# По мотивам задачника

## Протыкание семейства транслятов двумерного выпуклого тела

Р. Н. Карасёв

### § 1. Формулировка результата

Бранко Грюнбаум в 1960-х годах поставил такую задачу: доказать, что для семейства транслятов (результатов параллельного сдвига) выпуклого тела на плоскости, в котором любые два множества пересекаются, существует 3-*трансверсаль*, т. е. такие три точки, что каждое множество семейства содержит хотя бы одну из них. Напомним, что *выпуклое тело* — это выпуклый компакт с непустой внутренностью.

В «Математическом просвещении» (сер. 3, вып. 19, с. 258) опубликована следующая достаточно наглядная задача 10, включающая задачу Грюнбаума. *На столе лежат круглые салфетки, возможно, разного размера. Любые две пересекаются. Докажите, что их можно прибить* 100 *гвоздями. Можно ли уменьшить число* 100? *А если эти салфетки суть единичные круги*? *А если это выпуклые фигуры, отличающиеся параллельным переносом*?

Следующие теоремы отвечают на эти вопросы.

Теорема 1.1. *Для семейства $\mathscr{F}=\{K+x : x\in X\}$ транслятов выпуклого тела $K$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, в котором любые два транслята пересекаются, найдётся множество $P$ из не более чем трёх точек, пересекающее любой транслят.*

Теорема 1.2. *Для семейства $\mathscr{F}$ кругов в $\mathbb{R}^2$, в котором любые два круга пересекаются, найдётся множество $P$ из не более чем* 12 *точек, пересекающее любой круг семейства.*

Константу 12 в последнем утверждении можно уменьшить до 4 (результат Данцера [1]), но доказательство такого результата непростое.

Дальнейший текст является слегка исправленной версией статьи [2]. Аналогичные этой более общие задачи рассматривались в [3].

## § 2. Вспомогательные факты

Далее запись $A-B$, где $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, обозначает множество всех векторов вида $a-b,\ a\in A,\ b\in B$. Переформулируем утверждение теоремы 1.1:

Теорема 2.1. *Если $X-X\subseteq K-K$ для множества $X\in\mathbb{R}^2$ и выпуклого тела $K$, то $X$ можно покрыть тремя транслятами тела $K$.*

Лемма 2.2. *Теоремы* 1.1 *и* 2.1 *эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что теорема 1.1 следует из теоремы 2.1. Так как для любых точек $x_1, x_2\in X$ оказывается $(K+x_1)\cap(K+x_2)\neq\varnothing$, то для любых $x_1, x_2\in X$ найдётся такая точка $p$, что $p=x_1+y_1$ и $p=x_2+y_2$, где $y_1, y_2\in K$, откуда $x_1-x_2=y_2-y_1$, что и означает $X-X\subseteq K-K$.

По теореме 2.1 существуют такие точки $x_1$, $x_2$, $x_3$, что для любой точки $x\in X$ найдётся такое $y\in K$, что $x=x_i-y$ при некотором $i$. Это и требуется в теореме 1.1.

В обратную сторону утверждение доказывается теми же рассуждениями в обратном порядке. □

Для ограниченных множеств $X, K\subset\mathbb{R}^2$ отношение длин проекций $X$ и $K$ на некоторое направление $a$ в плоскости будем называть *шириной $X$ в данном направлении относительно $K$* и обозначать $w(X, K, a)$.

Выпуклую оболочку произвольного множества $A$ будем обозначать $\operatorname{conv}(A)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} w(X,K,a)&=2w(X,K-K,a),\\ w(X-X,K,a)&=2w(X,K,a),\\ w(X,K,a)&=w(X-X,K-K,a),\\ w(X,K,a)&=w(\operatorname{conv}(X),K,a). \end{aligned}$$

Следующая простая лемма проясняет геометрический смысл включения $X-X\subseteq K-K$.

Лемма 2.3. *Следующие утверждения равносильны*:
i) $X-X\subseteq K-K$; ii) $w(X,K,a)\leqslant 1$ *для любого* $a$.

