений разбиваются на пары симметричных относительно радиуса, на котором лежит α. Следующее наблюдение оказывается весьма полезным в дальнейшем.

Лемма 3.3. *Среди любых пяти решений для α можно выбрать пару пересекающихся, а среди любых шести решений для α можно выбрать пару пересекающихся и симметричных относительно радиуса, на котором лежит α.*

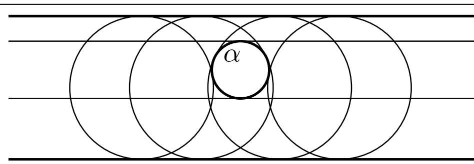
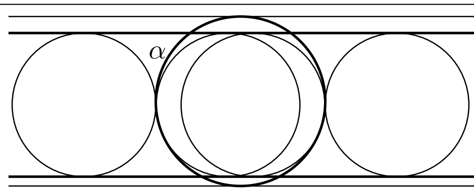
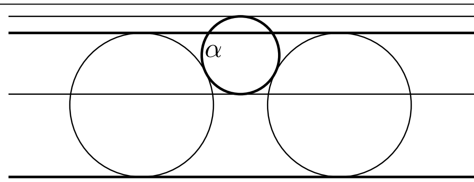
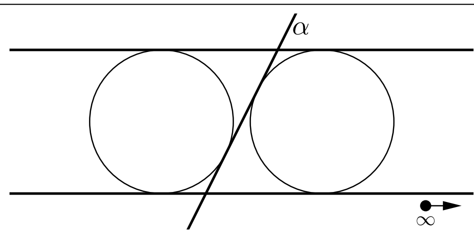
Доказательство. Заметим, что любые две окружности рода B пересекаются, и только в одной паре симметричных решений окружности могут не пересекаться — это пара решений рода A, которые касаются α внешним образом. Отсюда мгновенно следуют оба утверждения леммы. $\square$

3-3. Зафиксированы две параллельные прямые. Будем считать направление фиксированных прямых *горизонтальным*, а перпендикулярное — *вертикальным.* Допустимыми являются окружности равного радиуса, касающиеся фиксированных прямых, а также все горизонтальные прямые и точка ∞. *Распределением* здесь называем упорядоченную пару чисел $x+y$, где x обозначает количество допустимых окружностей, а y — количество допустимых прямых. Решением может быть также точка ∞ — в этом случае она называется *дополнительным решением.*

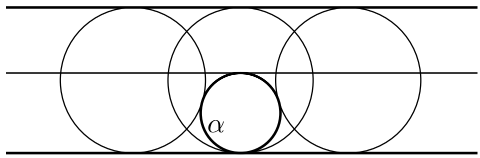
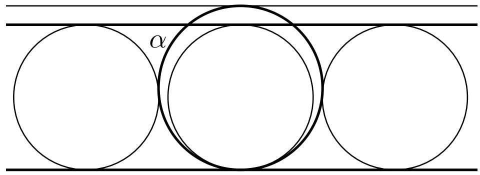
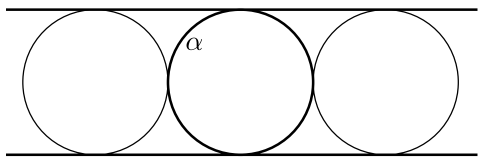
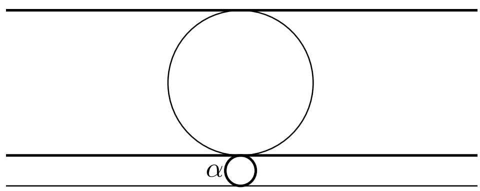
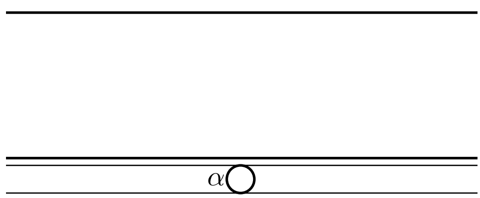
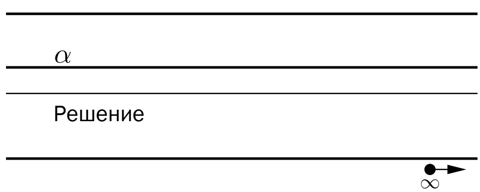
Лемма 3.4. *Даны две параллельные прямые, а также допустимая окружность или прямая α, отличная от данных. Тогда, в зависимости от положения α на плоскости, вся тройка имеет одну из меток, указанных в табл. 2. Кроме того, метка однозначно определяет распределение решений для α и количество дополнительных решений* (см. табл. 2).

Таблица 2

T-типы

Тип	Метка	Распределение решений для α	Доп. решения	Всего решений для α	Рисунки
T_1	T	4+2	$\varnothing$	6	
T_2	IIT	4+2	$\varnothing$	6	
T_3	IT	2+2	$\varnothing$	4	
T_4	$[IIT]$	2+0	∞	3	

Окончание таблицы 2

Тип	Метка	Распределение решений для α	Доп. решения	Всего решений для α	Рисунки
T_5	TT	3+1	$\varnothing$	4	
T_6	ITT	3+1	$\varnothing$	4	
T_7	TTT	2+0	$\varnothing$	2	
T_8	STT	1+1	$\varnothing$	2	
T_9	ST	0+2	$\varnothing$	2	
T_{10}	$[TTT]$	$0+\infty$	∞	∞	

Определим T-*типы* аналогично I-типам. Как и в лемме 3.1, количество решений указано без учёта кратности.

Доказательство леммы 3.4 осуществляется одинаковым образом для всех T-типов посредством непрерывного перемещения допустимой окружности между параллельными прямыми до момента касания с α. □

§ 4. Леммы о пересечениях

В этом параграфе мы докажем несколько утверждений, полезных при доказательстве теорем 1 и 3 и особенно теоремы 2. В следующих четырёх леммах предполагается зафиксированной пара пересекающихся прямых.

Лемма 4.1 (первая лемма о пересечениях). *Если две окружности типа I_1 имеют два общих решения в одном секторе, то они имеют общую точку внутри этого сектора* (рис. 4 слева).

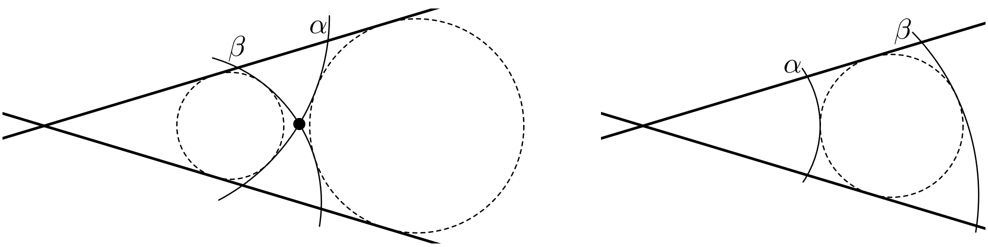


Рис. 4

Доказательство. Заметим, что если α и β не пересекаются в каком-то секторе, то они делят его на три области, из которых не более чем в одну можно вписать требуемую окружность-решение (рис. 4 справа). Так как в эту область, очевидно, можно вписать не более одной окружности, утверждение доказано. □

Лемма 4.2 (вторая лемма о пересечениях). *Пусть для окружностей α, β и γ, имеющих тип I_1, есть общее решение в некотором секторе. Тогда среди них какие-то две имеют общую точку внутри этого сектора.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда дуги окружностей α, β и γ делят сектор на четыре части, каждая из которых граничит не более чем с двумя из этих окружностей (рис. 5). Решение должно быть вписано в одну из этих частей, т. е. оно не может касаться всех трёх окружностей α, β и γ — противоречие. □

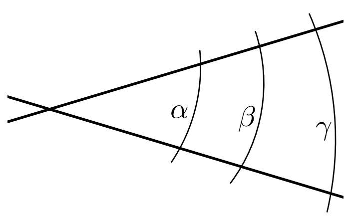
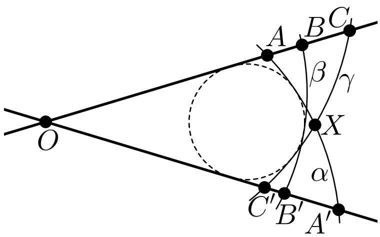


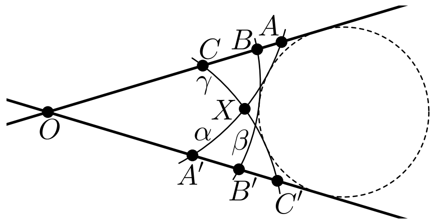
Рис. 5

Лемма 4.3 (третья лемма о пересечениях). *Пусть для окружностей α, β и γ, имеющих тип I_1, есть два общих решения в некотором секторе. Тогда среди них какие-то две имеют две общие точки внутри этого сектора.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть дуги окружностей α, β и γ пересекают одну из сторон данного сектора в точках A, B и C, а вторую — в точках A', B' и C' соответственно. Пусть для определённости B лежит на отрезке AC (рис. 6).



