Задача о лягушке

А. Ю. Эвнин

Рассматривается олимпиадная задача, связанная с распределением двумерной случайной величины и допускающая разнообразные подходы к своему решению.

Начиная с 2009 г. в Южно-Уральском государственном университете регулярно проводятся математические конкурсы [1–5]. В числе участников этих конкурсов студенты и аспиранты ЮУрГУ, других вузов, а также любители математики из разных городов России и стран ближнего зарубежья.

В заметке разбирается задача из 55-го конкурса.

Задача. *Лягушка совершает прыжки, каждый — на метр. Направление каждого прыжка выбирается случайно* (*считаем, что случайная величина, равная углу поворота, распределена равномерно на отрезке* $[-\pi; \pi]$). *С какой вероятностью после трёх прыжков лягушка окажется на расстоянии не больше* 1 *м от начальной точки*?

§ 1. Неверное решение

Эта задача взята из материалов олимпиады AMC (American Mathematics Competitions) 2010 г. Авторы предложили такое решение.

Пусть первый прыжок лягушки был из точки A в точку O (рис. 1). Тогда после ещё двух прыжков лягушка может находиться в любой точке круга радиуса 2 с центром в точке O (будем называть этот круг *большим кругом*). Благоприятное событие состоит в попадании лягушки в *маленький круг* — круг единичного радиуса с центром в точке A. Отношение

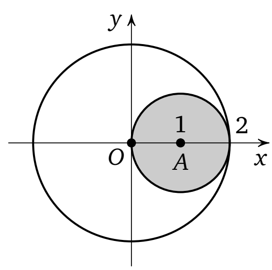

Рис. 1

Первоначальная версия опубликована в журнале «Математика в высшем образовании», 2018, № 16, с. 35–42.

площади маленького круга к площади большого, которое нас интересует, равно 1/4. Здесь получен верный ответ, но решение неверное!

Действительно, в нём неявно предполагается, что распределение положения лягушки после двух прыжков (если она начинает прыгать из точки O) является равномерным в большом круге. Основанием к такому выводу может служить следующее наблюдение: из точки O в любую точку внутри большого круга, отличную от его центра, можно за два прыжка попасть ровно двумя способами.

Однако указанное распределение не является равномерным. О том, каково оно, мы поговорим в конце статьи. А сначала решим задачу, не находя самого распределения.

§ 2. Три верных решения

Способ 1. Пусть лягушка прыгает по комплексной плоскости, стартуя из начала координат. Направим действительную ось в направлении её первого прыжка. Пусть направления второго и третьего прыжка составляют с действительной осью соответственно углы α и β. Можно считать, что α и β — случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[-\pi; \pi]$. Нас интересует вероятность выполнения неравенства

$$|1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta}| \leqslant 1.$$

Имеем:

$$(1 + \cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 \leqslant 1;$$
$$3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos(\alpha - \beta)) \leqslant 1;$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos(\alpha - \beta) \leqslant -1;$$
$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 1 \leqslant -1;$$
$$2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Big(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Big) \leqslant 0;$$
$$4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \leqslant 0;$$

с вероятностью единица

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 0.$$

Заметим, что, в наших предположениях, $-\pi \leqslant (\alpha - \beta)/2 \leqslant \pi$. Поэтому окончательно имеем $-\pi \leqslant (\alpha - \beta)/2 \leqslant -\pi/2$ или $\pi/2 \leqslant (\alpha - \beta)/2 \leqslant \pi$. Двумерная случайная величина $(\alpha/2; \beta/2)$ равномерно распределена на квадрате

$$D = \Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big] \times \Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big].$$

Найденным неравенствам между α и β (описывающим интересующее нас событие) соответствуют закрашенные треугольники на рис. 2.

Искомая вероятность равна отношению площади закрашенной области к площади квадрата D. Как видно, это $1/4$.