Доказательство. (i) ⇒ (ii) Следует из равенства

$$w(X,K,a)=w(X-X,K-K,a).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Так как множества $X-X$ и $K-K$ центрально-симметричны с центром в 0 и $w(X-X, K-K, a) \leqslant 1$, то проекция $X-X$ на любое направление содержится в проекции выпуклого тела $K-K$. По «теореме Хана — Банаха на плоскости» (не лежащая в выпуклом теле точка отделяется от него прямой) отсюда следует, что $X-X \subseteq K-K$. □

Из леммы 2.3 следует, что множество $X$ в теореме 2.1 можно считать выпуклым, так как условие (ii) леммы не меняется при замене $X$ на $\operatorname{conv} X$.

Лемма 2.4. *Если $K$ — выпуклое тело в $\mathbb{R}^2$, а $X \subset \mathbb{R}^2$ и $w(X, K, a) \leqslant 1/2$ для любого направления $a$, то существует такое выпуклое тело $F$, что $X \subseteq F$ и $w(F, K, a) = 1/2$ для любого направления $a$.*

Набросок доказательства. Рассмотрим множество всех таких выпуклых тел $F$, что $F \supseteq X$ и $w(X, K, a) \leqslant 1$ для любого $a$. Оно непусто, так как содержит $\operatorname{conv}(X)$. Из леммы Цорна следует (подробности её применения оставляем читателю), что среди таких $F$ существует максимальное по включению.

Далее нужно доказать, что если в каком-то направлении ширина $F$ относительно $K$ осталась меньше единицы, то $F$ не было максимальным. Мы оставляем последнее утверждение читателю, *предупреждая*, что оно не очевидно и начиная с размерности 3 просто неверно. □

Таким образом, теперь теорема 2.1 с помощью леммы 2.4 может быть выведена из своего частного случая:

Теорема 2.5. *Если $X$, $K \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклые тела и $X-X=K-K$, то $X$ можно покрыть тремя транслятами $K$.*

Условие $X-X=K-K$ равносильно тому, что $X$ и $K$ имеют одинаковую ширину в любом направлении (см. лемму 2.3). Теперь сформулируем лемму, которая будет играть основную роль в доказательстве теоремы 2.5:

Лемма 2.6. *Пусть $\triangle A_1B_1C_1$ образован серединами сторон $\triangle ABC$. Если прямая $\ell$ не пересекает $\triangle A_1B_1C_1$ и не параллельна ни одной из его сторон, то $\ell$ образует с некоторыми двумя сторонами $\triangle ABC$ треугольник площади, большей чем $S_{\triangle ABC}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть два существенно различных случая:

1) Прямая $\ell$ не пересекает $\triangle ABC$ и точка $A$ наиболее удалена от $\ell$. Тогда, очевидно, $\ell$ образует с прямыми $AB$ и $AC$ треугольник большей площади, чем $S_{\triangle ABC}$.

2) Прямая $\ell$ пересекает стороны $AB$ и $AC$ и луч $BC$ в точках $F$, $E$ и $D$ соответственно. Тогда из условия леммы следует, что $AE < EC$. Легко видеть,

что треугольник, симметричный треугольнику $DEC$ относительно точки $E$, содержит $\triangle AFE$, а следовательно, $S_{\triangle AFE} < S_{\triangle DEC}$. Значит, $S_{\triangle BFD} > S_{\triangle ABC}$.

Остальные случаи сводятся к рассмотренным после переобозначения сторон треугольника. □

## § 3. Доказательство теоремы 1.1

Введём обозначения. Пусть $a$ — вектор единичной длины, $X$ — выпуклое тело. Обозначим через $\ell_+(a, X)$ и $\ell_-(a, X)$ опорные прямые к $X$, перпендикулярные $a$ и такие, что если $\lambda_1 a \in \ell_-(a, X)$, $\lambda_2 a \in \ell_+(a, X)$, то $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, иначе говоря, $(a, x) > 0$ для всех $x \in \ell_+(a, X) - \ell_-(a, X)$.

