Покрытие полосками

А. В. Доледенок, А. Н. Доледенок

§ 1. Введение

В настоящей статье мы обсудим некоторые избранные результаты по задаче о покрытии фигур полосками. Для простоты изложения почти все рассуждения и доказательства мы будем приводить лишь для двумерного случая. Тем не менее, многие доказательства почти дословно переносятся на случай произвольной размерности.

Полоска в $\mathbb{R}^d$ — это множество точек, заключённых между двумя параллельными гиперплоскостями (включая сами гиперплоскости). *Шириной* полоски будем называть расстояние между гиперплоскостями, её ограничивающими. Во избежание путаницы в случае $d = 3$ иногда будем называть полоску *слоем*.

Основу исследования задачи о покрытии полосками заложили работы А. Тарского (см. [17, 18]), в которых он рассматривал величину $\tau(x)$, равную наименьшему количеству частей, на которые необходимо разбить прямоугольник $x \times \frac{1}{x}$, чтобы сложить единичный квадрат. В статье [16] Х. Мёзе решил частный случай этой задачи, а именно, он показал, что $\tau(n) = n$. Тарский, используя ключевую идею из работы Мёзе, доказал следующее утверждение:

Если круг покрыт полосками, то сумма их ширин не меньше диаметра круга.

Приведём доказательство этого утверждения. Нам потребуется красивый факт, известный ещё Архимеду. Пересечём сферу и слой так, чтобы обе плоскости, ограничивающие слой, имели со сферой общие точки. Тогда площадь пересечения слоя со сферой равна $\pi\omega D$, где ω — расстояние между плоскостями, а D — диаметр сферы. Это означает, что как бы ни был расположен слой ширины ω, площадь его пересечения со сферой будет одинакова. В частности, площадь всей сферы равна πD^2.

Предположим, что круг C покрыт полосками, ширины которых равны $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Рассмотрим сферу, для которой наш круг принадлежит экваториальной плоскости. Каждой полоске поставим в соответствие такой слой, что ограничивающие его плоскости проходят через стороны полоски перпендикулярно плоскости круга (см. рис. 1). Заметим, что если полосками покрыт весь круг, то соответствующие им пересечения со сферой покроют всю сферу. Поэтому сумма площадей этих пересечений должна быть не меньше площади всей сферы, т. е.

$$\pi\omega_1 D + \pi\omega_2 D + \ldots + \pi\omega_n D \geqslant \pi D^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n \geqslant D,$$

что и требовалось. Заметим также, что если внутренности каких-то двух полосок, покрывающих круг, пересекаются внутри круга, то неравенство станет строгим, т. е. суммарная ширина будет строго больше диаметра круга. Поэтому равенство суммарной ширины диаметру достигается только тогда, когда полоски лежат параллельно друг другу и стыкуются ограничивающими их прямыми, две из которых касаются круга.

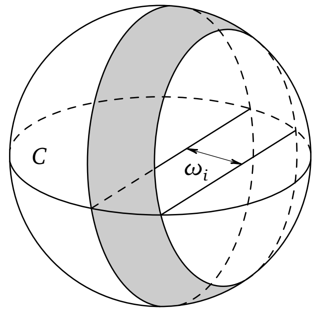


Рис. 1

Прежде чем обсуждать дальнейшие результаты, дадим несколько определений. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она целиком содержит отрезок, их соединяющий. *Шириной фигуры в направлении* $\vec{v}$ называется ширина $\omega(\vec{v})$ самой узкой полоски, перпендикулярной вектору $\vec{v}$ и содержащей данную фигуру. Иначе говоря, проведём прямую, параллельную $\vec{v}$, и спроецируем на эту прямую нашу фигуру. Длина получившегося отрезка и будет равна ширине по направлению. Например, ширина круга в любом направлении равна его диаметру, а у единичного квадрата ширина по направлению может принимать любое значение от 1 до $\sqrt{2}$.

Шириной фигуры называется наименьшая из ширин по всем направлениям, т. е. ширина самой узкой полоски, в которую можно заключить фигуру (см. рис. 2). Таким образом, ширина круга равна его диаметру, а ширина квадрата равна длине его стороны.

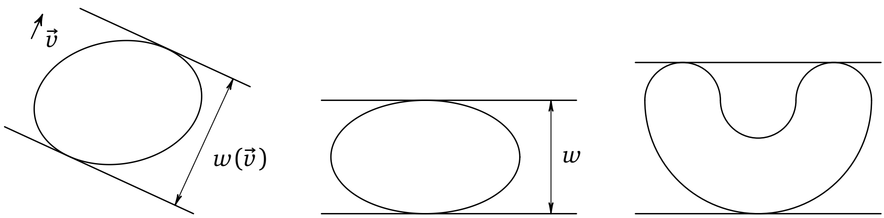


Рис. 2

В дальнейшем нам потребуется следующий факт: ширина треугольника равна длине его наименьшей высоты. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в его справедливости.

Вернёмся к покрытию полосками. В 1950 году Т. Банг в работе [5] доказал обобщение утверждения про покрытие круга полосками:

Теорема Банга. *Пусть выпуклое тело F в $\mathbb{R}^d$ покрыто конечным числом полосок. Тогда сумма ширин этих полосок не меньше ширины F.*

Несложно убедиться, что без условия выпуклости тела теорема Банга неверна. Как и для круга, в случае произвольной фигуры имеется естественное покрытие полосками, когда полоски лежат параллельно друг другу в направлении ширины фигуры, стыкуясь ограничивающими их прямыми. Стоит отметить, что если в случае круга это был единственный способ покрыть фигуру так, чтобы суммарная ширина полосок была равна ширине фигуры, то в случае произвольной выпуклой фигуры могут существовать и другие способы. Например, правильный треугольник можно покрыть не только одной полоской ширины, равной высоте треугольника, но и тремя полосками так, как изображено на рис. 3. Ясно, что их суммарная ширина равна высоте треугольника.

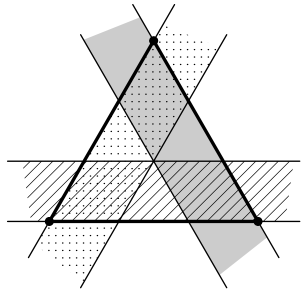


Рис. 3

Иными словами, теорема Банга говорит нам, что ничего лучше, чем класть дощечки рядом друг с другом, мы не придумаем. Мы можем придумать не хуже, но лучше — не можем.

Как и при доказательстве теоремы Банга для круга, в случае $d = 2$ можно было бы пытаться придумать для произвольной выпуклой фигуры такую поверхность, что любой слой фиксированной ширины высекает на ней фигуру фиксированной площади. Однако несложно показать, что для правильного треугольника такой поверхности не существует. В противном случае, если треугольник единичной ширины покрыт полосками в k слоёв (т. е. каждая точка покрыта хотя бы k полосками), их суммарная ширина должна быть не меньше k. Но на рис. 4 правильный треугольник покрыт тремя полосками, ширина каждой из которых в два раза меньше ширины треугольника, т. е. суммарная ширина меньше, чем 2. Более того, поверхность с указанным свойством существует только для круга [10]. Таким образом, для доказательства теоремы Банга в случае произвольной

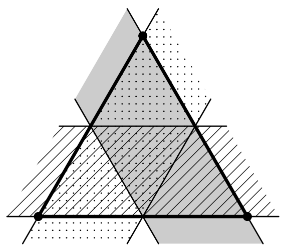


Рис. 4

фигуры необходимо использовать принципиально другие соображения. Мы приведём доказательство теоремы Банга в § 3. Доказательство теоремы Банга уже публиковалось в «Математическом просвещении» — его можно найти в статье [2].

Решив исходную задачу, Т. Банг сформулировал новую, постановку которой можно назвать более естественной, поскольку она инвариантна относительно аффинных преобразований. Нам потребуется ещё одно определение: *относительной шириной* полоски назовём отношение ширины этой полоски к ширине фигуры в направлении, перпендикулярном полоске.

Гипотеза Банга. *Если выпуклое тело F в $\mathbb{R}^d$ покрыто конечным числом полосок, то сумма относительных ширин этих полосок не меньше* 1.

Эта гипотеза является усилением теоремы Банга. Действительно, рассмотрим направление, ширина вдоль которого равна ширине фигуры. Для каждой полоски S_i из покрытия рассмотрим такую полоску S'_i, что ограничивающие её гиперплоскости перпендикулярны этому направлению, а относительная ширина такая же. Понятно, что абсолютная ширина полоски S'_i не больше ширины полоски S_i. Если сумма относительных ширин хотя бы 1, то сумма ширин новых полосок не меньше ширины фигуры, что и утверждает теорема Банга. Для трёх и более полосок гипотеза Банга до сих пор не доказана. В 1991 году К. Болл доказал гипотезу Банга [4] для центрально-симметричных тел. На данный момент это является наилучшим продвижением. Подробнее речь о гипотезе Банга пойдёт в § 5.

