Выпуклая и комбинаторная геометрия

О проблеме Крума

А. С. Безикович

От редакции

В 2001 г. на Московской математической олимпиаде была предложена следующая задача (11 класс, № 5):

Докажите, что в пространстве существует такое расположение 2001 *выпуклого многогранника, что никакие три из многогранников не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга* (*т. е. имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек*). (*А. Канель*)

За решение этой задачи получил специальную премию имени Б. Н. Делоне ученик 11 класса школы № 57 г. Москвы Илья Межиров.

Вместо слова «касающиеся» мы будем далее использовать более точный термин «смежные». Понятно, что число 2001 в условии этой задачи несущественно и фактически требуется доказать

Утверждение 1. *Для любого n в пространстве существует n попарно смежных выпуклых многогранников.*

Вскоре после олимпиады в интернете была найдена статья [2], в которой доказывалось более сильное утверждение:

Для любого n в пространстве существует n попарно смежных выпуклых конгруэнтных многогранников.

С доказательством этого утверждения на русском языке можно ознакомиться в статье [4].

В статье А. С. Безиковича [1], перевод которой публикуется ниже, доказывается другое усиление утверждения 1:

В пространстве существует бесконечная последовательность выпуклых попарно смежных многогранников.

Отметим, что вместе с этой статьёй была опубликована статья Р. Радо [3], где доказывается более сложный и общий результат:

В кубе любой размерности n существует такая бесконечная последовательность выпуклых многогранников, что для любого натурального $k \leqslant \frac{1}{2}(n+1)$ *любые k из этих многогранников имеют пересечение размерности* $n-k+1$.

В этой статье[1] приводится решение следующей проблемы М. Крума.

Каково максимально возможное число выпуклых многогранников, любые два из которых не имеют общих внутренних точек, но имеют общую границу положительной площади?

На плоскости ответ на аналогичный вопрос равен четырём, поэтому можно ожидать, что и для проблемы Крума ответом будет не очень большое число, например, 10 или 12. Однако, как будет показано, ответ равен бесконечности.

Введём в пространстве декартову систему координат, возьмём точку $A_0(1,0,0)$ и построим в вертикальной плоскости XOZ лежащую над OX выпуклую вниз ломаную $A_0A_1A_2\ldots$ с длиной, меньшей $1/4$, и такую, что угол между направлением оси OX и каждым из векторов $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ больше $3\pi/4$.

Также возьмём такую последовательность[2] положительных чисел δ_n, что $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < 1/4$. Соединим точку $B_0(0,1,0)$ с A_0 и возьмём на отрезке B_0A_0 такую точку D_1, что $B_0D_1 = \delta_1$ (см. рис. 1); соединим D_1 с A_1 и возьмём на отрезке D_1A_1 такую точку D_2, что $D_1D_2 = \delta_2$; соединим D_2 с A_2 и возьмём на отрезке D_2A_2 такую точку D_3, что $D_2D_3 = \delta_3$, и т. д. Обозначим через r_0 плоскость XOY, а через r_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — плоскость, проходящую через точки A_{n-1}, D_n, A_n. Пусть r_n пересекает оси OY и OZ в точках B_n и C_n соответственно. Легко видеть, что все точки B_n лежат на положительной полуоси OY.

Обозначим через S_{k+1}, $k=0,1,2,\ldots$, многогранник, состоящий из всех точек, лежащих в положительном ортанте не ниже каждой из плоскостей $r_0,\ldots,r_k$ и не выше плоскости r_{k+1}.

Иными словами, если x^+, y^+ — полупространства $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, а полупространства r_n^+, r_n^- состоят из всех точек, лежащих соответственно не ниже и не выше плоскости r_n, то $S_{k+1} = x^+ \cap y^+ \cap r_0^+ \cap \ldots \cap r_k^+ \cap r_{k+1}^-$. Будучи пересечением полупространств, многогранник S_{k+1} является выпуклым. Также легко видеть, что треугольник $D_{k+1}C_{k+1}A_{k+1}$ лежит на общей границе многогранников S_{k+1} и S_{k+2}, которые, таким образом, удовлетворяют

[1] Перевод А. А. Заславского.