Можно заметить, что $\ell_+(a, X) = \ell_-(-a, X)$. Заметим также, что сумма или разность двух параллельных прямых — прямая, параллельная им обеим. Тогда можно обозначить

$$m(a, X) = \frac{1}{2}(\ell_+(a, X) + \ell_-(a, X)),$$

т. е. прямая $m(a, X)$ равноудалена от $\ell_+(a, X)$ и $\ell_-(a, X)$ и параллельна им обеим, делит ширину $X$ в заданном направлении пополам.

Доказательство теоремы 2.5. Сначала явно построим три транслята фигуры $K$, а потом докажем, что они покрывают $X$.

Пусть $a$ — некоторый вектор длины 1. Рассмотрим прямую

$$\ell(a) = \ell_+(a, X) - \ell_+(a, K).$$

Так как $w(X, K, a) = 1$, имеем $\ell(a) = m(a, X - K)$. Ясно, что $\ell(a)$ непрерывно зависит от $a$. Для попарно неколлинеарных векторов $a_1, a_2, a_3$ обозначим через $S(a_1, a_2, a_3)$ площадь треугольника, образованного прямыми $\ell(a_1)$, $\ell(a_2)$, $\ell(a_3)$. Так как эти прямые пересекаются внутри $X - K$, то

$$S(a_1, a_2, a_3) \leqslant \frac{1}{2}(\operatorname{diam}(X - K))^2 \sin\varphi,$$

где $\varphi$ — угол между прямыми $\ell(a_1)$ и $\ell(a_2)$. Следовательно, величина $S(a_1, a_2, a_3)$ стремится к нулю, когда какие-то из направлений $\ell(a_i)$ стремятся друг к другу, поэтому её можно считать непрерывной функцией набора $a_1, a_2, a_3$, в котором могут быть и равные векторы. По соображениям компактности $S$ при некоторых $a_1, a_2, a_3$ достигает максимума.

Если этот максимум равен нулю, то любые три, а значит, и все $\ell(a)$ пересекаются в одной точке $t$. Тогда $X = K + t$, так как опорные прямые к ним в любом направлении совпадают. В самом деле,

$$t \in \ell_+(a, X) - \ell_+(a, K),$$

а следовательно,

$$0 \in \ell_+(a, X) - \ell_+(a, K) - t,$$

т. е.

$$0 \in \ell_+(a, X) - \ell_+(a, K + t) \quad \text{и} \quad \ell_+(a, K + t) = \ell_+(a, X).$$

В противном случае пусть $t_1$, $t_2$ и $t_3$ — середины соответствующих сторон треугольника, образованного прямыми $\ell(a_1)$, $\ell(a_2)$ и $\ell(a_3)$. Покажем, что трансляты $K_i = K + t_i$ покрывают $X$. Будем считать, что $(a_i, t_i - t_j) > 0$ $(i \neq j)$, меняя в случае необходимости знаки у $a_i$ (см. рис. 1).

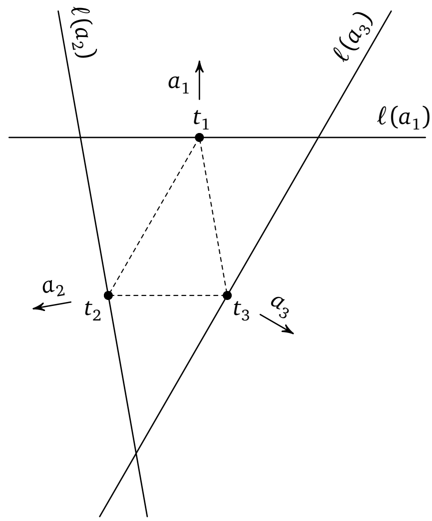


Рис. 1

Возьмём на границе $K$ точки $y_i$, принадлежащие $\ell_-(a_i, K)$. Докажем, что $y_i + t_i - t_j \in K$, т. е. $y_i + t_i \in K + t_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Достаточно доказать это, например, для $y_1 + t_1 - t_2$ и $y_1 + t_1 - t_3$, так как для других $i$ доказательство аналогично.