В 2003 году В. М. Кадец доказал в работе [13] один из наиболее сильных на данный момент результатов в задаче о покрытии выпуклыми телами единичного шара. Для выпуклого тела F *вписанной сферой* назовём сферу наибольшего радиуса, которая содержится внутри F.

Теорема Кадеца. *Пусть выпуклое тело F покрыто выпуклыми телами $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Тогда радиус вписанной сферы F не больше, чем сумма радиусов вписанных сфер $F_1, \ldots, F_n$.*

Из теоремы Кадеца вытекает теорема Банга для шара. Действительно, в качестве F нужно взять шар, а в качестве $F_1, \ldots, F_n$ — полоски. Доказательство теоремы Кадеца мы обсудим в § 4.

Теорему Банга можно интерпретировать следующим образом. Пусть в $\mathbb{R}^d$ расположено выпуклое тело и несколько полосок. Переместить полоски таким образом, чтобы покрыть ими тело, можно в том и только том случае, когда их суммарная ширина не меньше ширины тела. Вопрос становится более интригующим, если запретить поворачивать полоски, т. е. разрешить только параллельные переносы полосок. При каком условии ими можно будет покрыть тело? Впервые эта задача была рассмотрена в работе [11].

В плоском случае для единичного круга существует такая константа c, что любая система полосок на плоскости, с суммарной шириной не меньше c, допускает покрытие круга их параллельными переносами, подробнее про это мы поговорим в § 6. В случае $d \geqslant 3$ задача не решена окончательно. Неизвестно даже, удастся ли покрыть единичный шар параллельными переносами полосок, если сумма их ширин бесконечна. Соответствующее утверждение носит название гипотезы Макаи — Паха (см. [15]).

Гипотеза Макаи — Паха. *Бесконечная последовательность полосок в пространстве $\mathbb{R}^d$ с ширинами $\omega_1, \omega_2, \ldots$ допускает покрытие пространства $\mathbb{R}^d$ параллельными переносами тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i = \infty.$$

Несложно видеть, что если параллельными переносами полосок с бесконечной суммой ширин можно покрыть единичный шар, то можно покрыть таким образом и всё пространство. Действительно, разобьём полоски на два множества таким образом, чтобы сумма ширин в каждом множестве была бесконечна. Полосками первого множества покроем единичный шар. Проделав ту же самую операцию с оставшимися полосками, их частью покроем ещё один шар радиуса 1 и т. д. Поскольку единичными шарами можно покрыть всё пространство, то и параллельными переносами полос можно покрыть всё пространство.

Необходимость расходимости ряда в гипотезе Макаи — Паха напрямую следует из теоремы Банга: если $\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i < D$, то полосками нельзя покрыть даже шар диаметра D. Достаточность доказана только для случая $d = 2$ в работе [15]. Для $d \geqslant 3$ наилучший результат принадлежит А. Б. Купавскому и Я. Паху [14]. Из него, в частности, следует, что если ширины полос образуют гармонический ряд, то их параллельными сдвигами можно покрыть всё $\mathbb{R}^d$. Подробнее этот результат обсуждается в § 6.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Основным объектом статьи будут выпуклые фигуры на плоскости. Нам понадобятся следующие свойства выпуклых фигур.

- *Пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой.*

Действительно, если взять точки A и B внутри пересечения двух выпуклых фигур, то отрезок AB лежит и в первой фигуре, и во второй.

- *В каждой точке границы выпуклой фигуры F можно провести опорную прямую.*

Напомним, что прямая называется *опорной*, если она имеет общие точки с фигурой и вся фигура лежит по одну сторону от прямой. Возьмём произвольную точку A границы. Проведём из неё всевозможные лучи, проходящие через отличные от A точки фигуры. В силу выпуклости эти лучи заполнят полуплоскость или угол, меньший 180° (см. рис. 5). В первом случае опорной прямой будет ограничивающая полуплоскость прямая. Во втором случае подойдёт любая прямая, не проходящая внутри угла.

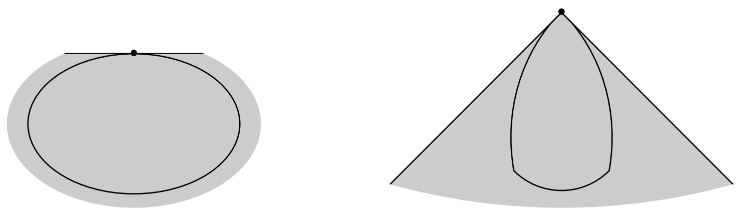
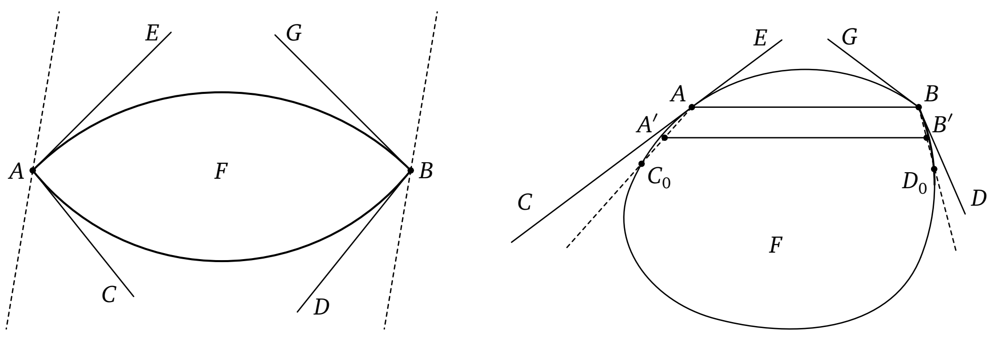

а) б)

Рис. 5

- *Через концы наибольшей из хорд выпуклой фигуры F, имеющих направление $\vec{v}$, можно провести пару параллельных опорных прямых.*

Пусть AB — наибольшая из хорд, имеющих направление $\vec{v}$ (если их несколько, то рассмотрим любую из них). Аналогично рис. 5 б) построим углы CAE и DBG, в которых содержится F (см. рис. 6 а). Докажем, что $\angle CAB + \angle DBA \leqslant 180°$. Предположим противное (см. рис. 6 б). Выберем на границе F такие точки C_0 и D_0, что $\angle C_0AB + \angle D_0BA > 180°$. В силу выпуклости, отрезки AC_0 и BD_0 целиком лежат внутри фигуры. Проведём прямую, параллельную AB и пересекающую отрезки AC_0 и BD_0 в точ-



а) б)

Рис. 6

ках A' и B' соответственно. Тогда длина отрезка $A'B'$ больше длины отрезка AB, что противоречит выбору AB. Следовательно, $\angle CAB + \angle DBA \leqslant 180°$. Аналогично $\angle EAB + \angle GBA \leqslant 180°$. Теперь существование нужных опорных прямых очевидно.

§ 3. Доказательство теоремы Банга

Мы приведём доказательство теоремы Банга для плоскости от противного. В случае произвольной размерности доказательство полностью аналогично. Предположим, что фигура F покрыта полосками $S_1, S_2, \ldots, S_n$, сумма ширин которых меньше ширины фигуры F. Полоске S_i сопоставим вектор $\vec{v}_i$, перпендикулярный ограничивающим её прямым (из двух возможных направлений вектора выберем произвольное) и по длине равный половине ширины S_i. Рассмотрим множество из 2^n точек:

$$O + \lambda(\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_n),$$

где $\lambda > 1$ таково, что сумма ширин полосок $S_1, \ldots, S_n$, умноженная на λ, меньше ширины фигуры F.

Доказательство теоремы Банга будет состоять из двух частей. На первом шаге мы докажем, что можно выбрать точку O таким образом, что все 2^n точек будут лежать внутри фигуры F. На втором шаге мы докажем, что все эти точки не могут быть покрыты полосками. Полученное противоречие завершит доказательство.

Лемма 1. *Пусть F — выпуклая фигура, ω — её ширина, F' — фигура, полученная из F параллельным переносом на вектор $\vec{v}$. Тогда ширина пересечения $F \cap F'$ не меньше, чем $\omega - |\vec{v}|$.*

Доказательство. Пусть $|\vec{v}| < \omega$, в противном случае утверждение очевидно. Пусть AB — наибольшая из хорд фигуры F, имеющих направление $\vec{v}$ (см. рис. 7). Проведём через точки A и B параллельные опорные

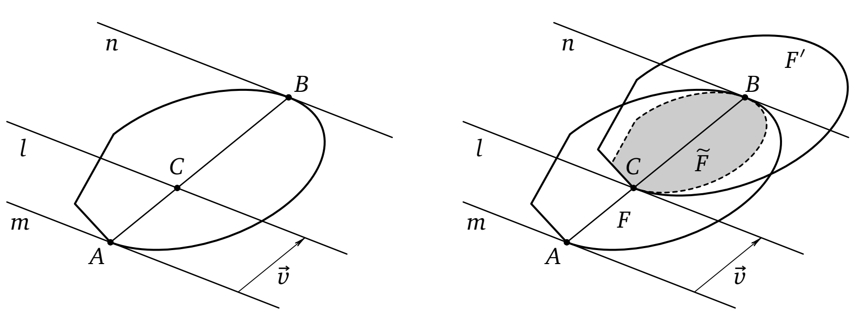


Рис. 7

прямые m и n. Пусть прямая l получается из прямой m параллельным переносом на вектор $\vec{v}$, C — точка пересечения прямых l и AB. Без ограничения общности, l пересекается с фигурой F.