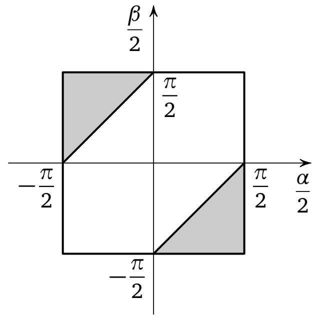

Рис. 2

Способ 2. Пусть лягушка прыгает по маршруту $A \to B \to C \to D$. Обозначим $\alpha = \angle ABC$, $\beta = \angle BCD$ (рис. 3). Удобно считать, что α и β — случайные величины, равномерно распределённые соответственно на отрезках $[0; \pi]$ и $[0; 2\pi]$.

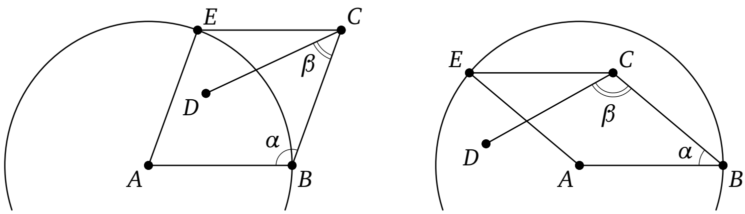

Рис. 3

Достроим треугольник ABC до ромба $ABCE$. Для того чтобы точка D оказалась в единичном круге с центром в точке A, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$0 \leqslant \beta \leqslant \pi - \alpha. \qquad (*)$$

Двумерная случайная величина $(\alpha; \beta)$ равномерно распределена на прямоугольнике $G = [0; \pi] \times [0; 2\pi]$. А соотношению $(*)$ (т. е. интересующему нас событию) соответствует закрашенный треугольник на рис. 4.

Искомая вероятность равна отношению площади треугольника к площади прямоугольника. Как видно, это $1/4$.

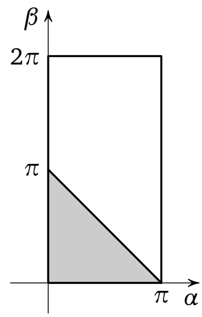

Рис. 4

Способ 3 (М. Д. Бронштейн, Э. Ю. Лернер).

Лемма[1)]. *Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — компланарные, но попарно не коллинеарные единичные векторы. Тогда из векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ ровно один будет иметь длину, меньшую единицы.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{AO} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OF} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OG} = -\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OH} = -\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OI} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ (рис. 5). Точки F, G, H, I — вершины ромба. Нужно

[1)] Как позднее выяснили авторы, формулировка леммы не оригинальна, именно её в качестве ещё одного (уже правильного) решения предложили составители задач AMC.

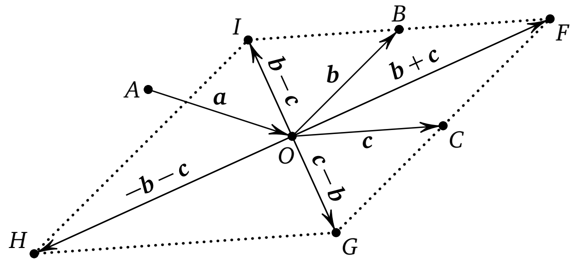

Рис. 5

доказать, что ровно одна из них находится на расстоянии, меньшем единицы, от точки A. Центр ромба — точка O, а сторонам соответствуют векторы $\overrightarrow{FG} = -2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{GH} = -2\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{HI} = 2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{IF} = 2\boldsymbol{c}$. Если провести теперь четыре единичных окружности с центрами в F, G, H, I (рис. 6), то первая и вторая, вторая и третья, третья и четвёртая, четвёртая и первая окружности касаются друг друга в серединах сторон ромба (точках C, D, E, B).