β разделяет O и X



β не разделяет O и X

Рис. 6

По лемме 4.1 дуги окружностей α и β имеют общую точку внутри рассматриваемого сектора, причём, согласно нашему предположению, ровно одну. Но тогда порядок троек точек O, A, B и O, A', B' должен отличаться, т. е. если A лежит на отрезке OB, то B' лежит на отрезке OA', и наоборот: если B лежит на отрезке OA, то A' лежит на отрезке OB'. То же верно и для двух других пар дуг окружностей (α и γ, β и γ). Отсюда ясно, что B' лежит на $A'C'$.

Пусть теперь X — точка пересечения дуг α и γ. Возможны два случая, в зависимости от того, разделяет ли β точки O и X (рис. 6). Нетрудно убедиться, что в обоих случаях α, β и γ делят сектор на семь частей, из которых только одна граничит со сторонами сектора и всеми тремя данными окружностями — только в эту часть может быть вписана искомая окружность. Получаем противоречие с условием леммы. □

Лемма 4.4 (четвёртая лемма о пересечениях). *Пусть даны окружность α типа I_1 и окружность β типа I_2, пересекающая обе стороны сектора S_{II}, причём α и β имеют в секторе S_{I} два общих решения. Тогда они имеют общую точку в секторе S_{I}.*

Доказательство. Разделим каждое общее решение для α и β в секторе S_{I} на две дуги точками касания с прямыми (рис. 7). Из полученных четырёх дуг рассмотрим две такие, которые имеют общую точку с α. Заметим, что α разделяет эти дуги, а β также имеет с каждой из них общую точку, поскольку β пересекает обе стороны сектора S_{II} и, значит, не пересекает вторую сторону сектора S_{I} (рис. 7). Следовательно, дуга β, лежащая в секторе S_{I}, должна пересекать дугу α в секторе S_{I} в силу непрерывности окружности. $\square$

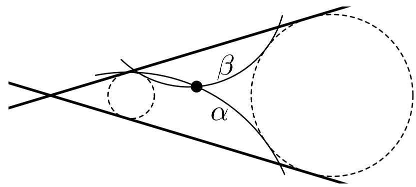


Рис. 7

§ 5. Геометрия окружностей

Для полного понимания этого раздела потребуется знание основ линейной алгебры. Однако для понимания формулировок необходимых нам результатов эти знания вовсе не обязательны. Читатель может ознакомиться только с формулировками (без доказательств) в разделе 5.2.

5.1. Основные понятия геометрии окружностей

Рассмотрим 5-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^5$, снабжённое симметричной билинейной формой: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 - x_4y_4$ для $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$.

В этом пространстве *квадрика Ли* определяется условием:

$$\Omega = \{\mathbf{x}\colon (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0\}.$$

Заметим, что для всякого $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5$ верно $\mathbf{x}\in\Omega \Leftrightarrow \langle\mathbf{x}\rangle\subset\Omega$, где $\langle\mathbf{x}\rangle=\{\lambda\mathbf{x}\colon \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Каждой точке плоскости, а также каждой ориентированной окружности или прямой можно поставить в соответствие одномерное подпространство (прямую) $\langle\mathbf{x}\rangle \subset \Omega$ согласно следующим правилам.

1. Окружности с центром (p_1, p_2) и радиусом r отвечает $\langle(v, p_1, p_2, 1, \pm r)\rangle$. Здесь знак перед r зависит от ориентации окружности (см. подробности в [3]), а v подбирается так, чтобы полученное подпространство содержалось в Ω.
2. Прямой с нормальным вектором $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, где $\|\mathbf{p}\| = 1$, проходящей через точку $\mathbf{q}$, соответствует $\langle(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}, p_1, p_2, 0, 1)\rangle$. Выбор одной из двух возможностей для p зависит от ориентации прямой (см. [3]).
3. Точке с координатами (p_1, p_2) соответствует $\langle(v, p_1, p_2, 1, 0)\rangle$, где v снова подбирается так, чтобы полученное подпространство содержалось в Ω. Точке ∞ соответствует $\langle(1, 0, 0, 0, 0)\rangle$.

Это соответствие взаимно однозначно.

Такое представление замечательно тем, что, как нетрудно проверить (см., например, [2]), объекты X и Y ориентированно касаются тогда и только тогда, когда ненулевые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, выбранные произвольно из соответствующих X и Y одномерных подпространств, удовлетворяют соотношению $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Это позволяет переформулировать задачу Аполлония на линейно-алгебраическом языке.

Подробнее о геометрии окружностей см. [2] и [3].

5.2. Применение к задаче Аполлония

Пусть на плоскости дано несколько окружностей и окружность, касающаяся всех данных (решение). Сопоставим каждой данной исходной окружности знак «+», если она касается данного решения внешним образом, и знак «−», если внутренним. Мы говорим, что решение *соответствует* (*подходит*) данной *расстановке* (*набору, комбинации*) знаков.

Теперь поступим наоборот: сначала расставим знаки, а затем попробуем найти решение, которому этот набор знаков соответствовал бы. Сколько существует таких решений? Оказывается, если на конфигурацию данных окружностей наложены некоторые естественные ограничения, то таких решений не больше двух. Они поэтому называются *парными.*

Сперва нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть тройка окружностей G, соответствующая прямым $\langle\mathbf{x}\rangle$, $\langle\mathbf{y}\rangle$ и $\langle\mathbf{z}\rangle$, невырожденна (ориентация здесь не учитывается). Тогда векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ линейно независимы и $\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle^{\perp} \not\subset \Omega$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ лежат в одной плоскости π. Тогда π имеет с квадрикой Ω три общие прямые. Но это возможно, лишь если $\pi \subset \Omega$. Пусть $\mathbf{t}$ — произвольный вектор из π. Тогда $\mathbf{x} - \mathbf{t} \in \pi$. Имеем $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$ и $(\mathbf{x} - \mathbf{t}, \mathbf{x} - \mathbf{t}) = 0$, откуда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2}\big((\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{t}, \mathbf{t}) - (\mathbf{x} - \mathbf{t}, \mathbf{x} - \mathbf{t})\big) = 0.$$

Аналогично $(\mathbf{y}, \mathbf{t}) = (\mathbf{z}, \mathbf{t}) = 0$, т. е. $\langle\mathbf{t}\rangle$ соответствует некоторому объекту, который касается каждой окружности из G, и тройка G имеет бесконечно много решений. Но из лемм 3.1, 3.2, 3.4 следует, что бесконечным числом решений обладают лишь вырожденные тройки — противоречие.

Далее, если $\theta = \langle\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle^{\perp} \subset \Omega$, то любой вектор из θ соответствует решению. Но $\dim \theta = 2 > 1$, поэтому тройка G снова имеет бесконечно много решений, т. е. вырождена. $\square$

Теперь можно сформулировать самый важный для нас факт.

