Задачник

(составитель А. Я. Канель-Белов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Дан единичный вектор. Разрешается выбрать прямую и заменить вектор его проекцией на эту прямую. С новым вектором можно провести ту же процедуру, и т. д. Прямая каждый раз выбирается заново. Можно ли таким образом развернуть вектор на 180°, потеряв при этом не более 1 % от его длины? (*А. Я. Канель-Белов*)

2. а) Пусть 0 — притягивающая точка непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ (т. е. $0 < |f'(0)| < 1$). Положим $k = f'(0)$. Докажите для всех x_0 из некоторой окрестности нуля существование предела
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k^n} =: g(x_0),$$
непрерывность функции g и тождество $g(k \cdot g^{(-1)}(x)) = f(x)$.

   б) Докажите, что если f бесконечно дифференцируема, то и g тоже бесконечно дифференцируема.

в) Докажите тождество

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2}\cdots\frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{x}}}}_{n\text{ корней}}}{2}=\frac{4-x^2}{\sqrt{2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}}.$$

(*А. Я. Канель-Белов*)

3. а) Могут ли три прямые разбить круг на 7 частей, равных по площади?

   б) (Открытый вопрос.) Для каждого n определите, могут ли $n+1$ гиперплоскостей разбить n-мерный шар на $2^{n+1}-1$ частей, равных по объёму? (*Н. С. Келлин*)

4. Докажите, что при всех $a_i \geqslant 0$ выполняется *неравенство Карлемана*:
$$e\cdot(a_1+\ldots+a_n) > a_0+\sqrt{a_0a_1}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_0\ldots a_n},$$
где e — основание натуральных логарифмов.

5. Пусть l — касательная к окружности ABC в точке A; ω — окружность, которая проходит через точки B, C и пересекает прямую l в точках D и E; W, N — середины дуг DE окружности ω. Докажите, что положение ортоцентра треугольника NWA (если он не вырожден) не зависит от положения окружности ω. (*М. Плотников*)

6. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$, $k<n$, с а) комплексными, б) действительными коэфициентами. Возможно ли равенство многочленов: $P_1^2+\ldots+P_k^2 = x_1^2+\ldots+x_n^2$? (*Фольклор*)

7. Докажите, что при бесконечно многих n набор чисел $1, \ldots, 3n$ можно разбить на n групп по три числа так, чтобы одно из чисел каждой группы было равно сумме двух других. (*Фольклор*)

8. а) Какое максимальное число точек можно отметить в единичном трёхмерном кубе так, чтобы все попарные расстояния были строго больше 1? Больше или равны 1?

   б) Аналогичные вопросы для четырёхмерного куба. (*Фольклор*)

9. а) Дана последовательность a_n, $n=1, 2, \ldots$ Известно, что при всех $\gamma>1$ выполнено равенство $\lim_{m\to\infty} a_{[\gamma^m]}=0$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} a_n=0$? (Здесь $[x]$ означает целую часть числа x.) (*Фольклор*)

   б) Назовём число $\beta\in[0,1]$ *хорошим*, если $\beta=\lim_{n\to\infty}\{\alpha^n\}$ при некотором $\alpha>1$ (здесь $\{x\}$ означает дробную часть числа x). Докажите, что множество хороших чисел не более чем счётно. (*А. Я. Канель-Белов*)

10. В k-мерном пространстве отмечены n точек. Разрешается взять прямую, на которой уже лежит не менее t отмеченных точек, отметить любую другую точку на этой прямой и далее повторять эту процедуру. Оказалось, что любую точку пространства можно отметить. При каком наименьшем числе n изначально отмеченных точек это могло случиться? (Число t изначально фиксировано, ответ зависит от t.)
(*И. В. Митрофанов, Ф. В. Петров*)

11. а) Тригонометрический полином P степени n принимает значения из $[-1; 1]$. При этом $P(0) = 1$. Докажите, что $P(x) > \cos nx$ при всех $x \in \left[-\frac{\pi}{2n}; +\frac{\pi}{2n}\right]$. (*Фольклор*)
б) Известно, что $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n$. Докажите, что тригонометрический многочлен $a_0 + a_1 \cos x + \ldots + a_n \cos nx$ на отрезке $[0; \pi]$ ровно n раз обращается в нуль. (*В. А. Сендеров, А. Я. Канель-Белов*)

12. На конгресс собрались 2019 учёных — химиков и алхимиков. Химик правдив, а алхимик может сказать правду, а может и соврать. Химиков больше. Каждый всё про всех знает. За какое минимальное число вопросов можно установить, кто есть кто? (*Фольклор*)

Исправление условия

К сожалению, в условии задачи 13.8 (выпуск 13, с. 180) допущена опечатка.

Приводим исправленную формулировку.

Задача 13.8. Непрерывная функция f такова, что

$$\int\limits_0^1 x^k f(x)\,dx = 1 \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Докажите, что $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant n^2$. (*SEEMOUS* 2008, *Mircea Dan Rus*)

Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные задачи открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому решение задач обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки[1].

Публикуем очередные дополнения к задачам.

В выпуске 11 была опубликована

Задача 11.4. d-мерная ладья бьёт по прямым вдоль осей координат.

а) Какое максимальное число ладей можно расставить в d-мерном кубе $n \times \ldots \times n$ так, чтобы они не били друг друга?

Назовём расстановку ладей *полной*, если в ней максимально возможное число ладей.

б) Слоем трёхмерного куба $n \times n \times n$ назовём квадрат $n \times n$, состоящий из клеток с одинаковой третьей координатой. Пусть первые k слоёв заполнены полно (т. е. в них стоят nk ладей). Докажите, что эту расстановку можно продолжить до полной расстановки всего куба.