Точка A лежит на единичной окружности с центром в точке O. Эта окружность проходит через точки B, C, D, E, которые делят её на четыре дуги. Точка A отлична от точек B, C, D, E (из-за неколлинеарности векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$) и лежит на одной из указанных четырёх дуг. Например, на дуге EB, как на рис. 6. Ясно, что точка A не попадает в единичные круги с центрами в точках F и H (эти круги внешним образом касаются круга с центром в точке I). Не попадает она и в единичный круг с центром

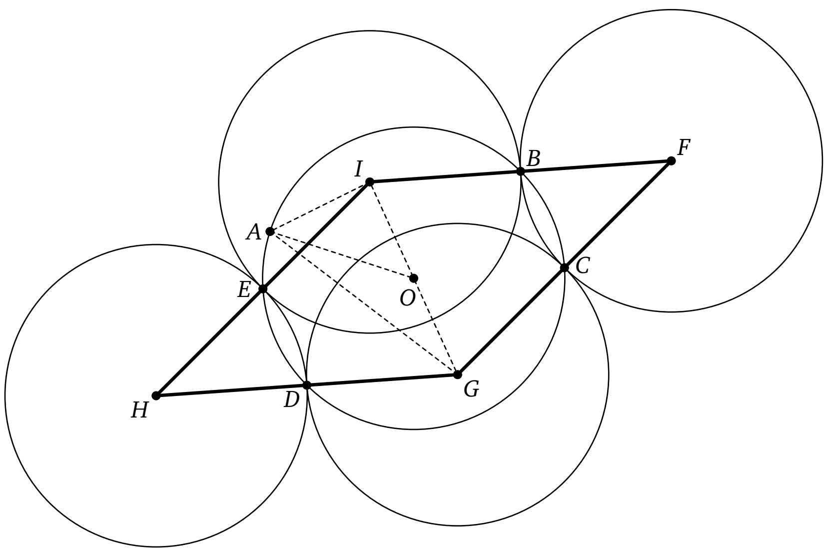

Рис. 6

в точке G. В самом деле, если $AI < 1$, $AG < 1$ и $AO = 1$, то, рассмотрев треугольники AIO и AGO, имеем неравенства для их углов:

$$\angle AIO > \angle AOI, \quad \angle AGO > \angle AOG.$$

Поскольку углы AOI и AOG смежные, сложение этих неравенств даёт

$$\angle AIO + \angle AGO > 180^\circ.$$

Но тогда сумма двух углов в треугольнике AIG больше 180°. Противоречие!

Таким образом, ровно одна из вершин ромба находится на расстоянии, меньшем единицы, от точки A. Это и требовалось доказать. $\square$

Замечание. То, что точка A не попадает в пересечение двух кругов, можно было доказать и таким рассуждением. Пусть какие-то два вектора из указанных четырёх имеют длину меньше 1, например, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}| < 1$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| < 1$. Тогда

$$2|\boldsymbol{a}| = |(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})| \leqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| < 2,$$

откуда $|\boldsymbol{a}| < 1$ — противоречие.

Из леммы следует, что искомая вероятность в задаче про лягушку есть $1/4$. Действительно, пусть в прямоугольной системе координат Oxy направления 1-го, 2-го и 3-го прыжков составляют углы α, β и γ с осью Ox, а $I(\alpha, \beta, \gamma)$ — индикатор интересующего нас события (эта величина равна единице, когда событие происходит, и равна нулю в противном случае). Тогда искомая вероятность P может быть вычислена как

$$P = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_D I(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

где D — декартов куб отрезка $[0; 2\pi]$. Интеграл от каждой из функций $I(\alpha, \beta+\pi, \gamma)$, $I(\alpha, \beta, \gamma+\pi)$, $I(\alpha, \beta+\pi, \gamma+\pi)$ (аргументы складываются по модулю 2π) даст тот же результат. Поэтому интеграл от суммы индикаторов

$$I(\alpha, \beta, \gamma) + I(\alpha, \beta+\pi, \gamma) + I(\alpha, \beta, \gamma+\pi) + I(\alpha, \beta+\pi, \gamma+\pi)$$

будет в 4 раза больше. Сумма же индикаторов, как показывает лемма, почти всюду равна единице. Отсюда $4P = 1$ и $P = 1/4$.