Лемма 5.2. *Дано множество G, состоящее из окружностей на плоскости, причём $|G| \geqslant 3$ и G не вырождено. Каждой окружности из G сопоставлен знак. Тогда G имеет не более двух решений, подходящих для данной расстановки знаков.*

Доказательство. Выберем из G три произвольные окружности и ориентируем их согласно их знакам. Сопоставим им одномерные подпространства $\langle \mathbf{x} \rangle$, $\langle \mathbf{y} \rangle$ и $\langle \mathbf{z} \rangle$. Каждое подходящее решение соответствует окружности, ориентированно касающейся каждой окружности из G. Поэтому надо доказать, что существует не более двух векторов $\mathbf{t}$, таких что

$$(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = (\mathbf{y}, \mathbf{t}) = (\mathbf{z}, \mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0.$$

По лемме 5.1 векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ линейно независимы и $\theta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^{\perp} \not\subset \Omega$. Но $\dim \theta = 2$. Значит, θ пересекает Ω не более чем по двум прямым, т. е. существует не более двух решений, что и требовалось. □

Следующая лемма достаточно естественна, причём она оказывается весьма полезной во многих ситуациях.

Лемма 5.3. *Пусть в условиях леммы* 5.2 *центры окружностей из* G *лежат на одной прямой. Тогда парные решения симметричны относительно этой прямой.*

Доказательство. Рассмотрим такую систему координат, в которой линия центров G является осью абсцисс. Снова выберем из G три окружности и сопоставим им векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Обозначим $\theta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^{\perp}$. По лемме 5.1 имеем $\dim \theta = 2$ и $\theta \not\subset \Omega$.

Рассмотрим отображение $f \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, определённое правилом:

$$f \colon (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_0, x_1, -x_2, x_3, x_4).$$

Отображение f, очевидно, линейно, и при этом оно сохраняет значение билинейной формы. Кроме того, оно отображает каждый из векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ в себя (поскольку для них $x_2 = 0$), поэтому в силу линейности f каждая точка из $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ также отображается в себя. Поэтому и $f(\theta) = \theta$.

Если плоскость θ имеет с Ω меньше двух общих прямых, то доказательство не требуется. В противном случае θ пересекает Ω по двум прямым, причём векторы из этих прямых порождают θ. Это значит, что если каждая из этих прямых переходит в себя, то и каждая точка θ переходит в себя (в силу линейности f), т. е. f является тождественным преобразованием — противоречие. Следовательно, эти прямые переходят друг в друга под действием f. Это как раз и означает, что соответствующие им объекты симметричны относительно оси абсцисс, что и требовалось. □

§ 6. Доказательство теоремы 1

Предположим противное условию теоремы, т. е. что нашлись четыре объекта (не все из которых касаются в одной точке) с семью решениями.

Лемма 6.1. *Пусть среди четырёх или более исходных объектов есть точка, а количество решений больше четырёх. Тогда все исходные объекты касаются в одной точке.*

Доказательство. Известно (см., например, [1, с. 100]), что если в тройке объектов есть точка, то количество решений для этой тройки не больше четырёх, за исключением случая вырожденной тройки. Поэтому в нашем случае любая тройка объектов, содержащая точку, вырождена. Ясно, что тогда все объекты касаются в этой точке, что исключено условием. □

Из леммы 6.1 получаем, что все исходные объекты — окружности или прямые. Докажем, что среди них нет касающихся. Предположим противное и рассмотрим любую тройку исходных объектов, содержащую касающиеся. По лемме 3.4 (применённой после инверсии в точке касания) такая тройка либо имеет не более шести решений, либо она вырождена. Но у нас по предположению имеется хотя бы семь решений, поэтому любая тройка исходных объектов, содержащая касающиеся, вырождена. Тогда очевидно, что снова все объекты касаются в одной точке, что исключено формулировкой теоремы.

Таким образом, среди исходных объектов нет точек и пар касающихся. Далее рассмотрим два случая.

1. Среди исходных окружностей или прямых какие-то две пересекаются. Переведём инверсией любые две пересекающиеся обобщённые окружности в пересекающиеся прямые. Для краткости здесь и далее образы исходных объектов при одной или нескольких инверсиях называются просто исходными объектами, а образы решений — просто решениями.

Кроме двух пересекающихся прямых есть ещё две исходные обобщённые окружности. Обозначим их через α и β.

По лемме 3.1 в случае I-типов, отличных от I_1 и I_2, уже по отдельности существует не больше пяти решений, поэтому α и β могут быть только объектами этих типов. Если они имеют разные типы, то их распределения равны 2–2–2–2 и 0–2–4–2 и они пересекаются не больше чем по шести окружностям, т. е. всего есть не более шести решений. Поэтому α и β обязательно имеют одинаковые типы.

Пусть α и β имеют тип I_1. Тогда семь общих решений для α и β, очевидно, имеют распределение 2–2–2–1. Значит, согласно лемме 4.1 хотя бы в трёх секторах α и β должны пересекаться, что невозможно.

Пусть α и β имеют тип I_2. Тогда, чтобы решений было хотя бы 7, необходимо, чтобы эти окружности пересекали обе стороны одного и того же сектора, иначе уже распределения решений для них (4–2–0–2 и 2–4–2–0, либо 4–2–0–2 и 0–2–4–2 в одинаковой нумерации секторов) пересекаются не более, чем по четырём окружностям. С этого сектора и начнём нумерацию. Тогда в секторе S_{I} не более четырёх решений, а значит, в секторах S_{II} и S_{IV} в сумме не меньше трёх. Завершает доказательство первого случая следующая лемма.

Лемма 6.2. *Для двух окружностей α и β, имеющих тип I_2 и пересекающих обе стороны сектора S_{I}, есть не более двух общих решений в секторах S_{II} и S_{IV}.*

Доказательство. Предположим противное. Заметим, что α и β касаются своих решений в секторах S_{II} и S_{IV} внешним образом, т. е. соответствуют комбинации «+++». Центры этих решений лежат на одной прямой — биссектрисе секторов S_{II} и S_{IV}. Ясно, что α и β лежат по одну сторону от этой прямой, в частности, они не могут быть симметричны относительно неё. Противоречие с леммой 5.3. □

2. Никакие две окружности или прямые из исходных четырёх не пересекаются. Переведём инверсией любые два из данных объектов в концентрические окружности. Образы двух оставшихся объектов снова обозначим через α и β.

По лемме 3.2, для α и β отдельно существует четыре решения рода A и столько же рода B, причём каждое из этих множеств симметрично относительно радиуса, на котором расположена соответствующая окружность α или β. Так как у нас, согласно предположению, имеется не меньше семи решений, то хотя бы четыре из них одного рода. Далее нам потребуется несколько лемм.

Лемма 6.3. *Пусть окружности α и β порождают четыре общих решения одного рода. Тогда α и β лежат либо на одном диаметре, либо на перпендикулярных диаметрах. В последнем случае общие решения обязательно имеют род* B, *а их центры образуют прямоугольник* (рис. 8).

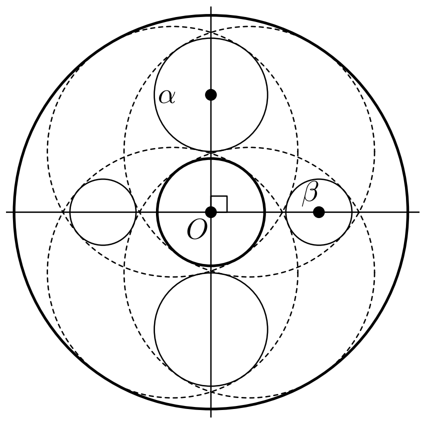


Рис. 8

Доказательство. Пусть α и β не лежат на одном диаметре (иначе доказательство не требуется). Обозначим множество четырёх общих решений одного рода для α и β через X. Поскольку окружности из X являются решениями и для α, и для β, то X симметрично относительно радиусов α и β. Однако по нашему предположению угол между диаметрами, на которых лежат α и β, ненулевой. Поэтому множество X переходит в себя при некотором повороте на $\varphi > 0$ относительно O. Можно считать $\varphi \leqslant 180°$.