Рассмотрим фигуру $\widetilde{F}$, полученную из F гомотетией с центром в точке B и коэффициентом $\frac{BC}{BA}$. Очевидно, что $\widetilde{F}$ лежит внутри F. Заметим, что $\widetilde{F}$ можно получить из F' гомотетией с центром в точке C и таким же коэффициентом, поэтому $\widetilde{F}$ лежит и внутри F'. Получаем, что ширина пересечения не меньше чем $\frac{BC}{BA} \cdot \omega$. Воспользовавшись тем, что $|\vec{v}| = AC$, получим цепочку равносильных неравенств:

$$\frac{BC}{BA} \cdot \omega \geqslant \omega - |\vec{v}| \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{v}| \geqslant \omega \cdot \frac{AC}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad AC \geqslant \omega \cdot \frac{AC}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad AB \geqslant \omega.$$

Последнее неравенство верно, поскольку ω — ширина F. □

Лемма 2. *Рассмотрим 2^n сдвигов фигуры F: $F + \lambda(\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_n)$. Пересечение этих фигур не пусто, причём ширина общего пересечения не меньше, чем $\omega - 2\lambda(|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| + \ldots + |\vec{v}_n|)$.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по числу векторов n. База при $n = 1$ вытекает из леммы 1 (фигура $F + \lambda\vec{v}_1$ получается из $F - \lambda\vec{v}_1$ переносом на вектор $2\lambda\vec{v}_1$, см. рис. 8).

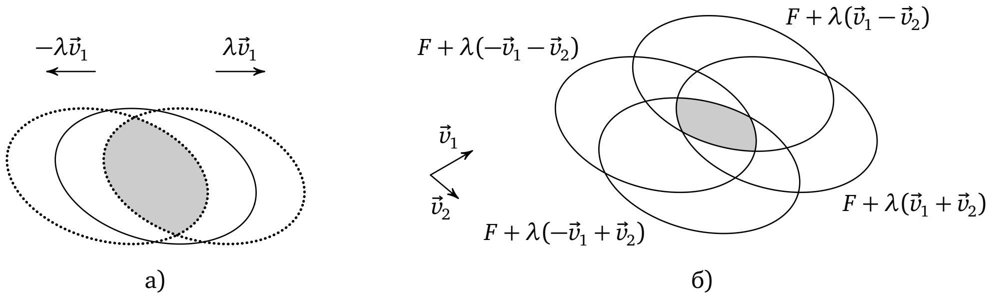


Рис. 8

Докажем переход. Обозначим через F_{k-1} пересечение 2^{k-1} фигур

$$F + \lambda(\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_{k-1}).$$

По предположению индукции ширина F_{k-1} не меньше чем

$$\omega - 2\lambda(|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| + \ldots + |\vec{v}_{k-1}|).$$

Пусть F_k — пересечение фигур $F_{k-1} + \lambda\vec{v}_k$ и $F_{k-1} - \lambda\vec{v}_k$. Покажем, что F_k лежит в пересечении всех 2^k фигур (отмечено серым на рис. 8). Поскольку ширина F_k не меньше, чем ширина F_{k-1}, уменьшенная на $2\lambda|\vec{v}_k|$, то тем самым утверждение леммы будет доказано.

Рассмотрим фигуру $F + \lambda(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k)$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \{-1, 1\}$. Тогда

$$F_{k-1} \subset F + \lambda(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{v}_{k-1}),$$

откуда

$$F_{k-1} + \lambda\alpha_k\vec{v}_k \subset F + \lambda(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{v}_{k-1} + \alpha_k\vec{v}_k).$$

Но $F_k \subset F_{k-1} + \lambda\alpha_k\vec{v}_k$, откуда получаем требуемое. □

Рассмотрим некоторую точку O, лежащую в пересечении 2^n фигур из леммы 2. Выберем произвольные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$. Согласно выбору точки O, она принадлежит фигуре $F + \lambda(-\alpha_1\vec{v}_1 - \alpha_2\vec{v}_2 - \ldots - \alpha_n\vec{v}_n)$. Сделав параллельный перенос на вектор $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$, получим, что

$$O + (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n) \in F.$$

Поскольку изначально мы взяли произвольные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$, то выполнен первый шаг, а именно, мы нашли такую точку O, что 2^n точек $O + \lambda(\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_n)$ принадлежат фигуре F.

Перейдём ко второму шагу доказательства. Достаточно доказать следующую лемму.

Лемма Банга. *Для каждой полоски S_i из множества полосок $S_1, S_2, \ldots, S_n$ зафиксируем вектор $\vec{v}_i$, перпендикулярный прямым, ограничивающим эту полоску, и по длине равный половине ширины S_i, а также зафиксируем произвольное число $\lambda > 1$. Тогда для любой точки O хотя бы одна из 2^n точек множества $O + \lambda(\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_n)$ не покрыта полосками.*

Мы приведём два доказательства леммы Банга. Первое доказательство основано на работе [7].

Первое доказательство леммы Банга. Рассмотрим плоскость γ, в которой находятся полоски, и произвольную точку O в ней. Пусть $\vec{e}$ — единичный вектор нормали к γ. Рассмотрим такую точку Y, что $\overrightarrow{OY} = t\vec{e}$ для некоторого числа $t > 0$. Каждой полоске S_i сопоставим слой S_i' следующим образом. Плоскость, проходящая через точку Y и срединную прямую полоски S_i, является срединной плоскостью слоя S_i', а плоскости, ограничивающие слой, проходят через прямые, ограничивающие S_i. Обозначим через $\vec{v}_i{}'$ перпендикулярный S_i' вектор, длина которого равна половине ширины S_i', причём $(\vec{v}_i, \vec{v}_i{}') > 0$ (см. рис. 9).

Докажем, что слои $S_1', S_2', \ldots, S_n'$ не покрывают хотя бы одну из 2^n точек $O + \lambda(\pm\vec{v}_1{}' \pm \vec{v}_2{}' \pm \ldots \pm \vec{v}_n{}')$. Выберем среди них наиболее удалённую от Y

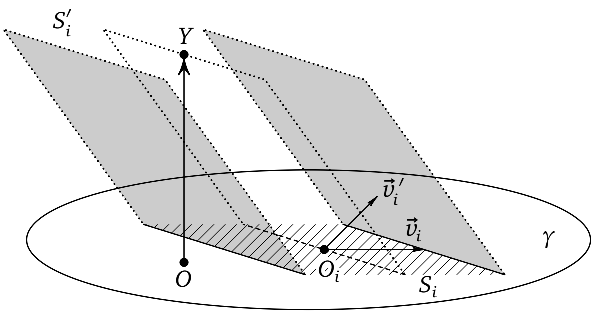


Рис. 9

точку X. Предположим, что она покрыта слоем S_i'. Заменим в разложении вектора $\overrightarrow{OX}$ знак перед вектором $\vec{v}_i{}'$ на противоположный, полученную точку обозначим через X_1. Отрезок XX_1 перпендикулярен срединной плоскости слоя S_i', а его длина равна $2\lambda|\vec{v}_i{}'|$, поэтому точка X_1 не лежит в слое S_i', а следовательно, расположена от Y дальше, чем X. Полученное противоречие показывает, что наиболее удалённая от Y точка не покрыта слоями. Более того, из доказательства несложно видеть, что все точки шара с центром в точке X и радиусом $(\lambda-1)d'$, где $d'=\min(|\vec{v}_1{}'|, |\vec{v}_2{}'|, \ldots, |\vec{v}_n{}'|)$, также не покрыты слоями.

