Популяризация математики

О Санкт-Петербургской заочной олимпиаде по топологии

Н. С. Калинин

§ 1. Об организации олимпиады

Санкт-Петербургская заочная олимпиада по топологии проходила в 2017 и 2018 годах в октябре. Причина, по которой я стал её организовывать, проста: будучи студентом, я хотел поучаствовать в заочной олимпиаде по топологии, а её не было. Задачи олимпиады (приведённые ниже) я подбирал из эстетических и педагогических соображений: короткие формулировки, отсутствие формул, возможность «крутить» в голове картинки, необычный взгляд на стандартные объекты, возможность выучить что-то новое, — ведь олимпиада проходит целый месяц, можно пару книжек изучить.

Думаю, что задачи олимпиады были доставлены всем желающим. Мой пост «В контакте» в 2017 году посмотрели 13 000 человек, паблик «В контакте» sci-hub (Александра Элбакян любезно согласилась порекламировать) — 16 000; в фейсбуке, наверное, порядок величины такой же (по крайней мере пятьдесят человек поделились записью), 8 тыс. просмотров на quora получил пост незнакомого мне человека. Энтузиасты быстро перевели условия на португальский, английский, испанский, итальянский, французский, турецкий, потом и фарси добавился. Так что тысяч сто человек увидели условия, тысяча открыла файл, сто прочитали, сорок порешали, двадцать написали решения. Хотя и профессора решали задачи с большим удовольствием — говорили, что задачи красивые. В 2018 году просмотров в социальных сетях было больше, переводов меньше.

В 2017 году на русском я получил двенадцать работ, некоторые от команд из трёх человек, одну работу на испанском. В английской версии в правилах было написано, что работы будут проверены только при наличии свободного времени у организаторов. В 2018 году я получил решения от шести команд (все на русском).

Почти все участники — из Санкт-Петербурга, Москвы и Новосибирска. Разумно было предположить, что они узнали об олимпиаде от преподавателей (в 2017 я написал письма, кажется, во все университеты, где люди понимают русский, послал олимпиаду на пару сотен адресов, человек двадцать печатали и вешали олимпиаду на стенке). Но три четверти приславших решения узнали про олимпиаду из «В контакте» или фейсбука.

Так я себе представляю популяризацию науки, топологии в частности. Через вовлечение в решение задач. Будет замечательно, если такие олимпиады будут проведены по теории чисел, комбинаторике и так далее. Например, каждый год — такая заочная олимпиада по какой-то области математики, лучше в октябре, когда студенты уже вошли в ритм учебной жизни, но ещё ею не перегружены и до экзаменов-зачётов далеко. Возможные критерии трудности задач — одна-две задачи, которые может решить средний третьекурсник, и другие задачи, которые должны быть в первую очередь интересны и раскрывать темы, слабо отражённые в программе. Олимпиада не должна ничего проверять, должна стимулировать к изучению нового (как и все заочные олимпиады). Очень полезно давать на олимпиаду нерешённые задачи (и об этом предупреждать). Известные задачи тоже можно давать, потому что соревновательный элемент сведён практически к нулю, и победа в олимпиаде не должна давать никакого бюрократического или репутационного преимущества.

Организовывать олимпиаду мне интересно (не обязательно по топологии, можно по теории чисел или комплексному анализу), но основная проблема в задачах: неясно, где их брать.

§ 2. Правила

1. Олимпиада проходит с 1 октября по 31 октября включительно. Допускаются команды из 1–3 человек. Разрешается пользоваться любыми материалами. Запрещается просить помощи у кого-то, кроме участников своей команды. Призов не будет. Не у всех задач известны решения. Условия задач (актуальная версия, со всеми уточнениями по условиям, если они появятся) и полная версия правил были доступны по ссылке `http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad/`

2. Работы принимаются до 23:59 31 октября (по московскому времени).

3. Принимаются работы только в формате pdf: или набранные и скомпилированные в TEX, или написанные **понятным** почерком и отсканированные в **хорошем** качестве.

4. Участвовать в олимпиаде могут все. Отдельный зачёт проводится среди студентов 1–4 курсов. В работе указывайте, как вас зовут и где вы учитесь или работаете. Посылая работу, вы тем самым даёте согласие на обработку этих персональных данных (потом на сайте появится сводная таблица с результатами). Если это чем-то не устраивает, отдельно напишите — анонимные работы тоже допускаются, хотя и не приветствуются.

5. Если вы решили хотя бы одну задачу, заполните, пожалуйста, листок анонимного опроса
`https://docs.google.com/forms/d/1FUH6-JbcjSIIVMKMwxQzUpIW25pfNSPHEYjc2-WnIrE/`

Присылайте ваши любимые задачи по топологии для последующих олимпиад.