Докажем, что $\varphi = 90°$ или $\varphi = 180°$. Рассмотрим произвольную окружность Γ из X. При поворотах на 0, φ, 2φ, и т. д. она переходит в окружность из X. Но в X ровно четыре окружности, поэтому Γ может иметь от двух до четырёх образов при таких поворотах (Γ не может перейти в себя, так как $0 < \varphi \leqslant 180°$). Эти случаи соответствуют поворотам на $180°$, $120°$ и $90°$ соответственно. Однако если образов три, то в X остаётся ещё одна окружность, не являющаяся образом Γ. У неё тоже три образа, которые не совпадают с образами Γ. Получается, что в X хотя бы шесть окружностей, а не четыре — противоречие. Остаются варианты $180°$ и $90°$, которые реализуются, только если центры окружностей из X образуют прямоугольник или квадрат соответственно.

Чтобы теперь доказать, что в X не могут быть окружности рода А, нам понадобится следующая достаточно очевидная лемма.

Лемма 6.4. *Если для α и β есть два общих противоположных решения P и Q рода* А, *то α и β лежат на одном диаметре.*

Доказательство. Заметим, что P и Q не пересекаются, так как они центрально симметричны относительно точки O, которую не содержат

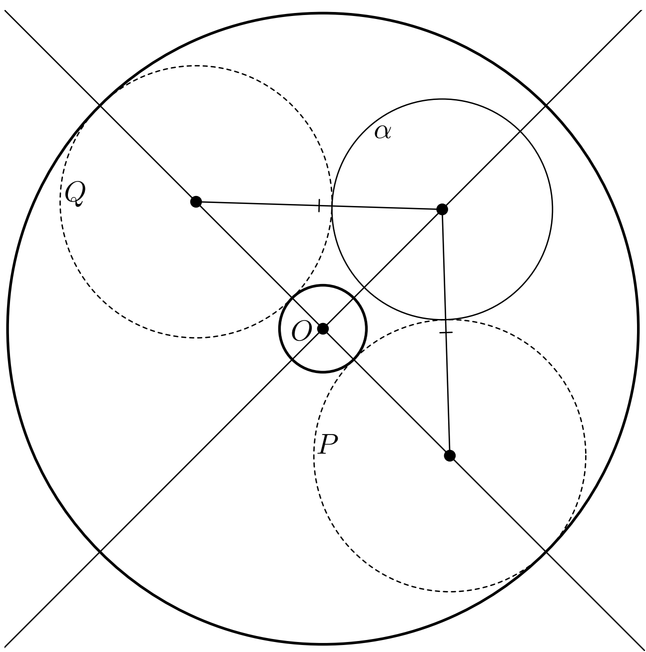


Рис. 9

внутри себя. Радиус окружности α меньше радиуса окружности P, поэтому если α и P касаются внутренним образом, то α лежит внутри P. Но так как P и Q не пересекаются, α не может касаться Q. Значит, α и аналогично β касаются P и Q внешним образом (рис. 9). Но радиусы P и Q равны, поэтому геометрическое место центров окружностей, касающихся внешним образом P и Q, является серединным перпендикуляром отрезка между центрами P и Q, который, очевидно, проходит через O, что и требовалось. □

Продолжим доказательство леммы 6.3. Из леммы 6.4 ясно, что в X не может быть окружностей рода А, так как окружности из X делятся на две пары противоположных, поэтому α и β лежали бы одновременно на двух диаметрах, что невозможно. Таким образом, в X только окружности рода В.

Так как центры окружностей из X образуют прямоугольник, то кроме концентрических существуют ещё четыре окружности, которые касаются всех окружностей из X — они вписаны в криволинейные симметричные четырёхугольники, образованные окружностями из X (рис. 8). Других окружностей, касающихся всех окружностей из X, быть не может по доказанному выше первому случаю основной теоремы. Действительно, в X четыре попарно пересекающихся окружности, и их уже касаются шесть других — две концентрические и четыре вписанные в криволинейные четырёхугольники. Центры этих четырёх окружностей лежат на двух перпендикулярных диаметрах; α и β должны быть двумя из этих четырёх окружностей, т. е. они должны лежать на двух перпендикулярных диаметрах — лемма 6.3 доказана. □

Лемма 6.5. *Пусть окружности α и β порождают четыре общих решения рода* В *и лежат на перпендикулярных диаметрах. Тогда они не могут порождать ещё три общих решения рода* А.

Доказательство. Пусть это не так. Обозначим общие решения рода А через P, Q, R. Докажем, что среди них есть пара противоположных. Так как все они касаются α, а всего среди решений для α четыре решения рода А, причём они разбиваются на две пары симметричных, то среди решений P, Q, R два симметричны относительно радиуса, на котором лежит α. Пусть это P и Q. Аналогично рассмотрим пару окружностей, симметричную относительно радиуса, на котором лежит β. Если это снова P и Q, то они переходят друг в друга при двух симметриях, угол между осями которых составляет $90°$, а тогда P и Q совпадают, что невозможно. Пусть это Q и R (или P и R). Тогда, так как угол между радиусами, на которых лежат α и β, равен $90°$, то P и R (соответственно Q и R) противоположны — отражение относительно двух перпендикулярных осей является центральной симметрией. Таким образом, среди P, Q и R есть пара противоположных. Следовательно, α и β имеют два противоположных решения рода А, из чего с помощью леммы 6.4 получаем, что они лежат на одном диаметре — противоречие. □

Продолжим доказательство теоремы 1. Так как α и β порождают четыре общих решения одного рода, то по лемме 6.3 они лежат либо на одном диаметре, либо на перпендикулярных диаметрах. Но во втором случае α и β порождают ещё три общих решения рода А, что невозможно по лемме 6.5. Таким образом, α и β лежат на одном диаметре, в частности, центры всех исходных окружностей лежат на одной прямой.

Окружности α и β порождают семь общих решений, поэтому по лемме 3.3 из них можно выбрать пару пересекающихся симметричных решений. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 6.6. *Пусть центры всех четырёх исходных окружностей лежат на одной прямой, а среди решений есть два пересекающихся и симметричных относительно этой прямой. Тогда после инверсии в точке пересечения этих решений исходные окружности образуют одно из распределений* 4–0–0–0, 3–0–1–0 *или* 2–0–2–0 *относительно образов этих решений. Количество всех решений в этих случаях не превосходит* 4, 2 *и* 6 *соответственно.*

Доказательство. Центр инверсии лежит на линии центров исходных окружностей (так как точка пересечения двух симметричных окружностей лежит на их оси симметрии). Поэтому центры всех четырёх исходных окружностей до инверсии лежали на одной прямой, проходящей через центр инверсии. Значит, и после инверсии их центры лежат на одной прямой, а тогда и все исходные окружности должны лежать в двух противоположных секторах — первая часть леммы тем самым доказана.

С этого момента мы будем рассматривать решения в качестве исходных объектов (назовём их *новыми исходными объектами*), а четвёрку исходных объектов — наоборот — в качестве решений (назовём их *новыми решениями*). Обозначим последние через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ в том порядке, в котором они касаются любой из прямых.

Рассмотрим по отдельности все возможные распределения четырёх новых решений. В первом случае (распределение 4–0–0–0) по лемме 3.1 оставшиеся новые исходные объекты должны быть типа I_2 или I_4. Но среди четырёх решений для любой окружности типа I_4 заведомо есть пересекающиеся — те, что содержат окружность α на рисунке в табл. 1 внутри себя. Значит, все оставшиеся новые исходные объекты имеют тип I_2. Они касаются ω_1 и ω_4 внешним образом, а ω_2 и ω_3 — внутренним. По лемме 5.2, где в качестве G мы берём все 4 новых решения, получаем, что таких новых исходных объектов не более двух.

Для второго случая (3–0–1–0) вообще не существует подходящего нового исходного объекта никакого типа, в чём нетрудно убедиться с помощью таблицы 1.

В третьем же случае (2–0–2–0) оставшиеся новые исходные объекты могут быть типа I_1 или I_2.