Устремим t к бесконечности. Очевидно, что при этом $\vec{v}_i{}' \to \vec{v}_i$ для всех i, поэтому все точки множества $O + \lambda(\pm\vec{v}_1{}' \pm \vec{v}_2{}' \pm \ldots \pm \vec{v}_n{}')$ стремятся к соответствующим точкам множества $O + \lambda(\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_n)$ и $d' \to d$, где $d = \min(|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2|, \ldots, |\vec{v}_n|)$. Поэтому при достаточно большом t каждый из 2^n шаров с центрами в точках множества $O + \lambda(\pm\vec{v}_1{}' \pm \vec{v}_2{}' \pm \ldots \pm \vec{v}_n{}')$ и радиусами $(\lambda-1)d'$ содержит соответствующую центру точку из множества $O+\lambda(\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_n)$. Поскольку мы показали, что хотя бы один из этих шаров не покрыт слоями $S_1', \ldots, S_n'$, то и одна из точек множества $O+\lambda(\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_n)$ не покрыта слоями, а следовательно, и полосками $S_1, \ldots, S_n$. Лемма, а вместе с ней и теорема Банга, доказана. □

Приведём второе доказательство леммы Банга. Но предварительно проделаем выкладки в обозначениях первого доказательства. Пусть

$$\overrightarrow{OX} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i{}',$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ для любого i. Распишем квадрат длины отрезка XY:

$$|XY|^2 = \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i{}' - t\vec{e}\right)^2 = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_i \vec{v}_i{}', \alpha_j \vec{v}_j{}') - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \vec{v}_i{}', t\vec{e}) + t^2.$$

Обозначим через O_i проекцию точки O на срединную прямую полоски S_i (см. рис. 10). Из геометрических соображений легко получить, что

$$(\vec{v}_i{}', t\vec{e}) = \pm\frac{t^2\cdot|\vec{v}_i|\cdot|OO_i|}{t^2+|OO_i|^2},$$

где перед дробью стоит знак «+», если векторы $\overrightarrow{OO_i}$ и $\vec{v}_i$ сонаправлены, и знак «−» в противном случае. Отсюда

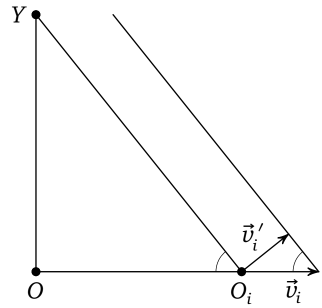


Рис. 10

$$(\alpha_i\vec{v}_i{}', t\vec{e}) = \pm\alpha_i\frac{t^2\cdot|\vec{v}_i|\cdot|OO_i|}{t^2+|OO_i|^2} = (\overrightarrow{OO_i}, \alpha_i\vec{v}_i)\cdot\frac{t^2}{t^2+|OO_i|^2}.$$

В итоге получаем, что

$$|XY|^2 = \lambda^2\sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_i\vec{v}_i{}', \alpha_j\vec{v}_j{}') - 2\lambda\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OO_i}, \alpha_i\vec{v}_i)\cdot\frac{t^2}{t^2+|OO_i|^2} + t^2.$$

Заметим, что предел выражения $\frac{1}{\lambda}(|XY|^2-|OY|^2)$ при $t\to+\infty$ будет конечным, а именно

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\lambda}(XY^2-OY^2) = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\lambda}(XY^2-t^2) = \lambda\sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_i\vec{v}_i, \alpha_j\vec{v}_j) - 2\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OO_i}, \alpha_i\vec{v}_i).$$

Согласно выбору точки X, длина отрезка XY — наибольшая возможная, поэтому выражение $\frac{1}{\lambda}(XY^2-OY^2)$ также принимает наибольшее возможное значение. Отсюда получаем

Второе доказательство леммы Банга. Определим на множестве наборов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\in\{-1, 1\}^n$ функционал

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \lambda\sum_{i,j=1}^{n}(\varepsilon_i\vec{v}_i, \varepsilon_j\vec{v}_j) - 2\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OO_i}, \varepsilon_i\vec{v}_i).$$

Пусть функционал достигает максимума на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Докажем, что точка X, определяемая равенством

$$\overrightarrow{OX} = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i,$$

не покрыта полосками. Пусть X покрыта некоторой полоской (без ограничения общности, полоской S_1). Изменим знак при векторе $\vec{v}_1$ на противоположный и докажем, что на полученной точке X_1 функционал принимает большее значение. Выделим в выражении для $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ все слагаемые, не зависящие от $\vec{v}_1$:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \lambda \sum_{i,j=2}^{n} (\varepsilon_i \vec{v}_i, \varepsilon_j \vec{v}_j) + 2\lambda \sum_{i=2}^{n} (\varepsilon_1 \vec{v}_1, \varepsilon_i \vec{v}_i) + \\ + \lambda |\vec{v}_1|^2 - 2 \sum_{i=2}^{n} (\overrightarrow{OO_i}, \varepsilon_i \vec{v}_i) - 2(\overrightarrow{OO_1}, \varepsilon_1 \vec{v}_1).$$

Тогда

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - f(-\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \\ = \Big(2\lambda \sum_{i=2}^{n} (\alpha_1 \vec{v}_1, \alpha_i \vec{v}_i) - 2\lambda \sum_{i=2}^{n} (-\alpha_1 \vec{v}_1, \alpha_i \vec{v}_i)\Big) - \\ - \big(2(\overrightarrow{OO_1}, \alpha_1 \vec{v}_1) - 2(\overrightarrow{OO_1}, -\alpha_1 \vec{v}_1)\big) = 4\lambda \sum_{i=2}^{n} (\alpha_1 \vec{v}_1, \alpha_i \vec{v}_i) - 4(\overrightarrow{OO_1}, \alpha_1 \vec{v}_1) = \\ = 4\Big(\alpha_1 \vec{v}_1,\ \lambda \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \vec{v}_i - \overrightarrow{OO_1}\Big) = 4\Big(\alpha_1 \vec{v}_1,\ \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i - \overrightarrow{OO_1}\Big) - 4\lambda |\vec{v}_1|^2.$$

Поскольку $\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i - \overrightarrow{OO_1}$ — вектор с началом на срединной прямой полоски S_1 и концом внутри S_1 (см. рис. 11), имеем

$$\Big(\alpha_1 \vec{v}_1, \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i - \overrightarrow{OO_1}\Big) < \lambda |\vec{v}_1|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) < f(-\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

противоречие. Таким образом, лемма Банга доказана. □

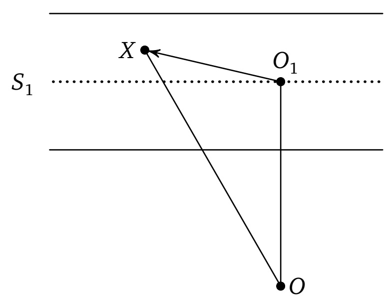


Рис. 11

§ 4. Теорема Кадеца

В этом параграфе мы докажем теорему Кадеца для плоского случая. В случае размерности пространства $d > 2$ доказательство аналогично.

Теорема Кадеца. *Пусть выпуклое тело F покрыто выпуклыми телами $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Тогда радиус вписанной сферы F не больше, чем сумма радиусов вписанных сфер $F_1, \ldots, F_n$.*

Нам понадобятся следующие свойства вписанной окружности.

1. *У всякой выпуклой фигуры либо есть одна вписанная окружность, либо их бесконечно много.*

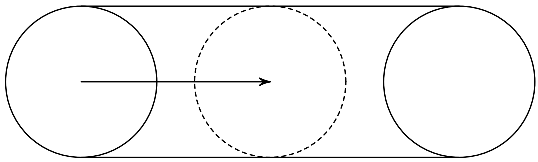
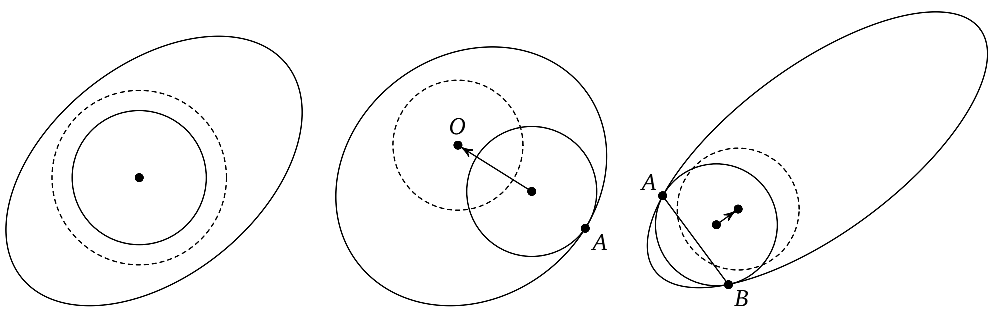


Рис. 12

Пусть есть две таких окружности. Проведём отрезки их общих внешних касательных, заключённые между точками касания (см. рис. 12). Фигура, полученная объединением окружностей и этих отрезков, лежит целиком внутри F в силу выпуклости. Поэтому если параллельно сдвинуть одну окружность в направлении другой, то образ также будет лежать внутри F. Итого получаем, что вписанных окружностей бесконечно много, причём все они касаются параллельных прямолинейных кусков границы F.