6. Результаты появятся на `http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad.html`

7. Приветствуется распространение задач олимпиады. Переводы задач на другие языки будут расположены по адресу
`http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiade.html`

§ 3. Условия задач 2017 года

1. Найдите два таких негомеоморфных компактных подмножества X_1, X_2 плоскости, что $X_1 \times I$ гомеоморфно $X_2 \times I$, где $I = [0, 1]$ — замкнутый отрезок прямой.

2. Четырёхточечное множество наделили минимальной (по количеству открытых подмножеств) топологией, в которой две точки открыты (каждая из них является открытым множеством), а остальные две — замкнуты. Вычислите фундаментальную группу этого пространства и постройте его универсальное накрытие.

3. а) В пространстве всех треугольников на плоскости является ли деформационным ретрактом подпространство всех прямоугольных треугольников?

б) Построить деформационную ретракцию пространства всех треугольников плоскости на подпространство правильных треугольников.

4. Пусть X — связное многообразие и $f: X \to S^2$ — такое непрерывное отображение, что $f^{-1}(x)$ гомеоморфно S^1 для всех точек x сферы S^2. Чему может равняться $H_1(X, \mathbb{Z}), H_2(X, \mathbb{Z})$?

5. Рассмотрим $S^4 = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid |x| = 1\}$. Можно ли в каждой точке $x \in S^4$ так выбрать двумерную аффинную плоскость P_x, касающуюся S^4 в x, что P_x непрерывно зависит от x?

6. Может ли хаусдорфово пространство со счётным количеством точек быть связным?

7. Существует ли сюръективное непрерывное отображение $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, не являющееся гомеоморфизмом, но такое, что у каждой точки $x\in\mathbb{R}^2$ существует такая окрестность U, что $f: U\to f(U)$ — гомеоморфизм?

8. а) Рассмотрим квадрат $[0,n]^2$ на плоскости, n — натуральное. Удалим из квадрата все точки, у которых обе координаты нецелые. Остался одномерный клеточный комплекс, назовём его X. Найдите максимальное такое $k=k(n)$, что для любого непрерывного отображения X в $\mathbb{R}^1$ найдётся точка с хотя бы k прообразами.

б) То же самое для отображений в $\mathbb{R}^2$ двумерного комплекса, полученного из $[0,n]^3\subset\mathbb{R}^3$ выбрасыванием всех точек, у которых все координаты нецелые.

9. Существует ли такая иммерсия сферы $f: S^2\to\mathbb{R}^3$, что не существует иммерсии $g: D^3\to\mathbb{R}^3$ трёхмерного диска, для которой $g|_{\partial D^3}=f$?

§ 4. Условия задач 2018 года

1. а) Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ — инъективное непрерывное отображение, неограниченное на положительной и отрицательной полупрямых. Может ли его образ иметь связное дополнение?

б) Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ — инъективное непрерывное отображение, образ которого всюду плотен. Может ли дополнение его образа быть односвязным (иными словами, может ли быть так, что любое непрерывное отображение $S^1\to\mathbb{R}^3\setminus f(\mathbb{R})$ продолжается до непрерывного отображения из двумерного диска в $\mathbb{R}^3\setminus f(\mathbb{R})$)?

2. а) Обозначим единичный открытый интервал $(0,1)\subset\mathbb{R}$ через I. Пусть $f: I^2\to\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ — диффеоморфизм. Докажите, что существует такая точка $x\in I$, что кривая $f(x\times I)$ имеет длину хотя бы 2. (Иными словами: диск гладко расслоён на кривые. Докажите, что какая-то из этих кривых не короче диаметра диска.)

б) Пусть $f: I^3\to\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2<1\}$ — диффеоморфизм. Получите как можно лучшую нижнюю оценку на супремум площадей множеств вида $f(x\times I^2)$, где $x\in I$.

3. Существует ли гладкое отображение $\mathbb{R}P^2\to M$, имеющее регулярное значение с нечётным числом прообразов, если а) $M=S^2$; б) $M=S^1\times S^1$?

в) Пусть M — связное замкнутое ориентированное 4-многообразие. Пусть $f:\mathbb{C}P^2\to M$ — непрерывное отображение ненулевой степени. Найдите все возможные значения второго числа Бетти многообразия M. Напомним, что *второе число Бетти*, $b_2(M)$, равно наибольшему такому r, что существует r замкнутых двумерных подмногообразий $X_1, \ldots, X_r$ многообразия M и ранг матрицы алгебраических пересечений $X_i \cdot X_j$ равен r.

4. Один и тот же граф G нарисован двумя способами G_1, G_2 на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ так, что каждый из рисунков G_i центрально-симметричен относительно центра сферы и никакое ребро рисунка не пересекает другое ребро во внутренней точке и не проходит через вершины графа. Верно ли, что графы, полученные факторизацией по центральной симметрии S^2 из графов G_1, G_2, изоморфны?