Окружности типа I_2 должны касаться каждого из четырёх новых решений внешним образом. Применим для них лемму 5.2, взяв в качестве G четвёрку новых решений с комбинацией знаков «++++». Получаем, что есть не более двух окружностей типа I_2 (рис. 10 справа).

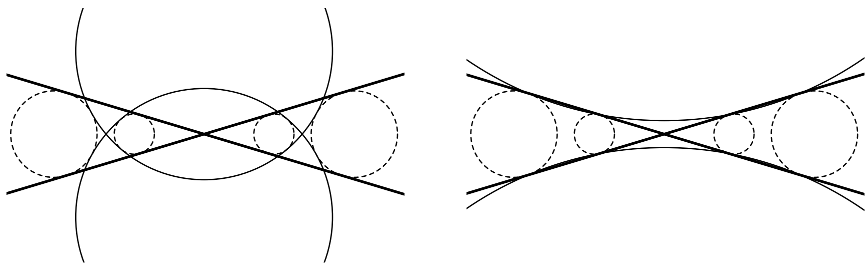


Рис. 10. Распределение новых решений 2–0–2–0

Окружности типа I_1 касаются ω_2 и ω_3 внутренним образом, а ω_1 и ω_4 — внешним. Применим ещё раз лемму 5.2, снова взяв в качестве G четвёрку новых решений с комбинацией знаков «+−−+». Получаем, что есть не более двух окружностей типа I_1 (рис. 10 слева).

Таким образом, общее количество новых исходных объектов типов I_1 и I_2 в этом случае не больше четырёх, т. е. количество решений исходной задачи не больше шести. Доказательство леммы 6.6, а с ней и всей теоремы 1 завершено. □

§ 7. Доказательство теоремы 2

Как и при доказательстве теоремы 1, предположим противное, т. е. что нашлась пятёрка объектов (не все из которых касаются в одной точке) с пятью решениями. По лемме 6.1 среди исходных объектов нет точек. Заметим, что количество решений равно количеству исходных объектов, а также что все решения не могут касаться в одной точке (иначе все исходные объекты касаются в этой же точке). Поэтому решения можно рассматривать в качестве исходных объектов (и наоборот), и среди решений тоже нет точек.

7-1. Ни среди исходных объектов, ни среди решений нет касающихся. Можно считать, что либо среди исходных объектов, либо среди решений есть пересекающиеся. Действительно, в противном случае переведём инверсией любые две исходные обобщённые окружности в концентрические и воспользуемся леммой 3.3.

Полученная пара пересекающихся объектов принадлежит некоторой пятёрке, которую мы и будем считать исходной. Переведём инверсией эти пересекающиеся объекты в прямые. Оставшиеся исходные объекты обозначим α, β и γ. Из леммы 3.1 получаем, что каждый из них должен иметь тип I_1, I_2 или I_5. Но если какой-то объект имеет тип I_5, то среди решений должна быть точка, что невозможно по лемме 6.1. Значит, каждый из объектов α, β и γ имеет тип I_1 или I_2. Прежде чем разбирать возможные случаи, заметим, что две окружности типа I_2 могут иметь больше четырёх общих решений только тогда, когда пересекают обе стороны одного и того же сектора. С этого сектора и начнём нумерацию.

7.1.1° Все окружности α, β и γ имеют тип I_1. Тогда в каждом секторе есть не более двух решений, а распределение всех пяти решений изоморфно 2–2–1–0, 2–1–2–0 или 1–1–1–2. Рассмотрим точки пересечения окружностей α и β, β и γ, α и γ и обозначим их множество через C. Для каждой пары окружностей таких точек не больше двух, поэтому всего их не больше шести.

Согласно лемме 4.2, в секторах с одним решением есть хотя бы одна точка из C. Далее, в секторе с двумя решениями каждая пара окружностей (α и β, β и γ, α и γ) имеет общую точку по лемме 4.1, а какая-то пара имеет в этом секторе даже две общие точки по лемме 4.3. Поэтому в таком секторе есть не меньше четырёх точек из C (все три окружности α, β и γ не могут иметь общую точку, поскольку тогда они имеют метку $[III]_1$ или $[III]_2$, и по лемме 3.1 общее количество решений, которые не являются точками, не больше четырёх).

Таким образом, в случае распределений 2–2–1–0 и 2–1–2–0 имеем $|C| \geqslant 2 \cdot 4 + 1 = 9$, а в случае распределения 1–1–1–2 имеем $|C| \geqslant 3 + 4 = 7$. Но $|C| \leqslant 6$ — противоречие.

7.1.2° Все окружности α, β и γ имеют тип I_2. Рассмотрим случаи в зависимости от количества решений в секторе S_{I}. Обозначим эти решения через ω_i, где $i = 1, 2, 3, 4$, в том порядке, в котором они касаются любой из прямых.

7.1.2А *В секторе S_{I} четыре решения.* Тогда α, β и γ касаются ω_1, ω_4 внешним образом, а ω_2, ω_3 — внутренним. Из леммы 5.2 для $G = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ и комбинации «$+--+$» получаем противоречие.

7.1.2Б *В секторе S_{I} три решения.* Рассмотрим окружность α. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ являются тремя из четырёх решений для α в секторе S_{I}. Простой перебор показывает, что если взять любые три решения из этих четырёх, то среднее из них касается α внутренним образом (см. рисунок в табл. 1). Поэтому α, β и γ касаются ω_2 внутренним образом. Однако всего решений пять, поэтому есть ещё два решения в секторах $S_{\rm II}$ и $S_{\rm IV}$, которые касаются α, β и γ внешним образом. Обозначим их через σ_1 и σ_2. Применив лемму 5.2 для $G = \{\sigma_1, \sigma_2, \omega_2\}$ и комбинации «$++-$», получаем противоречие.

7.1.2B *В секторе $S_{\rm I}$ не более двух решений.* Тогда в секторах $S_{\rm II}$ и $S_{\rm IV}$ в сумме хотя бы три решения, что противоречит лемме 6.2.

7.1.3° Две окружности (например, α и β) типа I_2 и одна окружность (γ) типа I_1. За счёт окружности типа I_1 в секторе $S_{\rm I}$ не более двух решений, но тогда в секторах $S_{\rm II}$ и $S_{\rm IV}$ хотя бы три решения, что противоречит лемме 6.2.

7.1.4° Две окружности (α и β) типа I_1 и одна окружность (γ) типа I_2. В этом случае без ограничения общности возможны распределения решений 1–2–0–2 и 2–2–0–1. Разберём их отдельно.

7.1.4A *Распределение* 1–2–0–2. Так как в секторах $S_{\rm II}$ и $S_{\rm IV}$ по два решения, то из леммы 4.4 получаем (после перенумерации секторов), что все точки пересечения γ с α и β находятся в этих секторах. Далее, по лемме 4.1 окружности α и β также должны иметь общие точки в этих секторах. Таким образом, α, β и γ попарно не имеют общих точек в секторе $S_{\rm I}$ (рис. 11). В таком случае они разбивают его на пять частей, в каждую из которых можно вписать окружность, касающуюся лишь не более двух окружностей из α, β и γ — противоречие.

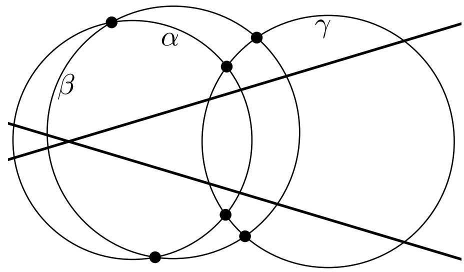


Рис. 11

7.1.4Б *Распределение* 2–2–0–1. Обозначим решения в секторе $S_{\rm I}$ через ω_1 и ω_2, а решения в секторе $S_{\rm II}$ через ω_3 и ω_4 так, чтобы решение с меньшим радиусом имело меньший индекс (рис. 12). Сделаем инверсию в точке пересечения α и β (она существует по лемме 4.1). Заметим, что ω_1 и ω_3 лежат внутри α и β, а ω_2 и ω_4 — вне. Но четыре области, на которые α и β делят плоскость, при инверсии перейдут в секторы соответствующих прямых. Поэтому распределение образов $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ относительно прямых — образов α и β равно 2–0–2–0, и распределение *всех* решений относительно тех же прямых не может снова быть 2–2–0–1. Следовательно, задача сводится к одному из уже разобранных случаев 7.1.1°–7.1.3° или 7.1.4A.