2. *Среди точек касания вписанной окружности с границей фигуры есть либо две диаметрально противоположных точки, либо три точки, которые являются вершинами остроугольного треугольника.*

Если у окружности нет общих точек с границей, то, немного увеличив её радиус (не меняя центра), получим окружность большего радиуса, также лежащую внутри нашей фигуры (см. рис. 13 а). Если у окружности одна общая точка A с границей, то сдвинем окружность параллельно прямой OA (где O — центр окружности) так, чтобы у новой окружности общих точек с границей не было (см. рис. 13 б). Полученную окружность также можно увеличить. Пусть окружность имеет две или больше общих точек с границей, причём существует дуга AB, большая 180° и не содержащая других граничных точек. Тогда сдвинем нашу окружность в сторону дуги по перпендикуляру к хорде AB, после чего её опять можно увеличить (см. рис. 13 в).



а) б) в)

Рис. 13

3. *Рассмотрим граничную точку, в которой вписанная окружность касается фигуры F. Тогда в этой точке касательная к окружности является опорной прямой для F.*

Рассмотрим опорную прямую в точке касания. Она является опорной и для окружности, однако единственная опорная прямая к окружности — это касательная.

Доказательство теоремы Кадеца. Обозначим через r радиус окружности, вписанной в фигуру F, через O — центр этой окружности. Для всех i обозначим через r_i радиус окружности, вписанной в фигуру F_i, а через O_i — её центр (если F_i — это полоска, то выберем любую из вписанных окружностей). Предположим, что условие теоремы неверно и $\sum_{i=1}^{n} r_i < r$. Вписанный в F круг также покрыт фигурами $F_1, \ldots, F_n$, поэтому можно считать, что F — это круг. Также можно считать, что каждая фигура F_i — это треугольник или полоска. Действительно, по свойству 2 существуют либо две диаметрально противоположные точки касания вписанной окружности с границей F_i, либо три точки касания, образующие остроугольный треугольник. Проведём касательные в этих точках, они образуют полоску или треугольник. При этом образовавшаяся фигура содержит F_i и имеет такой же радиус вписанной окружности.

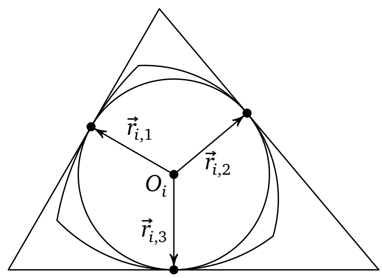


Рис. 14

Пусть $\vec{r}_{i,1}, \vec{r}_{i,2}, \vec{r}_{i,3}$ — векторы, проведённые из точки O_i в точки касания окружности с границей (см. рис. 14). Если точек касания не три, а две, то векторов также будет два.

Рассмотрим случай, когда каждая фигура F_i является треугольником (случай, когда в покрытии присутствуют полоски, доказывается аналогично). Рассмотрим 3^n точек вида

$$O + \lambda \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i,\varepsilon_i},$$

где $\varepsilon_i \in \{1, 2, 3\}$, а $\lambda > 1$ таково, что $\lambda \sum_{i=1}^{n} r_i < r$. В силу выбора λ все полученные точки будут лежать внутри F.

Как и во втором доказательстве леммы Банга, рассмотрим функционал

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \lambda \sum_{i,j=1}^{n} (\vec{r}_{i,\varepsilon_i}, \vec{r}_{j,\varepsilon_j}) - 2 \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OO_i}, \vec{r}_{i,\varepsilon_i}),$$

где $\varepsilon_i \in \{1, 2, 3\}$ для всех i. Пусть функционал достигает максимума на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Докажем, что точка X_1, определяемая равенством

$$\overrightarrow{OX_1} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i,\alpha_i},$$

не покрыта фигурами $F_1, \ldots, F_n$.

Предположим противное: пусть точка X_1 покрыта каким-нибудь треугольником (без ограничения общности, треугольником F_1). Для определённости будем считать, что $\alpha_1 = 1$. Изменим в разложении вектора $\overrightarrow{OX_1}$ первое слагаемое, а именно, рассмотрим точки X, X_2, X_3, определённые равенствами:

$$\overrightarrow{OX} = \lambda \sum_{i=2}^{n} \vec{r}_{i,\alpha_i}, \quad \overrightarrow{OX_2} = \lambda \vec{r}_{1,2} + \lambda \sum_{i=2}^{n} \vec{r}_{i,\alpha_i}, \quad \overrightarrow{OX_3} = \lambda \vec{r}_{1,3} + \lambda \sum_{i=2}^{n} \vec{r}_{i,\alpha_i}.$$

Выделим в $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ слагаемые, не зависящие от $\vec{r}_{1,\varepsilon_1}$:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \lambda \sum_{i,j=2}^{n} (\vec{r}_{i,\varepsilon_i}, \vec{r}_{j,\varepsilon_j}) + 2\lambda \sum_{i=2}^{n} (\vec{r}_{1,\varepsilon_1}, \vec{r}_{i,\varepsilon_i}) + \\ + \lambda |\vec{r}_{1,\varepsilon_1}|^2 - 2 \sum_{i=2}^{n} (\overrightarrow{OO_i}, \vec{r}_{i,\varepsilon_i}) - 2(\overrightarrow{OO_1}, \vec{r}_{1,\varepsilon_1}). \end{aligned}$$

Запишем разность значений функционала для точек X_1 и X_2:

$$\begin{aligned} & f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - f(2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \\ & = 2\lambda \left(\sum_{i=2}^{n} (\vec{r}_{1,1}, \vec{r}_{i,\alpha_i}) - \sum_{i=2}^{n} (\vec{r}_{1,2}, \vec{r}_{i,\alpha_i}) \right) - 2\big((\overrightarrow{OO_1}, \vec{r}_{1,1}) - (\overrightarrow{OO_1}, \vec{r}_{1,2}) \big) = \\ & = 2\lambda \left(\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1,2}, \sum_{i=2}^{n} \vec{r}_{i,\alpha_i} \right) - 2(\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1,2}, \overrightarrow{OO_1}) = \\ & = 2 \left(\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1,2},\ \lambda \sum_{i=2}^{n} \vec{r}_{i,\alpha_i} - \overrightarrow{OO_1} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник F_1, в котором лежит точка X_1, обозначим его вершины через A, B, C (см. рис. 15). Пусть точки касания его вписанной окружности с центром O_1 со сторонами AB, AC и BC — это точки C_1, B_1 и A_1 соответственно, причём векторы $\overrightarrow{O_1A_1}$, $\overrightarrow{O_1B_1}$ и $\overrightarrow{O_1C_1}$ сонаправлены векторам $\vec{r}_{1,1}$, $\vec{r}_{1,2}$ и $\vec{r}_{1,3}$ соответственно.

Тогда

$$2 \left(\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1,2},\ \lambda \sum_{i=2}^{n} \vec{r}_{i,\alpha_i} - \overrightarrow{OO_1} \right) = 2(\overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{O_1X}).$$

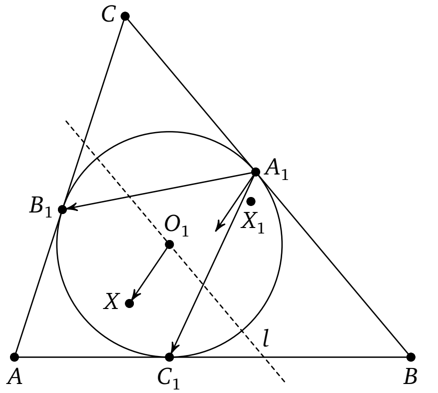


Рис. 15

Аналогично получается равенство

$$f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - f(3, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 2(\overrightarrow{C_1A_1}, \overrightarrow{O_1X}).$$

Поскольку значение функционала наибольшее в точке X_1, обе разности неотрицательны, т. е. углы между вектором $\overrightarrow{O_1X}$ и векторами $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ неострые. Проведём через точку O_1 прямую l параллельно стороне BC. Поскольку точка X_1 лежит внутри треугольника, точка X лежит в той же полуплоскости относительно прямой l, что и точка A. Таким образом, если отложить вектор $\overrightarrow{O_1X}$ от точки A_1, то он будет направлен в ту же полуплоскость относительно прямой BC, что и векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$. Однако векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ разбивают развёрнутый угол BA_1C на три острых угла (что несложно получить, выразив эти углы через углы треугольника), т. е. вектор $\overrightarrow{O_1X}$ образует хотя бы с одним из них острый угол. Противоречие. □

Приведённое доказательство теоремы Кадеца идейно полностью повторяет второе доказательство леммы Банга. Заметим, что первое доказательство леммы Банга с поднятием и рассмотрением наиболее удалённой точки также можно модифицировать для доказательства теоремы Кадеца.

В плоском случае теорема также доказана в работе [6]. Доказательство идейно похоже на доказательство теоремы Банга для круга. Оно опирается на следующее утверждение.