(Пусть у двух графов, вложенных в $\mathbb{R}P^2$, прообразы при двулистном отображении $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ изоморфны. Правда ли, что эти графы изоморфны?)

5. а) Докажите, что из любых 11 точек в трёхмерном пространстве можно выбрать три попарно непересекающиеся тройки так, чтобы три треугольника, образованные этими тройками, имели общую точку.

б) Верно ли аналогичное утверждение для 10 точек?

6. Пусть K — (двумерный) многоугольник на плоскости и a — вектор, причём образ $K + a$ многоугольника K при сдвиге на вектор a не пересекается с K, т. е. $K \cap (K + a) = \varnothing$. Докажите, что два воза, т. е. два круга диаметром $|a|$, не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K, не столкнувшись.

7. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — гладкая параметризованная кривая, у которой кривизна в точке $\gamma(t)$ монотонно убывает по t.

а) Покажите, что соприкасающиеся окружности в разных точках кривой не пересекаются.

б) Сейчас мы приведём цепочку рассуждений, приводящих к противоречию. Необходимо найти неверный шаг в этой цепочке.

> Заметим, что окрестность точки $\gamma(1/2)$ расслоена на соприкасающиеся окружности в точках кривой, близких к $\gamma(1/2)$. Тем самым кривая γ касается всех слоёв этого локального расслоения. Но это невозможно, так как локально это расслоение является произведением отрезков и если бы γ касалась всех слоёв, у неё бы везде была производная нуль, и значит, она бы локально совпадала с одним из слоёв, что неверно.

§ 5. Подсказки 2017 года

1. *Пример*: X_1 — кольцо ($\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$) с двумя волосками (отрезками) наружу с внешней окружности. Множество X_2 — такое же кольцо на плоскости с двумя волосками, расположенными по-другому: один волосок наружу с внешней окружности, второй вовнутрь с внутренней окружности.

2. Надо заметить, что это четырёхточечное множество по существу является окружностью (есть разбиение окружности на четыре клетки: две точки и два интервала). Фундаментальная группа, тем самым, есть $\mathbb{Z}$. Универсальным накрытием окружности является прямая, а у нас получится $\mathbb{Z}$ с топологией «цифровой прямой» (прямая Халимского).

3. а) *Ответ*: нет.

У прямоугольных треугольников есть выделенная вершина. Поэтому если есть такая ретракция, то у каждого треугольника можно каким-то образом однозначно выбрать вершину (которая пойдёт в прямой угол). Но рассмотрим правильный треугольник. В пространстве всех треугольников есть петля, которая представляет поворот на $2\pi/3$, и тогда правильный треугольник переходит в себя. Уже для этой петли нет ретракции.

б) Воспользуйтесь треугольником Наполеона.

4. Если f — расслоение, можно написать спектральную последовательность. Или можно считать, что S^2 склеено из двух дисков D_1, D_2 по их общей окружности $\partial D_1 = \partial D_2$. Значит, расслоения получаются как склейка $D_1 \times S^1$, $D_2 \times S^1$. С точностью до гомотопии важно, сколько раз «прокрутилась» вторая координата $x \times S^1$, пока точка x пробегала границу D_1. Получается отображение из S^1 в S^1, таких отображений с точностью до гомотопии $\pi_1(S^1)$, т. е $\mathbb{Z}$. Гомологии посчитать несложно при такой явной конструкции.

Но f необязательно расслоение! Бывают слоения Зейферта.

5. *Ответ*: нет.

Пусть такое подрасслоение есть. Тогда $H_2(S^4) = 0$ (класс Эйлера нулевой). Значит, и класс Эйлера суммы слоения и ему ортогонального равен нулю, а это не так: класс Эйлера касательного расслоения к S^4 равен 2.

6. *Ответ*: да, есть множество примеров. Ищите в интернете (на английском языке).

7. *Ответ*: да.

Плоскость $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна длинному прямоугольнику без границы и кругу без границы (радиуса чуть больше, чем меньшая сторона прямоугольника). Уложим прямоугольник следующим образом: когда он первый раз проходит по кругу, он накрывает всё, кроме маленькой окрестности центра (похоже на отображение $z \to e^z$ на комплексной плоскости), а при проходе второй раз мы уложим конец прямоугольника на центр круга.

8. а) Можно посмотреть на образы вершин. Если они все различны, то рассмотрим прообраз точки, у которой примерно поровну образов вершин справа и слева.

б) Я умею получать неоптимальную оценку (типа $n/10$).

9. *Ответ*: конечно.