7-2. Среди исходных объектов или среди решений есть касающиеся. Будем считать исходной пятёрку, в которой есть пара касающихся

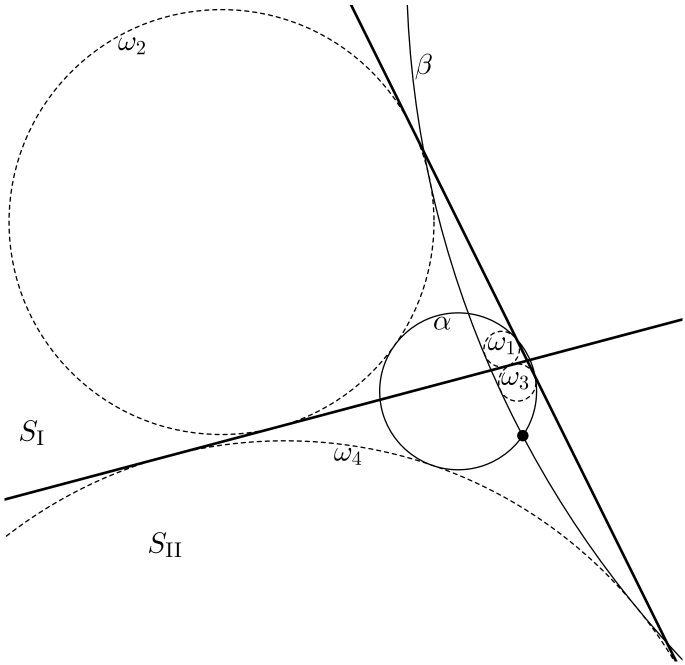


Рис. 12. К доказательству случая 4.2°

объектов. Переведём их инверсией в (горизонтальные) параллельные прямые. Докажем, что среди оставшихся трёх исходных объектов (мы их обозначим, как обычно, α, β и γ) не может быть горизонтальной прямой.

Лемма 7.1. *Пусть в конфигурацию нескольких исходных объектов входят три параллельные прямые, а количество решений больше двух. Тогда все исходные объекты — параллельные прямые или* ∞.

Доказательство. Заметим, что в условиях леммы все решения являются горизонтальными прямыми или ∞, т. е. все они касаются в точке ∞. Но если решений больше двух и все они касаются в одной точке, то, очевидно, и все исходные объекты касаются в той же точке, что и требовалось. □

Среди T-типов T_1–T_9 только два имеют 5 или более решений. Это типы T_1 и T_2, распределения решений для них одинаковы и равны 4+2. Значит, распределение пяти решений может иметь вид 3+2 или 4+1. Разберём эти случаи.

7.2.1° Распределение решений 4+1.

Лемма 7.2. *Пусть зафиксированы две горизонтальные прямые, и некоторые окружности* α *и* β *порождают четыре общих окружности-решения. Тогда линия центров окружностей* α *и* β *вертикальна.*

Доказательство. Предположим противное и обозначим множество из четырёх общих окружностей-решений для α и β через X. Это множество симметрично относительно вертикальных прямых, на которых лежат центры α и β. По нашему предположению эти прямые не совпадают, поэтому X переходит в себя при симметрии относительно каждой из некоторых двух параллельных прямых. Но тогда X переходит в себя и при некотором параллельном переносе, т. е. является бесконечным — противоречие. □

По этой лемме имеем, что центры α, β и γ лежат на одной вертикальной прямой, а тогда они касаются прямой-решения в одной и той же точке, т. е. образуют вырожденную тройку (рис. 13), что исключено леммой 7.1.

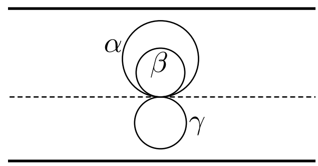


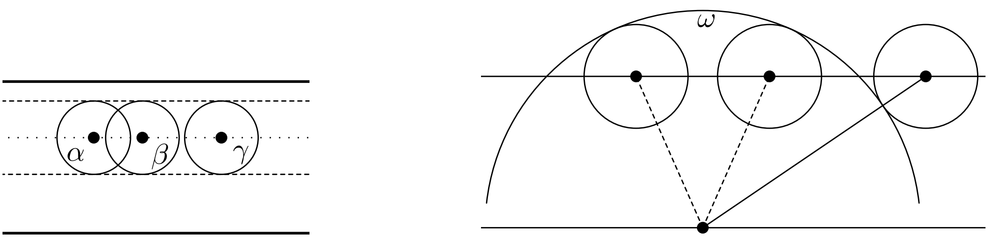
Рис. 13. Распределение 4+1

7.2.2° Распределение решений 3+2. 10 этом случае среди решений есть две параллельные прямые, поэтому радиусы окружностей α, β и γ равны половине расстояния между этими прямыми, а их центры лежат на одной горизонтальной прямой (рис. 14 слева). То же можно сказать и про три оставшихся решения-окружности (поскольку среди исходных объектов есть две параллельные прямые). Получаем два множества окружностей X и Y, которые удовлетворяют следующим условиям:

— в X и Y по три окружности;
— в каждом из множеств окружности имеют равный радиус;
— в каждом из множеств центры окружностей лежат на одной прямой, причём для X и для Y эти прямые параллельны (горизонтальны);
— любые две окружности из разных множеств касаются.

Мы докажем, что одновременное соблюдение этих условий невозможно.

Возьмём в $X \cup Y$ окружность ω с самым *левым* центром. Расстояние между центром окружности из X и центром окружности из Y может принимать одно из двух значений, в зависимости от того, внутреннее



Распределение $3+2$ *Финальное рассуждение*

Рис. 14

касание или внешнее. Поэтому из трёх таких расстояний для окружности ω найдутся два равных. Центры соответствующих окружностей образуют равнобедренный треугольник, одна из вершин которого окажется *левее* центра окружности ω (рис. 14 справа). Полученное противоречие завершает доказательство данного случая и всей теоремы 2. □

§ 8. Доказательство теоремы 3

Доказательство. Возьмём произвольную четвёрку объектов с ровно шестью решениями. По лемме 6.1 среди исходных объектов нет точек. Предположим, что среди исходных объектов есть касающиеся. Переведём их в горизонтальные прямые. Остаются ещё два исходных объекта α и β, и по лемме 7.1 ни один из них не может быть горизонтальной прямой. Но всего имеется шесть решений, поэтому α и β должны иметь тип T_1 или T_2 (см. табл. 2). Распределение решений для каждого из этих типов равно $4{+}2$, поэтому среди решений есть две параллельные горизонтальные прямые, и линия центров окружностей α и β горизонтальна, а их радиусы равны. Однако среди решений есть и четыре окружности, поэтому по лемме 7.2 линия центров α и β вертикальна — противоречие, и среди исходных объектов нет пар касающихся.

Рассмотрим те же случаи, что и в доказательстве теоремы 1.

8-1. Среди исходных окружностей или прямых какие-то две пересекаются. Переведём их инверсией в пересекающиеся прямые. Заметим, что среди I-типов, которые не содержат касающихся объектов, только типы I_1 и I_2 имеют не менее шести решений. Поэтому оставшиеся исходные окружности α и β имеют тип I_1 или I_2, и возможны три случая. Разберём их по отдельности.

8.1.1° Обе окружности α и β имеют тип I_2. Тогда α и β пересекают обе стороны одного и того же сектора (иначе распределения решений для них пересекаются не более чем по четырём окружностям). Пусть это сектор S_{I}. Тогда по лемме 6.2 в секторах S_{II} и S_{IV} не более двух решений, а значит, в секторе S_{I} есть четыре решения, причём α и β касаются их в одной и той же комбинации знаков «$+--+$», считая от O. По лемме 5.3 окружности α и β симметричны относительно биссектрисы секторов S_{I} и S_{III} (рис. 15).