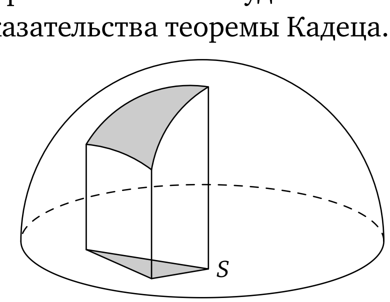


Рис. 16

Пусть B — круг на плоскости, S — пересекающая его полоска или треугольник. Обозначим через r радиус окружности, вписан-

ной в фигуру $B \cap S$. Рассмотрим такую полусферу, что B является её экваториальным сечением. Спроецируем фигуру $B \cap S$ на полусферу, проведя через каждую точку фигуры прямую, перпендикулярную плоскости круга, как показано на рис. 16. *Тогда площадь полученной проекции не превосходит $2\pi r$, причём равенство достигается, только если S — полоса, проходящая через B.*

§ 5. Гипотезы Банга и Дэвенпорта

В этом разделе речь пойдёт о гипотезе Банга.

Гипотеза Банга. *Пусть выпуклое тело F в $\mathbb{R}^d$ покрыто конечным числом полосок. Тогда сумма относительных ширин этих полосок не меньше* 1.

Докажем гипотезу Банга в плоском случае для двух полосок (для одной полоски утверждение очевидно). Пусть фигуру F покрывают две полоски. Если они параллельны, то утверждение очевидно. Иначе полоски в пересечении образуют параллелограмм, обозначим его $PQRT$. Вершины этого параллелограмма являются внешними или граничными точками F. Действительно, если P — внутренняя точка, угол при P, на рис. 17 отмеченный дугой, содержит точки фигуры, но не покрыт полосками.

Через вершины параллелограмма можно провести прямые, не пересекающие фигуру F. Действительно, если P — граничная точка F, то подойдёт опорная прямая. Если же P — внешняя точка для F, то рассмотрим ближайшую к P точку фигуры. Проведём через P прямую, параллельную опорной в этой точке. Эта прямая будет искомой.

Проведём в каждой вершине параллелограмма прямую, не пересекающую нашу фигуру. Эти прямые образуют четырёхугольник $ABCD$, который

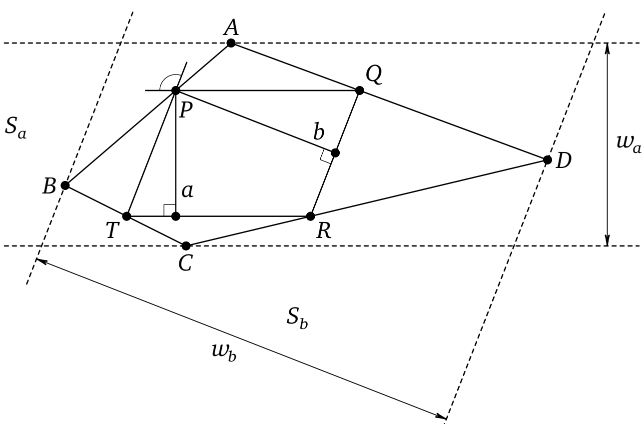


Рис. 17

целиком содержит F (см. рис. 17), т. е. его ширина по каждому направлению не меньше ширины F по этому направлению.

Пусть ширины полосок S_a и S_b равны a и b, ширина четырёхугольника в соответствующих направлениях равна ω_a и ω_b соответственно. Обозначим $\alpha = a/\omega_a$, $\beta = b/\omega_b$, площадь параллелограмма $PQRT$ обозначим через S. Рассмотрим два треугольника APQ и CTR, которые покрывает полоска S_b, но не покрывает полоска S_a. Расписав площади этих треугольников и параллелограмма через высоты и основания, получим, что отношение суммарной площади этих треугольников к площади параллелограмма равно

$$\frac{\omega_a - a}{2a} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}.$$

Аналогично отношение суммарной площади треугольников BPT и DQR к площади параллелограмма равно $\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2}$. Тогда отношение площади четырёхугольника $ABCD$ к площади параллелограмма $PQRT$ равно

$$\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta}.$$

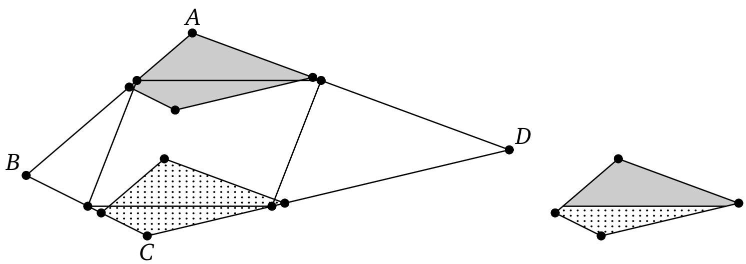


Рис. 18

Рассмотрим образы четырёхугольника $ABCD$ при гомотетиях относительно точек A и C с коэффициентом $1-\alpha$. Нетрудно понять, что части этих образов, лежащие внутри треугольников APQ и CRT, при совмещении дадут в точности четырёхугольник, гомотетичный $ABCD$ с коэффициентом $1-\alpha$ (см. рис. 18). Отсюда следует, что суммарная площадь этих треугольников не меньше площади $ABCD$, умноженной на $(1-\alpha)^2$. Получаем неравенство

$$\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \geqslant (1-\alpha)^2\left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-\alpha}{\alpha} \geqslant (1-\alpha)^2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} \geqslant (1-\alpha)\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta \geqslant 1,$$

тем самым гипотеза Банга для двух полосок доказана.

В общем случае гипотеза Банга не доказана. Известно, что она равносильна следующей гипотезе, возникшей из задач диофантовых приближений (см. [8]).

Гипотеза Дэвенпорта. *Выпуклое тело F разрезано n гиперплоскостями на части. Тело F' получено из тела F гомотетией с коэффициентом* $1/(n+1)$. *Тогда существует такой параллельный перенос тела F', что он содержится в теле F и не пересекает ни одной из этих гиперплоскостей.*

Докажем, что для единичного круга B гипотезы Банга и Дэвенпорта равносильны (доказательство общего утверждения о равносильности использует ту же идею, см. [3]). Для единичного круга гипотеза Банга равносильна теореме Банга, поскольку ширина круга в каждом направлении одинакова.

Пусть верна гипотеза Банга. Рассмотрим концентрический с B круг B' радиуса $n/(n+1)$. Для каждой прямой l, разрезающей B, рассмотрим такую полоску ширины $2/(n+1)$, что ограничивающие её прямые симметричны относительно l (см. рис. 19). Заметим, что если найдётся точка в B', не попавшая внутрь ни одной из построенных полосок, то круг радиуса $1/(n+1)$ с центром в этой точке будет лежать внутри исходного круга B и не будет пересекать секущие прямые (но, возможно, будет касаться). Суммарная ширина полосок равна $2n/(n+1)$, т. е. диаметру B'. Поэтому если полоски не параллельны друг другу, то по теореме Банга найдётся непокрытая точка. Если же полоски параллельны друг другу, то гипотеза Дэвенпорта, очевидно, верна: если единичную окружность пересечь n параллельными прямыми, то ширина хотя бы одной части будет не меньше $2/(n+1)$, т. е. в неё можно будет вписать круг радиуса $1/(n+1)$.

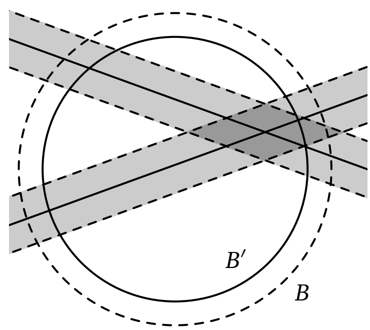


Рис. 19

Обратно, пусть верна гипотеза Дэвенпорта. Предположим, что гипотеза Банга неверна, т. е. нам удалось покрыть единичный круг полосками, сумма относительных ширин которых меньше 1 (соответственно, сумма абсолютных ширин меньше 2). Увеличим ширину каждой полоски так, чтобы она стала рациональной, но при этом сумма ширин по-прежнему была бы меньше 2 и выражалась несократимой дробью, числитель которой хотя бы на 2 больше знаменателя. Пусть ширины полосок равны $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$. Теперь разобьём каждую полоску на меньшие полоски ширины $1/N$ каждая, где $N = q_1 q_2 \ldots q_n$. Сложим дроби (получим суммарную ширину получившихся полосок) и приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\ldots+\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1q_2\ldots q_n+q_1p_2q_3\ldots q_n+\ldots+q_1\ldots q_{n-1}p_n}{q_1q_2\ldots q_n}=\frac{k}{N}.$$

Числитель этой дроби равен количеству полосок нового разбиения. Выбор ширин гарантирует нам, что $k<N-1$. Рассмотрим ось симметрии каждой из полосок, для этих прямых применим гипотезу Дэвенпорта. Получим, что существует круг радиуса $1/(k+1)$, целиком лежащий внутри B и не пересекающий ни одну из прямых. Поскольку $k+1<N$, центр круга удалён от каждой прямой на расстояние, большее чем $1/N$. Получаем, что он не покрыт полосками, противоречие.