На самом деле достаточно доказать, что выпуклая оболочка точки $y_1$ и точек касания $\ell_+(a_2, K)$ и $\ell_+(a_3, K)$ с $K$ содержит $y_1$, $y_1 + t_1 - t_2$ и $y_1 + t_1 - t_3$ и содержится в $K$ (это схематически изображено на рис. 2). Для этого достаточно доказать, что $\ell_+(a_2, K)$ и $\ell_+(a_3, K)$ не касаются $K$ внутри полосы, образованной прямыми $\ell_-(a_1, K)$ и $\ell_-(a_1, K) + t_1 - t_2 = \ell_-(a_1, K) + t_1 - t_3$ (последняя прямая содержит точки $y_1 + t_1 - t_2$ и $y_1 + t_1 - t_3$, см. рис. 2; здесь используется тот факт, что прямая $t_2t_3$ параллельна $\ell(a_1)$, а потому и $\ell_-(a_1, K)$).

Докажем, что точка касания $\ell_+(a_3, K)$ и $K$ не лежит внутри полосы, образованной прямыми $\ell_-(a_1, K)$ и $\ell_-(a_1, K) + t_1 - t_2$. Для второй прямой

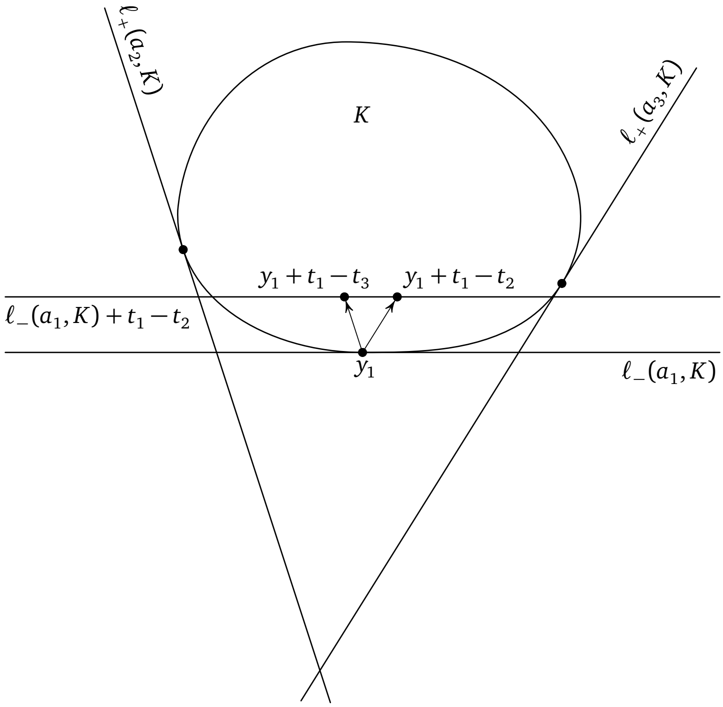


Рис. 2

доказательство аналогично. Сдвинем все рассматриваемые прямые и точки на вектор $t_2$. Тогда $K$ перейдёт в $K_2$.

Теперь нам нужно доказать, что точка касания $\ell_+(a_3,K_2)$ и $K_2$ не лежит внутри полосы, образованной прямыми $\ell_-(a_1,K_2)$ и $\ell_-(a_1,K_2)+t_1-t_2 = \ell_-(a_1,K)+t_1 = \ell_-(a_1,X)$ (последнее равенство следует из того, что $t_1 \in \ell(a_1) = \ell_-(a_1,X) - \ell_-(a_1,K)$).

Предположим противное. Пусть вектор $a$ получается из $a_3$ малым поворотом в сторону $a_1$. Тогда при достаточно малом отличии $a$ от $a_3$ прямые $\ell_+(a_3,K_2)$ и $\ell_+(a,K_2)$ будут пересекаться в полосе между $\ell_-(a_1,K_2)$ и $\ell_-(a_1,X)$ (это схематически изображено на рис. 3).

Рассмотрим теперь прямые $\ell_+(a_3,X)$ и $\ell_+(a,X)$. Прямая $\ell_+(a_3,X)$ получается из $\ell_+(a_3,K_2)$ сдвигом на вектор $t_3-t_2$, так как $t_3 \in \ell_+(a_3,X) - \ell_+(a_3,K)$, т. е. $t_3-t_2 \in \ell_+(a_3,X) - \ell_+(a_3,K_2)$.