Очевидно, что центр любой окружности, касающейся α и β внешним образом, должен лежать на их оси симметрии (так как радиусы окружностей α и β равны), т. е. на биссектрисе секторов S_{I} и S_{III}. Но центры решений в секторах S_{II} и S_{IV}, которые как раз касаются α и β внешним образом, лежат на биссектрисе секторов S_{II} и S_{IV} — противоречие. Значит, этот случай вообще невозможен.

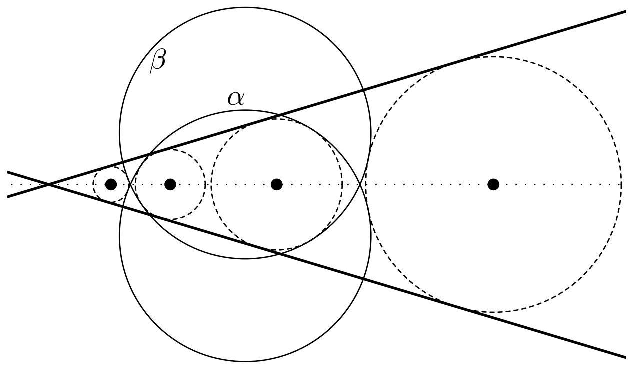


Рис. 15. Обе исходные окружности — типа I_2

8.1.2° Одна окружность (α) типа I_1 и одна окружность (β) типа I_2 (рис. 16 слева). Пусть β пересекает обе стороны сектора S_{II}. Тогда распределение решений равно 2–2–2–0. Сперва нам потребуется следующая (интересная и сама по себе) лемма.

Лемма 8.1. *Пусть окружность α типа I_1 и окружность β типа I_2, пересекающая обе стороны сектора S_{II} или S_{IV}, порождают четыре общих решения с распределением* 2–0–2–0. *Тогда множество этих решений симметрично относительно точки пересечения прямых O.*

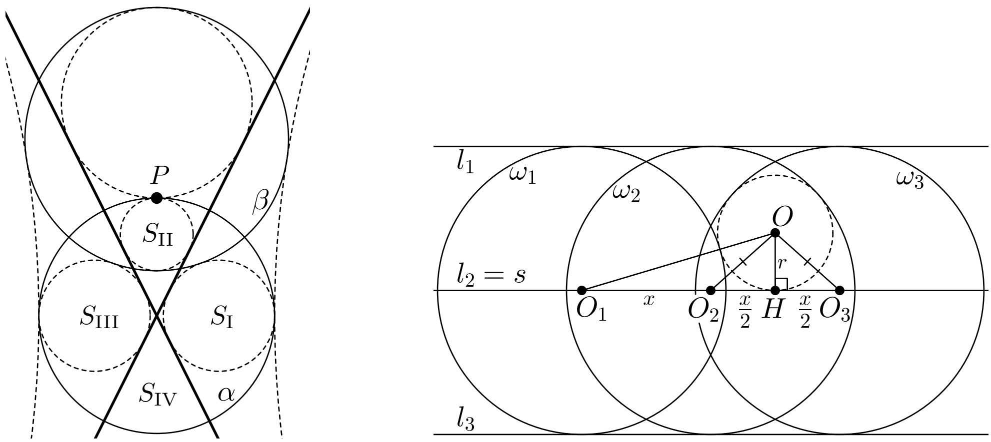
Доказательство. Обозначим общие решения через ω_i (в том порядке, в котором они касаются любой из прямых), а через a_i обозначим длину касательной из O к ω_i для $i = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим инверсию с центром в O, оставляющую β на месте (такая инверсия существует, так как O лежит вне любой окружности типа I_2). При такой инверсии прямые также остаются на месте, поэтому решения для β должны перейти в решения для β. Кроме того, после инверсии любое решение для β остаётся в своём секторе. Но решения для β в секторах S_{I} и S_{III} — это как раз окружности ω_i для $i = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, ω_1 меняется местами с ω_2, а ω_3 — с ω_4. Отсюда $a_1a_2 = a_3a_4$.

Рассмотрим композицию инверсии и центральной симметрии с центром в O, оставляющую α на месте (такое преобразование существует, так как O лежит внутри любой окружности типа I_1). В этом случае любое решение для α переходит в противоположный сектор, поэтому ω_1 меняется с ω_3, а ω_2 меняется с ω_4. Отсюда $a_1a_3 = a_2a_4$.

Из полученных равенств следует, что $a_1{=}a_4$ и $a_2{=}a_3$, что и требовалось. □

Из этой леммы получаем, что α и β переходят в себя при симметрии относительно биссектрисы секторов S_{II} и S_{IV}. Поэтому оба решения в сек-



Изначальная конструкция *Результат инверсии в точке P*

Рис. 16. Одна окружность типа I_1 и одна окружность типа I_2

торе S_{II} касаются α в одной и той же точке P. По лемме 4.4 получаем, что окружности α и β имеют общие точки в секторах S_{I} и S_{III}. Поэтому в секторе S_{II} они общих точек не имеют и $P \notin \beta$.

Докажем теперь, что исходная четвёрка соответствует конфигурации 3 из условия теоремы 3. Сделаем инверсию с центром в точке P. Тогда α и оба решения в секторе S_{II} переходят в некоторые три параллельные прямые l_1, l_2, l_3. Пусть l_2 — образ α, а расстояние между l_1 и l_3 равно 2. Так как $P \notin \beta$, то β переходит в некоторую окружность ω_2, касающуюся l_1 и l_3. Пересекающиеся прямые переходят в окружности ω_1 и ω_3, касающиеся l_1 и l_3, причём в силу симметрии центры этих окружностей равноудалены от центра ω_2 (рис. 16 справа). Обозначим центры ω_i через O_i при $i = 1, 2, 3$, и пусть $x = O_1O_2 = O_2O_3$.

Обозначим через s прямую, равноудалённую от l_1 и l_3. Четыре решения в секторах S_{I} и S_{III} при инверсии переходят в окружности, касающиеся ω_1, ω_2 и ω_3 в соответствии с комбинациями «$+--$» и «$--+$». Рассмотрим одну из этих комбинаций и обозначим подходящие для неё окружности через σ_1 и σ_2. По лемме 5.3 окружности σ_1 и σ_2 симметричны относительно s — линии центров ω_i. Поэтому радиусы окружностей σ_1 и σ_2 равны, а их линия центров вертикальна. Следовательно, σ_1 и σ_2 должны касаться l_2 в одной и той же точке, и l_2 совпадает с s.

Обозначим радиус образа любого из решений в секторе S_{I} и S_{III} через r, а его центр через O. Имеем $OO_1 = 1 + r$, $OO_2 = OO_3 = 1 - r$. Пусть OH — высота равнобедренного $\triangle O_2OO_3$. Имеем $O_2H = HO_3 = x/2$, $OH = r$.

По теореме Пифагора для прямоугольных $\triangle O_1HO$ и $\triangle O_2HO$:

$$\begin{cases} OH^2+HO_1^2=OO_1^2, \\ OH^2+HO_2^2=OO_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3x}{2}\right)^2=(1+r)^2-r^2, \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2=(1-r)^2-r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9x^2}{4}=1+2r, \\ \frac{x^2}{4}=1-2r. \end{cases}$$

Отсюда $x=2/\sqrt{5}$, $r=2/5$, что соответствует конфигурации 3.

8.1.3° Обе окружности α и β имеют тип I_1. Тогда в каждом секторе не более двух решений и возможны распределения 1–2–1–2 и 1–1–2–2 (распределение 2–2–2–0 невозможно, так как иначе по лемме 4.1 α и β имеют три общие точки). Разберём их по отдельности.

8.1.3А *Распределение* 1–2–1–2. Тогда α и β касаются решений в секторах S_{II} и S_{IV} в комбинации «$+--+$» (в том порядке, в котором они касаются любой из прямых). По лемме 5.3 окружности α и β симметричны относительно биссектрисы секторов S_{II} и S_{IV}. Получаем конфигурацию 2.