§ 6. Гипотеза Макаи — Паха

Перейдём к задаче о покрытии тел параллельными переносами полосок. Дано выпуклое тело и некоторый набор полосок. Требуется выяснить, при каком условии на ширины полосок можно гарантированно покрыть тело параллельными переносами этих полосок. Принципиальное отличие этой задачи от задачи, изученной Т. Бангом, в том, что вращать полоски запрещено. Задача впервые обсуждалась в работе [11]. Мы ограничимся рассмотрением случаев размерности $d=2$ и $d=3$.

Вначале докажем, что для некоторой константы c единичный круг можно покрыть параллельными переносами любой системы полосок на плоскости суммарной ширины не меньше c. Эта задача была предложена М. Смуровым в 1997 году на Московской математической олимпиаде в качестве последней задачи в варианте 11 класса. По мотивам этой задачи в журнале «Квант» была опубликована статья [1]. Формулировка задачи:

На плоскости дано конечное число полос, сумма ширин которых равна 100, *и круг радиуса* 1. *Докажите, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали круг.*

Разберём решение этой задачи, предложенное в статье [15]. Рассмотрим выпуклую фигуру F, граница которой состоит из кривой AB и отрезков AO и BO. Существуют два вида полосок: имеющие ограниченное и неограниченное пересечение с углом AOB (см. рис. 20).

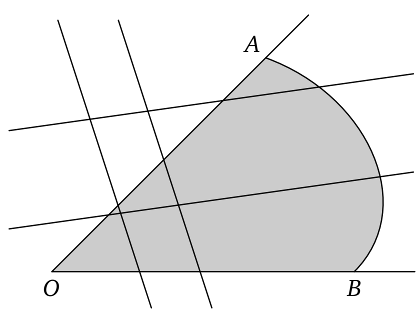


Рис. 20

Пусть есть полоски, имеющие неограниченное пересечение с углом AOB, причём прямые, ограничивающие каждую полоску, не параллельны OA и OB. Покажем индукцией по числу полосок, что если сумма их ширин не меньше длины кривой AB, то F можно покрыть сдвигами этих полосок. Для одной полоски утверждение очевидно. Если есть несколько параллельных друг другу полосок, объединим их в одну полоску, ширина которой равна суммарной ширине этих полосок. Упорядочим направления полосок против часовой стрелки и возьмём крайнее из направлений. Перенесём соответствующую полоску так, чтобы одна из ограничивающих её прямых касалась нашей фигуры и при этом полоска имела общие точки с фигурой (возможны два случая взаимного расположения фигуры F и полоски, см. рис. 21).

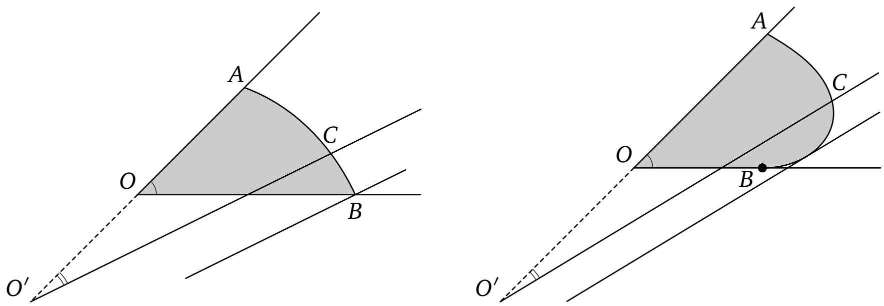


Рис. 21

Пусть вторая ограничивающая полоску прямая пересекается с кривой AB в точке C, а с прямой OA — в точке O'. От кривой AB будет отрезана кривая CB, длина которой не меньше, чем ширина полоски. Оставшимися полосками покроем фигуру, ограниченную отрезками $O'A$, $O'C$ и кривой AC (это можно сделать по предположению индукции).

Применим доказанное утверждение к фигуре, изображённой на рис. 22. В качестве кривой возьмём верхнюю полуокружность и два вертикальных отрезка AC и BD, в качестве угла возьмём развёрнутый угол AOB (прямая AB выбрана таким образом, что она не параллельна ни одной из полосок). Получаем, что если сумма ширин полосок хотя бы $\pi + 2$, то круг можно покрыть параллельными переносами полосок.

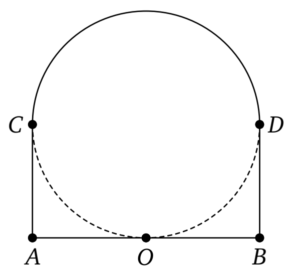


Рис. 22

Можно ли ещё уменьшить суммарную ширину полосок, чтобы утверждение задачи осталось верным? Ответ на этот вопрос неизвестен. Пользуясь леммой Банга, несложно построить пример полосок, суммарная ширина которых сколь угодно близка к π, но покрыть единичный круг их параллельными переносами нельзя.

Рассмотрим вписанный в единичный круг правильный $2n$-угольник. Пусть O — центр круга, a — длина стороны $2n$-угольника. Каждой паре параллельных сторон $2n$-угольника сопоставим перпендикулярную этим сторонам полоску, ширина которой равна a/λ для некоторого $\lambda > 1$ (пример такой полоски — на рис. 23). Обозначим через $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ векторы, каждый из которых параллелен соответствующей стороне $2n$-угольника (из двух возможных направлений выбирается произвольное) и по длине равен $a/2$. Тогда векторы $\vec{v}_1/\lambda, \ldots, \vec{v}_n/\lambda$ перпендикулярны прямым, ограничивающим соответствующие полоски, и по длине равны половинам ширин соответствующих полосок. По лемме Банга множество точек

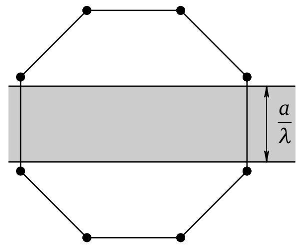


Рис. 23

$$O + \lambda \cdot \left(\pm \frac{\vec{v}_1}{\lambda} \pm \frac{\vec{v}_2}{\lambda} \pm \ldots \pm \frac{\vec{v}_n}{\lambda} \right) = O \pm \vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \ldots \pm \vec{v}_n$$

не покрыто полосками. Докажем, что все 2^n точек лежат внутри исходного $2n$-угольника.

Рассмотрим одну из двух сторон, соответствующих вектору $\vec{v}_1$. Обозначим её через A_1A_2, а параллельную ей сторону $2n$-угольника — через $A_{n+1}A_{n+2}$ (см. рис. 24). Докажем, что каждая из 2^n точек либо находится в той же полуплоскости относительно прямой A_1A_2, что и точка O, либо лежит на прямой A_1A_2. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OX}$, где X — середина A_1A_2. Возьмём такие $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \{-1, 1\}$, что угол между каждым из векторов $\alpha_2\vec{v}_2, \alpha_3\vec{v}_3, \ldots, \alpha_n\vec{v}_n$ и вектором $\overrightarrow{OX}$ острый. Тогда

$$\alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_{n+2}A_1} = \overrightarrow{OX},$$

поэтому пара точек

$$O \pm \vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$$

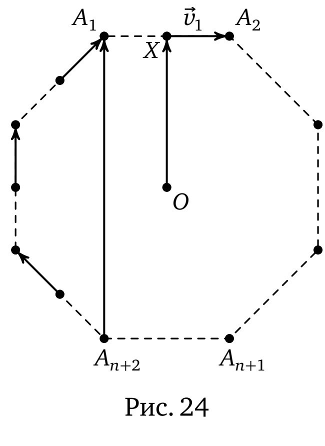


Рис. 24

совпадает с парой точек A_1, A_2. Очевидно, что, если изменить знаки перед какими-нибудь из векторов $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ на противоположные, полученные точки будут лежать в той же полуплоскости относительно A_1A_2, что и точка O.

Проведя аналогичное рассуждение для любой стороны $2n$-угольника, получим, что все 2^n точек лежат внутри или на границе многоугольника, а следовательно, и внутри круга. Таким образом, круг не покрыт полосками целиком. Поскольку при стремлении n к бесконечности периметр правильного $2n$-угольника стремится к 2π, сумма ширин полосок может быть сколь угодно близка к π за счёт выбора n и λ, откуда следует требуемое.

В случае произвольной выпуклой фигуры в работе [12] получены следующие оценки на суммарную ширину полосок, при которых выпуклую фигуру гарантированно можно покрыть параллельными переносами этих полосок. Пусть p и ω — периметр и ширина выпуклой фигуры F соответственно, D — её диаметр (т. е. наибольшее из расстояний между точками фигуры). Пусть также на плоскости расположены n полосок с ширинами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Тогда если выполнено хотя бы одно из условий

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n \geqslant \frac{3}{\pi} p,$$
$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n \geqslant 2\sqrt{2} D,$$
$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n \geqslant D + 2\omega,$$

то фигуру F можно покрыть параллельными переносами полосок.