Давайте сначала посмотрим на плоскость — вложим окружность восьмёркой. Понятно, что это невозможно продолжить иммерсией диска. Такую же «восьмёрку» сделаем в пространстве: рассмотрим стандартную сферу, вдавим верхнюю её часть, чтобы она оказалась ниже нижней. Нам надо всего лишь, чтобы образ вложения сферы делил пространство на части. Теперь посмотрим на возможную иммерсию D^3 без границы. Заметим, что это открытое связное множество. Значит, его граница не может быть трёхмерной «восьмёркой».

§ 6. Подсказки 2018 года

1. а) *Ответ*: можно.

Заметьте, что нет противоречия с леммой Жордана — нельзя по непрерывности добавить к нашей кривой точку «на бесконечности», замкнув кривую в окружность. В самом деле, параметризуем кривую временем t. Кривая может уходить далеко от начала координат, потом возвращаться всё ближе к началу координат (не заходя в него) и делать так бесконечное число раз при $t \gg 0$ и $t \ll 0$. Пусть можно разбить дополнение к кривой на два открытых множества. Посмотрим, в какую из частей попало начало координат, и придём к противоречию.

Линейной связности добиться невозможно (как заметили внимательные читатели), см. доказательство:
`http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad/topology2018error.pdf`

2. а) Посмотрите на кривую, проходящую через центр круга.

б) Ответ неизвестен (и участники олимпиады не предоставили никаких оценок).

3. а) *Ответ*: да.

б) *Ответ*: нет.

Опишем геометрическую идею. Возьмём меридиан m и параллель l в торе $S^1 \times S^1$. Заметим, что m и l пересекаются в одной точке, значит, их прообразы $m', l' \subset \mathbb{R}P^2$ тоже должны «пересекаться» в одной точке. А небольшой сдвиг m в $S^1 \times S^1$ не пересекается с m, то же и для l, значит, и их прообразы должны обладать таким же свойством. Легко видеть, что на $\mathbb{R}P^2$ нет кривых m', l' с заданными свойствами: если представить $\mathbb{R}P^2$ как ленту Мёбиуса, заклеенную диском, то каждая кривая в $\mathbb{R}P^2$ либо затягивается диском (и тогда может не пересекаться с некоторым своим сдвигом), либо не затягивается диском и тогда не отличается от центральной линии ленты Мёбиуса — но тогда любой её сдвиг пересекается с ней. Получается, что если l', m' пересекаются, то они должны быть по существу центральными линиями ленты Мёбиуса, но тогда они будут пересекаться и с любыми своими шевелениями. Эту геометрическую идею можно формализовать, но проще выучить, что такое гомологии и когомологии (грубо говоря, это некоторые группы, которые кодируют пересечения подмногообразий нашего многообразия, в нашем случае пересечения кривых в поверхностях).

в) На когомологическом языке наличие отображения ненулевой степени гарантирует наличие отображения $f^*\colon H^*(M,\mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{C}P^2,\mathbb{Z})$. При этом $f^*(a\cdot b) = f^*(a)\cdot f^*(b)$. Отсюда несложно вывести, что $b_2(M) \leqslant b_2(\mathbb{C}P^2) = 1$, а потом привести примеры.

4. Обозначим центральные симметрии сфер через σ_1, σ_2, они действуют на вершинах и рёбрах графа. Найдём такие две точки v, w, которые переходят одна в другую при обеих центральных симметриях, $\sigma_1(v) = \sigma_2(v) = w$. Сделать это можно так: соединим вершину v графа кратчайшим путём γ с $\sigma_1(v)$. Рассмотрим, как действует σ_2 на $\gamma \cup \sigma_1(\gamma)$. Посчитайте количество вершин графа внутри петли $\gamma \cap \sigma_1(\gamma)$, их должно быть столько же, сколько и снаружи. Из этого следует, что $\gamma \cap \sigma_1(\gamma)$ пересекается с $\sigma_2(\gamma \cap \sigma_1(\gamma))$, отсюда следует существование искомых v, w, отсюда вытекает решение задачи. Некоторые хлопоты доставляет следующий факт: граф без v и $\sigma_1(v)$ может распасться на несколько компонент связности, и с этим нужно разбираться отдельно.

5. См. статьи: K. S. Sarkaria, «A generalized van Kampen — Flores theorem»[1] и А. Ю. Воловиков, «К теореме Ван-Кампена — Флореса»[2]. Интересно было бы узнать элементарное доказательство.

6. Если два воза могут поменяться местами, то в какой-то момент вектор, соединяющий их центры, параллелен a и длиннее $|a|$, причём целиком лежит в K, а значит, перенос K на a пересекается с K.

7. а) Прямые вычисления.

б) Получаемое «расслоение» не является гладким, поэтому понятия производной и, соответственно, касания теряют смысл.

[1] PAMS, 1991, vol. 111, № 2, p. 559–565.
[2] «Математические заметки», 1996, том 59, выпуск 5, с. 663–670.

Никита Сергеевич Калинин, НИУ ВШЭ (СПб)
nikaanspb@gmail.com