Векторы $a_1,a_2,a_3$ выбраны так, чтобы $\ell(a_1)$, $\ell(a_2)$, $\ell(a_3)$ образовали треугольник максимальной площади и прямая $\ell(a)$ была не параллельна его сторонам. По лемме 2.6 она пересекает $\triangle t_1t_2t_3$ и в данном случае обязана пересекать стороны $t_2t_3$ и $t_1t_3$ (см. рис. 1). Так как

$$\ell(a) = \ell_+(a,X) - \ell_+(a,K) = \ell_+(a,X) - \ell_+(a,K_2) + t_2,$$

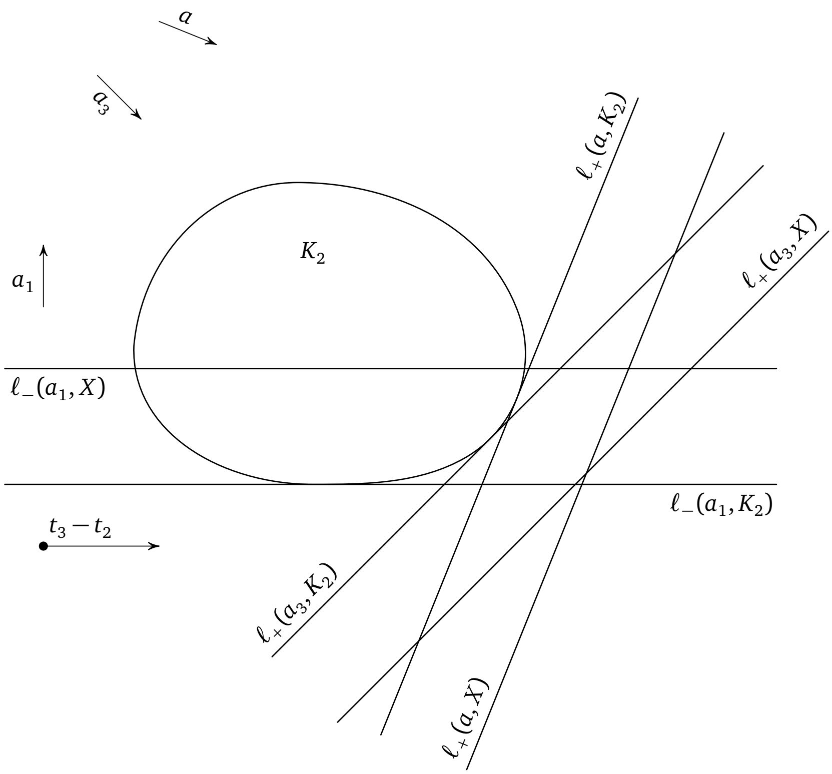


Рис. 3

прямая $\ell_+(a, X)$ получается из прямой $\ell_+(a, K_2)$ сдвигом на вектор, сонаправленный с $t_3 - t_2$ и меньшей длины.

Это означает, что точка пересечения $\ell_+(a_3, X)$ и $\ell_+(a, X)$ лежит по другую сторону от прямой $\ell_-(a_1, X)$ по сравнению с $X$, как и точка пересечения прямых $\ell_+(a_3, K_2)$ и $\ell_+(a, K_2)$ (см. рис. 3, эти сдвиги прямых $\ell_+(a_3, K_2)$ и $\ell_+(a, K_2)$ только удаляют точку их пересечения от $\ell_-(a_1, X)$). На рис. 3 также видно, что при таком расположении все три прямые $\ell_+(a, X)$, $\ell_+(a_3, X)$ и $\ell_-(a_1, X)$ не могут одновременно быть опорными для $X$. Получили противоречие.