Для случая пространства неизвестно, всегда ли можно покрыть единичный шар параллельными переносами слоёв, если суммарная ширина слоёв бесконечна. Наилучший результат для трёхмерного случая можно найти в работе [14]. Здесь мы приведём лишь наглядный частный случай этого результата, тем не менее сохранив основную идею доказательства.

Теорема. *Если в пространстве расположены слои $S_1, S_2, \ldots$, причём ширина S_i равна $\omega_i = 1/i$ для всех i, то их параллельными переносами можно покрыть всё пространство.*

Доказательство. Докажем, что для любого k существует такое N_k, что параллельными переносами слоёв $S_k, S_{k+1}, \ldots, S_{N_k}$ можно покрыть шар F_0 некоторого фиксированного радиуса $\varepsilon > 0$ (мы проведём доказательство для $\varepsilon = 1/32$). Из этого будет следовать утверждение теоремы. Действительно, разобьём все слои на множества

$$\widetilde{S}_j = \{S_{i_j+1}, S_{i_j+2}, \ldots, S_{i_{j+1}}\}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

каждым из которых можно покрыть шар радиуса ε. Поскольку шарами радиуса ε можно покрыть всё пространство, то и параллельными переносами слоёв можно покрыть всё пространство.

Каждому слою S_i сопоставим слой S_i' с той же срединной плоскостью, но вдвое меньшей ширины. Обозначим некоторый шар радиуса $\frac{1}{32}$ через F_0. Опишем «жадный» алгоритм, следуя которому можно покрыть бóльшую часть объёма F_0 с помощью параллельного переноса слоёв $S_k', S_{k+1}', \ldots$

Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ обозначим через F_i часть шара, оставшуюся не покрытой параллельными переносами слоёв $S_k', S_{k+1}', \ldots, S_{k+i-1}'$. Пока-

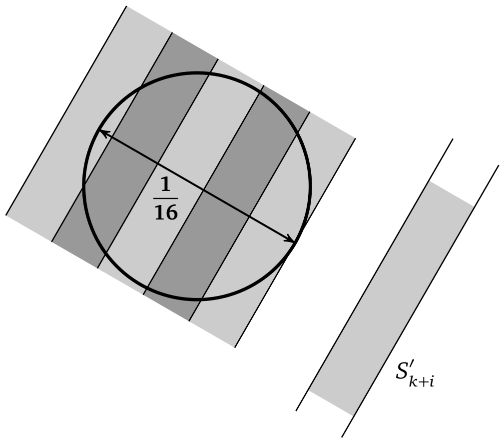


Рис. 25

жем, как по F_i строить F_{i+1}. Заметим, что F_i можно покрыть с помощью

$$\left\lceil \frac{1/16}{\omega_{k+i}/2} \right\rceil = \left\lceil \frac{k+i}{8} \right\rceil$$

слоёв, каждый из которых является параллельным переносом слоя S'_{k+i} (см. рис. 25). Хотя бы один из этих слоёв покрывает

$$\frac{1}{\lceil (k+i)/8 \rceil} > \frac{8}{k+i+8}$$

от объёма F_i. В этот слой и перенесём S'_{k+i}, получив F_{i+1}. Тогда для всех i будет выполнено неравенство

$$\mathrm{Vol}(F_i) < \mathrm{Vol}(F_{i-1}) \cdot \left(1 - \frac{8}{k+i+8}\right).$$

Оценим объём F_i:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(F_i) &< \mathrm{Vol}(F_{i-1}) \cdot \left(1 - \frac{8}{k+i+8}\right) < \\ &< \mathrm{Vol}(F_{i-2}) \cdot \left(1 - \frac{8}{k+i+8}\right) \cdot \left(1 - \frac{8}{k+(i-1)+8}\right) < \ldots < \\ &< \mathrm{Vol}(F_0) \cdot \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{8}{k+j+8}\right) = \mathrm{Vol}(F_0) \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{i} \ln\left(1 - \frac{8}{k+j+8}\right)\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\ln(1-x) < -x$ при $x \in (0; 1)$, имеем

$$\mathrm{Vol}(F_0) \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{i} \ln\left(1 - \frac{8}{k+j+8}\right)\right) < \mathrm{Vol}(F_0) \cdot \exp\left(-8 \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{k+j+8}\right).$$

Как известно, предел $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}-\ln n\right)$ конечен: он носит название постоянной Эйлера — Маскерони и равен 0,57... Следовательно, существует такое i, начиная с которого выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{k+j+8}>\frac{1}{2}\ln i.$$

Таким образом, для этого i

$$\operatorname{Vol}(F_i)<\operatorname{Vol}(F_0)\cdot e^{-4\ln i}=\frac{\pi}{3\cdot 2^{13}}\cdot\frac{1}{i^4}.$$

При достаточно большом i объём $\operatorname{Vol}(F_i)$ будет меньше объёма шара с радиусом $\frac{1}{2(k+i)}$, поэтому в F_i нельзя будет поместить шар такого радиуса. Значит, каждая точка в F_i удалена от какого-то из слоёв $S_1',\ldots,S_i'$ на расстояние, меньшее $\frac{1}{2(k+i)}$. Поэтому если рассмотреть вместо слоёв $S_1',\ldots,S_i'$ слои $S_1,\ldots,S_i$, получим, что они целиком покрывают F_0. Тогда в качестве N_k можно взять это значение i. Теорема доказана. □

Отметим, что использованный при доказательстве теоремы подход, а именно сжатие тела в некоторое число раз и последующее применение жадного или подобного алгоритма, неоднократно встречается в задачах об упаковках и покрытиях. По всей вероятности, впервые эта идея была предложена в работе [9].

Список литературы

[1] *Смуров М., Спивак А.* Покрытие полосками // Квант. 1998. № 4. С. 17–22.

[2] *Яглом И. М.* Т. Банг — В. Фенхель. Решение одной задачи о покрытии выпуклых фигур // Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 1. М.: Гостехиздат, 1957. С. 214–218.

[3] *Alexander R.* A problem about lines and ovals // Amer. Math. Monthly. 1968. Vol. 75, №. 5. P. 482–487.

[4] *Ball K.* The plank problem for symmetric bodies // Invent. Math. 1991. Vol. 104, № 3. P. 535–543.

[5] *Bang T.* A solution of the “plank problem” // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 2, № 6. P. 990–993.

[6] *Bezdek A.* On a generalization of Tarski’s plank problem // Discrete Comput. Geom. 2007. Vol. 38, № 2. P. 189–200.

[7] *Bognár M.* On W. Fenchel’s solution of the plank problem // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1961. Vol. 12, № 3–4. P. 269–270.

[8] *Davenport H.* A note on Diophantine approximation // Studies in mathematical analysis and related topics. Stanford, Calif: Stanford Univ. Press, 1962. P. 77–81.

[9] *Erdös P., Rogers C. A.* Covering space with convex bodies // Acta Arithm. 1962. Vol. 7. P. 281–285.

[10] *Green J. W.* On the determination of a function in the plain by its integrals over straight lines // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 9. P. 758–762.

[11] *Groemer H.* On coverings of plane convex sets by translates of strips // Aequationes Math. 1981. Vol. 22, № 2–3. P. 215–222.

[12] *Groemer H.* Some remarks on translative coverings of convex domains by strips // Canad. Math. Bull. Vol. 27, №. 2. 1984. P. 233–237.

[13] *Kadets V.* Coverings by convex bodies and inscribed balls // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 133, № 5. P. 1491–1495.

[14] *Kupavskii A., Pach J.* From Tarski's plank problem to simultaneous approximation // Amer. Math. Monthly. 2017. Vol. 124, № 6. P. 494–505.

[15] *Makai E., Pach J.* Controlling function classes and covering Euclidean space // Stud. Scient. Math. Hungarica. 1983. Vol. 18, № 2–4. P. 435–459.

[16] *Moese H.* Przyczynek do problemu A. Tarskiego: «O stopniu równoważności wielokątów» (English: A contribution to the problem of A. Tarski "On the degree of equivalence of polygons") // Parametr. 1931–1932. Vol. 2. P. 305–309.

[17] *Tarski A.* O stopniu równoważności wielokątów (English: On the degree of equivalence of polygons) // Mlody Matematyk. 1931. Vol. 1. P. 37–44.

[18] *Tarski A.* Uwagi o stopniu równoważności wielokątów (English: Remarks on the degree of equivalence of polygons) // Parametr. 1932. Vol. 2. P. 310–314.

Алексей Вадимович Доледенок, Центр педагогического мастерства (г. Москва)

doledenok@gmail.com

Анна Николаевна Доледенок, МГУ имени М. В. Ломоносова

anya11235@mail.ru