[2] Ограничения на углы и $\{\delta_n\}$ можно было бы ослабить; их смысл в том, чтобы сделать возможной последующую конструкцию. — *Прим. перев.*

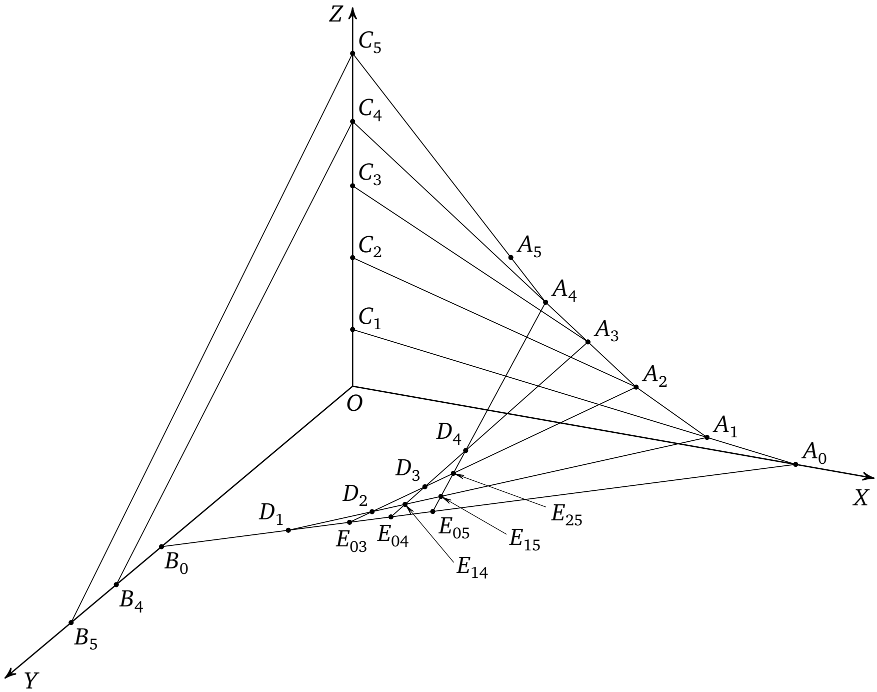

Рис. 1

требованию задачи. Обозначим точки пересечения плоскости r_k, $k > 2$, с прямыми B_0A_0, D_1A_1, D_2A_2, $\ldots$ через E_{0k}, E_{1k}, E_{2k}, $\ldots$ соответственно (см. рис. 1).

Треугольник $A_1D_1A_0$ является частью поверхности многогранника S_1. Кроме того,

$$\triangle A_1D_1A_0 \subset r_0^+ \cap r_1^+ \cap r_2^+. \tag{1}$$

Плоскости $r_3, r_4, \ldots, r_k, \ldots$ пересекают треугольник $A_1D_1A_0$ по отрезкам D_2E_{03}, $E_{14}E_{04}$, $\ldots$, $E_{1k}E_{0k}$, $\ldots$ соответственно, причём часть треугольника слева от $E_{1k}E_{0k}$ (см. рис. 1) лежит в r_k^-, а часть справа — в r_k^+; следовательно,

$$D_2D_1E_{03} \subset S_3, \quad E_{14}D_2E_{03}E_{04} \subset r_3^+ \cap r_4^-,$$
$$E_{15}E_{14}E_{04}E_{05} \subset r_3^+ \cap r_4^+ \cap r_5^-, \quad \ldots,$$

и с учётом (1)

$$D_2D_1E_{03} \subset S_3, \quad E_{14}D_2E_{03}E_{04} \subset S_4, \quad E_{15}E_{14}E_{04}E_{05} \subset S_5, \quad \ldots$$

Поэтому S_1 имеет общую границу положительной площади с каждым из остальных S_k.

Аналогично, рассмотрев треугольники $A_2D_2A_1$, $A_3D_3A_2$, $\ldots$, получаем тот же результат для многогранников $S_2, S_3, \ldots$

Таким образом, $\{S_k\}$ — бесконечная последовательность попарно смежных многогранников.

Список литературы

[1] *Besicovitch A. S.* On Crum's problem // J. London Math. Soc. 1947. Vol. 22. P. 285–287.

[2] *Erickson J.* Arbitrary large neighborly families of congruent symmetric convex 3-polytopes. `http://arxiv.org/abs/math/0106095`. 12.06.2001.

[3] *Rado R.* A sequence of polyhedra having intersections of specified dimensions // J. London Math. Soc. 1947. Vol. 22. P. 287–289.

[4] *Заславский А. А.* О попарно смежных многогранниках // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 127–129.

Абрам Самойлович Безикович (1891–1970)