Итак, по доказанному $y_i + t_i \in \bigcap_j K_j$ при $i = 1, 2, 3$. Пусть $C = \operatorname{conv} \bigcup_i K_i$, докажем, что $X \subseteq C$. Предположим противное и возьмём прямую, отделяющую какие-то точки $X$ от $C$. Пусть $a$ — её направляющий вектор, тогда прямые $\ell_+(a, X) - \ell_+(a, K_i)$ лежат по одну сторону от начала координат, т. е. все три точки $t_i$ лежат по одну сторону от $\ell(a)$ — противоречие с леммой 2.6.

Множество $C$ отличается от $\bigcup_i K_i$ на объединение множеств, лежащих внутри треугольников $T_i$, с вершинами $y_i + t_j$ $(j = 1, 2, 3$, см. рис. 4).

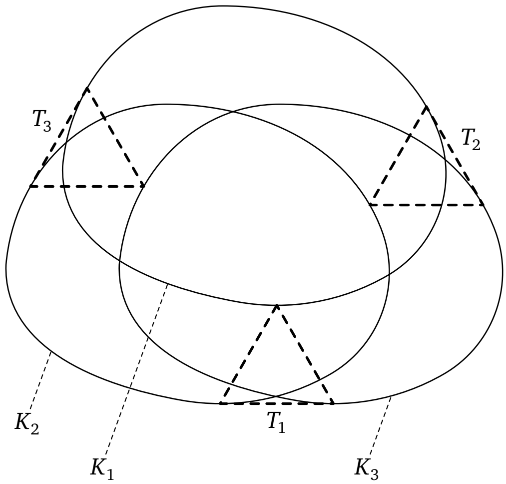


Рис. 4

Но $\triangle T_i$ лежит с $X$ по разные стороны от $\ell_-(a_i, X)$, и поэтому множество $\triangle T_i \cap (C \setminus \bigcup_i K_i)$ не пересекает $X$. Значит, $C \setminus \bigcup_i K_i$ тоже не пересекает $X$. Следовательно, $X \subseteq \bigcup_i K_i$.

Теорема 2.5 доказана. □

## § 4. Набросок доказательства теоремы 1.2

Рассмотрим данную нам систему кругов.

1) Если мы рассмотрим минимальный круг в системе с радиусом $r$ и нарисуем три равных круга не из системы радиусом

$$R = \frac{r}{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1},$$

касающиеся внешним образом друг друга попарно и касающиеся маленького круга, то три точки их касания друг с другом протыкают все круги системы с радиусами, большими $R$. Для доказательства требуется заметить, что все круги системы пересекают маленький круг, и рассмотреть криволинейный треугольник, образованный частями трёх вспомогательных кругов радиуса $R$, и его пересечение с выбранным кругом системы.

2) Если мы рассмотрим максимальный по площади треугольник, который касается тремя своими сторонами снаружи некоторых трёх кругов из нашей системы, то точки его касания с кругами (по совместительству — его середины сторон) проткнут все круги системы, если отношение радиусов любых двух кругов в системе не больше 2. Это делается

с помощью леммы 2.6, которая показывает, что любой круг системы пересекает выбранный срединный треугольник, и некоторой «медитации» над картинкой. Если рассматриваемых в этих пунктах треугольников не существует, то любые три крута системы пересекаются и, значит, все они протыкаются общей точкой по теореме Хелли.

3) Из пункта (1) следует, что, проткнув слишком большие круги тремя точками, мы можем разбить оставшиеся круги на три системы с отношениями радиусов не более 2, так как

$$\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}-1} < 8,$$

и применить к этим системам приём (2). В итоге мы затратим не более 12 точек на протыкание всех кругов.

## Список литературы


[1] *Danzer L.* Zur Lösung des Gallaischen Problems über Kreisscheiben in der Euklidischen Ebene // Studia Sci. Math. Hungar. 1986. Vol. 21, № 1–2. P. 111–134.

[2] *Карасёв Р. Н.* О трансверсалях семейств транслятов двумерного выпуклого компакта // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1998. Т. 252. С. 67–77.

[3] *Karasev R. N.* Piercing families of convex sets with the $d$-intersection property in $\mathbb{R}^d$ // Discrete Comput. Geom. 2008. Vol. 39, № 4. P. 766–777.


Роман Николаевич Карасёв, МФТИ, ИППИ РАН

r_n_karasev@mail.ru