§ 3. Распределение суммы двух величин, равномерно распределённых на единичной окружности

Вернёмся к задаче нахождения плотности распределения суммы двух случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на единичной окружности с центром в начале координат O.

В силу симметрии, плотность распределения $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ зависит только от

$$OM = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Пусть α — угол поворота направления второго прыжка относительно первого. Тогда (проверьте это!) $r = 2\cos(\alpha/2)$. Случайная величина $\varphi = \alpha/2$ равномерно распределена на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$. Поэтому для функции распределения случайной величины r имеем

$$F_r(x) = P\{2\cos\varphi < x\} = 2P\left\{\arccos\frac{x}{2} < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{2}{\pi}\cdot\arcsin\frac{x}{2},$$

где $0 \leqslant x \leqslant 2$.

По одномерному закону распределения r двумерную плотность $f(x, y)$ найдём с помощью рассуждения, предложенного проф. Л. Д. Менихесом.

В тождестве

$$\iint\limits_{x^2+y^2<r^2} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{2}{\pi}\cdot\arcsin\frac{r}{2}$$

перейдём к полярным координатам (ρ, φ), полагая $f(x, y) = g(\rho)$:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^r \rho g(\rho)\,d\rho = \frac{2}{\pi}\cdot\arcsin\frac{r}{2}.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^r \rho g(\rho)\,d\rho = \frac{1}{\pi^2}\cdot\arcsin\frac{r}{2}.$$

Дифференцирование по r даёт

$$rg(r) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1/2}{\sqrt{1-(r/2)^2}}, \quad \text{т. е.} \quad g(r) = \frac{1}{\pi^2\cdot r\cdot\sqrt{4-r^2}}.$$

Получилось, что плотность распределения бесконечна в центре круга (этого следовало ожидать, поскольку есть бесконечное число способов попасть за два прыжка лягушки из точки O в точку O) и на его границе. Последнее весьма неожиданно!

Теперь (ещё раз!) найдём вероятность попадания в маленький круг

$$P = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho g(\rho)\,d\rho = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho = \ldots = \frac{1}{4}.$$

Благодарности

Автор выражает благодарность М. Д. Бронштейну, С. М. Воронину, Э. Ю. Лернеру, Л. Д. Менихесу за продуктивное обсуждение данного сюжета. Из участников «Математического конкурса в ЮУрГУ» с задачей про лягушку справились студенты М. Евгеньев (Челябинск, ЮУрГУ), Е. Кичак (Москва, МИРЭА), К. Чернышёв (Санкт-Петербург, СПбГУ).

Публикация [6] посвящена задачам по теории вероятностей, предлагавшимся в последние годы на различных студенческих олимпиадах.

Список литературы

[1] *Эвнин А. Ю.* 150 красивых задач для будущих математиков. М.: Ленанд, 2018.

[2] *Эвнин А. Ю.* Ещё 150 красивых задач для будущих математиков. М.: Ленанд, 2018.

[3] *Эвнин А. Ю.* Задачи математического конкурса в ЮУрГУ // Математическое образование. 2015. № 4(76). С. 26–52.

[4] *Эвнин А. Ю.* Олимпиада в форме компьютерного теста // Математика в высшем образовании. № 11 (2013). С. 97–102.

[5] *Эвнин А. Ю.* Олимпиада в форме командной игры // Математика в высшем образовании. № 13 (2015). С. 81–94.

[6] *Эвнин А. Ю., Лернер Э. Ю., Игнатов Ю. А., Григорьева И. С.* Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах // Математическое образование. 2017. № 4(84). С. 45–60.

Александр Юрьевич Эвнин, Южно-Уральский государственный университет

`graph98@yandex.ru`