8.1.3Б *Распределение* 1–1–2–2. Тогда по лемме 4.1 α и β имеют общие точки в секторах S_{I} и S_{II}. Сделаем инверсию в одной из них. Заметим, что одна из прямых разделяет точки пересечения α и β, а другая — нет (рис. 12). Поэтому после инверсии одна из прямых перейдёт в окружность типа I_1, а другая перейдёт в окружность типа I_2. Это соответствует случаю 8.1.2°, который уже рассмотрен.

8-2. Никакие две окружности или прямые из исходных четырёх не пересекаются.

Лемма 8.2. *Даны три попарно непересекающиеся окружности и шесть решений. Тогда можно выбрать две исходные окружности из данных трёх и четыре решения из данных шести так, что если перевести инверсией выбранные исходные окружности в концентрические, то выбранные решения будут одного рода* (A *или* B).

Доказательство. Рассмотрим таблицу из трёх строк и шести столбцов, где строки соответствуют окружностям, а столбцы — решениям. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит бит «1», если i-я окружность касается j-го решения внешним образом, и бит «0» — если внутренним. Докажем, что найдутся такие две строки и четыре столбца, что четыре пары битов в выбранных столбцах совпадают с точностью до замены обоих битов в паре на противоположные.

Обозначим строки таблицы через a, b и c. Рассмотрим побитовые суммы $a\oplus b$, $b\oplus c$ и $c\oplus a$. Если в какой-то из них найдутся четыре одинаковых бита, то соответствующая пара строк и четвёрка столбцов является искомой. В противном случае в каждой из рассматриваемых побитовых сумм ровно три бита «0» и три бита «1», т. е. общее количество единиц в этих суммах равно 9. Но сумма рассматриваемых сумм равна, очевидно, нулевой строке, т. е. общее количество единиц в этих суммах чётно — противоречие.

Заменим теперь бит «1» на знак «+» и бит «0» на знак «−». Рассмотрим две окружности и четыре решения, соответствующие найденным нами строкам и столбцам. Заметим, что для двух окружностей существует всего лишь две комбинации знаков с точностью до замены обоих на противоположные: «++» или «+−». В случае непересекающихся окружностей одна из этих комбинаций соответствует решению, разделяющему исходные окружности, а другая — решению, не разделяющему их. Поэтому и после инверсии, переводящей выбранные окружности в концентрические, выбранные решения будут одновременно разделять или не разделять концентрические окружности, т. е. все принадлежать к роду A или все к роду B. □

Продолжим разбор второго случая теоремы 3. Применим лемму 8.2 и переведём соответствующие окружности в концентрические. Остаются две исходные окружности α и β, порождающие шесть общих решений, из которых четыре имеют один и тот же тип. По лемме 6.3 окружности α и β лежат либо на одном диаметре, либо на перпендикулярных диаметрах. Разберём эти случаи по отдельности.

8.2.1° Окружности α и β лежат на одном диаметре. Сделаем инверсию в точке пересечения симметричных решений (они найдутся согласно лемме 3.3), переводя их в пересекающиеся прямые a и b. Рассмотрим шесть решений в качестве исходных объектов (назовём их *новыми исходными объектами*), а четыре исходных объекта в качестве решений (назовём их *новыми решениями*). Тогда по лемме 6.6 новые решения имеют распределение 2–0–2–0 относительно a и b. Новые исходные объекты при этом должны иметь тип I_1 или I_2, и по лемме 5.2 (применённой к четырём новым решениям) получаем, что объектов каждого из этих типов не больше двух. Поэтому имеется новый исходный объект каждого из этих типов. После применения леммы 8.1 получаем конфигурацию 1.

8.2.2° Окружности α и β лежат на перпендикулярных диаметрах (рис. 17). Тогда по лемме 6.3 четыре общих решения для α и β имеют род B, а их центры образуют прямоугольник. Также α и β порождают ещё два общих решения рода A.

Пусть R и r — радиусы концентрических окружностей, $R > r$. Обозначим решения рода A через σ_1 и σ_2. Далее, пусть A_1, B_1 — точки касания σ_1 с α и β соответственно, A_2, B_2 — точки касания σ_2 с α и β соответственно.

Докажем теперь, что исходная четвёрка соответствует конфигурации 4. Сделаем инверсию с центром в O и радиусом $\sqrt{Rr}$. При такой инверсии все

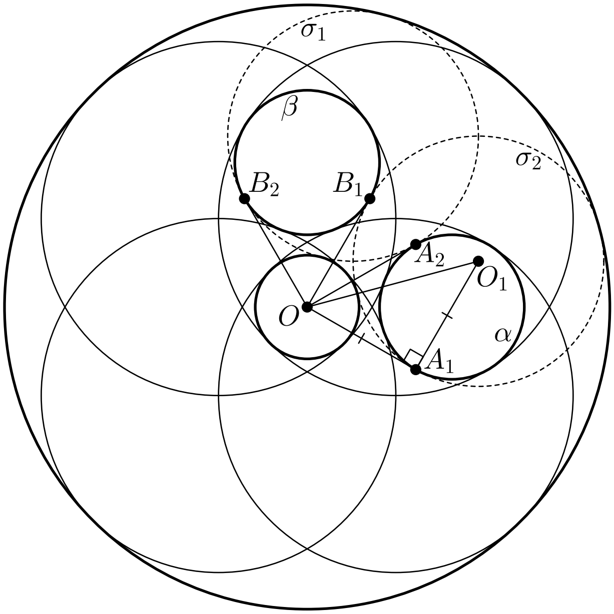


Рис. 17. Случай непересекающихся исходных окружностей

решения рода B перейдут в противоположные себе (так как степень точки O относительно всех решений рода B равна $-Rr$). Образы окружностей α и β должны касаться этих решений, поэтому α и β перейдут в себя. Это значит, что степень точки O относительно α и β равна Rr. Однако степень точки O относительно всех окружностей рода A также равна Rr, поэтому O лежит на радикальной оси σ_1 и α. Следовательно, OA_i — общая касательная к σ_i и α для $i = 1, 2$. Аналогично OB_i — общая касательная к σ_i и β для $i = 1, 2$, причём $OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2 = \sqrt{Rr}$. Более того, $\angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2$, так как это угол, под которым все решения рода A видны из O. Поэтому и $\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2$, а так как $OA_1 = OB_1$, то радиусы окружностей α и β равны. Тогда при повороте на 90° относительно O окружности α и β совпадут, а тогда A_1 и B_1 совпадут, т. е. $\angle A_1OB_1 = 90^\circ$ (рис. 17).

Далее, пусть O_1 — центр σ_1. Он лежит на биссектрисе прямого угла $\angle A_1OB_1$. Поэтому $\triangle OA_1O_1$ — прямоугольный равнобедренный, откуда

$$OA_1 = A_1O_1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{Rr} = \frac{R-r}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4Rr = (R-r)^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 - 6Rr + r^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{R}{r} = 3 + 2\sqrt{2},$$

что соответствует конфигурации 4. Теорема 3 доказана. $\square$

Благодарности

Я признателен Ф. К. Нилову за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Неоценимую помощь в подготовке и улучшении данного текста оказал М. Б. Скопенков. Также хотелось бы поблагодарить М. А. Волчкевича за формулировку задачи, из развития которой появилась данная работа.

Список литературы

[1] *Bruen A., Fisher J. C., Wilker J. B.* Apollonius by inversion // Math. Mag. 1983. Vol. 56, № 2. P. 97–103.

[2] *Cecil T. E.* Lie sphere geometry. N. Y.: Universitext, Springer. 1992.

[3] *Zlobec B. J., Mramor Kosta N.* Configurations of cycles and the Apollonius problem // Rocky Mountain J. Math. 2001. Vol. 31, № 2. P. 725–744.

[4] *Гальперин Г., Делман Ч.* Повесть о трёх кругах // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 111–134.

[5] *Жижилкин И. Д.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

Егор Александрович Морозов, НИУ ВШЭ
gorg.morozov@gmail.com