в) В трёхмерном кубе $n \times n \times n$ расставили ладьи и зафиксировали угловую клетку. Каково максимальное число подкубов с полной расстановкой и той же угловой клеткой? Аналогичный вопрос для d-мерного куба. (*А. Я. Канель*)

В выпуске 23 было опубликовано дополнение к этой задаче:

Задача 11.4$'$. Сколько полных расстановок ладей в трёхмерном кубе $4 \times 4 \times 4$? (*А. Ю. Эвнин*)

В этой связи возникают следующие вопросы:

Задача 11.4$''$(на исследование). Какое минимальное число ладей необходимо поставить в кубе $n \times n \times n$, чтобы они били все поля? Что происходит в многомерном кубе? Интересен, во-первых, случай, когда размерность фиксирована, а $n \to \infty$, а во-вторых, когда $n = 2$. (Эта задача относится к теории *кодов, исправляющих ошибки*. На практике чаще всего $n = 2$.)

Задача 11.4$'''$(на исследование). В меру стыдливый Вася может соврать не более одного раза. Он задумал натуральное число, меньшее чем n. Петя хочет найти задуманное число или поймать Васю на вранье. Петя может задавать Васе вопросы, требующие ответа «да» или «нет». Каково минимальное необходимое число вопросов? А если Пете надо только определить задуманное число?

[1] В этом проблема психологических тестов на интеллект: хорошая задача *поучительна*, т. е. её решение, в частности, влияет на возможности решения других задач. Но и наоборот: чем естественнее задача, тем сильнее при её решении сказывается предыдущий опыт. При решении сложных задач требуются идеи по организации процесса решения. Важную роль играет постановка вспомогательных задач. С другой стороны, при решении неестественной задачи исключается эстетика и естественность как фактор поиска.

В выпуске 13 была опубликована

Задача 13.10. *k-параллелепипедом* называется прямоугольный параллелепипед, среди рёбер которого имеется не более k различных. Докажите[2)], что если параллелепипед P можно разрезать на k-параллелепипеды, то длины его рёбер порождают векторное пространство размерности не выше k над $\mathbb{Q}$. (*Л. Радзивиловский, И. Фещенко, Д. Радченко, М. Танцюра*)

Возникает вопрос о разбиениях на кубы:

Задача 13.10$'$. а) Можно ли разбить плоскость на попарно различные квадраты? (*А. Я. Канель-Белов*)

б) Докажите, что из попарно различных кубов нельзя составить кирпич. (*Фольклор*)

в) (Открытый вопрос.) Можно ли разбить n-мерное пространство ($n>2$) на попарно различные кубы? (Предполагаемый ответ — отрицательный, невозможность для размерности k влечёт невозможность для $n > k$.) (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 17 была опубликована

Задача 17.5. На плоскости нарисованы две а) пересекающиеся б) непересекающиеся окружности. Можно ли одной линейкой построить их центры?

Эту тему развивает

Задача 17.5$'$. На плоскости нарисована кривая G второго порядка и отмечена точка A. Никаких других пометок на плоскости нет.

а) Пусть G — эллипс. Постройте с помощью циркуля и линейки: центр G; вершины G (точки пересечения G с осями симметрии); фокусы; точки касания с G прямых, которые проходят через A и касаются G.

б) Пусть G — парабола. Постройте с помощью циркуля и линейки: вершину; фокус; точки касания с G прямых, которые проходят через A и касаются G; ось симметрии.

в) Пусть G — гипербола. Постройте с помощью циркуля и линейки: центр G; вершины G (точки пересечения с осью симметрии); фокусы;

[2)] Решению этой задачи и близким вопросам были посвящены работы: *Радзивиловский Л. В., Радченко Д. В., Танцюра М., Фещенко И. С.* Разрезание параллелепипеда на бруски // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 215–227; а также: *Шаров Ф. А.* Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 200–214.

асимптоты; точки касания с G прямых, которые проходят через A и касаются G. (*Г. А. Гальперин*)

В выпуске 23 была опубликована

Задача 23.4. Докажите, что середины сторон произвольного описанного четырёхугольника, отличного от квадрата, лежат на эллипсе, касающемся вписанной окружности в двух точках (возможно, мнимых). (*А. А. Заславский*)

Ниже ещё одна задача на близкую тему:

Задача 23.4$'$. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности. (*Dao Thanh Oai*)

В выпуске 23 была также опубликована

Задача 23.10. а) Полицейский ловит Гангстера в городе, представляющем собой квадрат 10×10, разбитый улицами на квадратные клетки — кварталы. Полицейский видит Гангстера, только если на него натыкается, и оба они ездят только по улицам. Скорость Полицейского в 10 000 раз больше скорости Гангстера. Может ли Полицейский поймать Гангстера за ограниченное время?

б) Тот же вопрос, если потребовать, чтобы путь Полицейского был *конечнозвенной ломаной*. (*А. Я. Канель-Белов*)

В этой связи возникают следующие задачи:

Задача 23.10$'$ (открытый вопрос). По рёбрам октаэдра бегают паук и муха. Паук видит муху, находясь с ней на одном ребре. Сможет ли он её поймать, если скорость паука в 2,5 раза больше скорости мухи? При каком наименьшем соотношении скоростей он может её поймать?

Задача 23.10$''$. (Задача для исследования. Редакции полное решение неизвестно.) Полицейский ловит Гангстера на трёх улицах длиной 1, выходящих из одной точки. Максимальная скорость Полицейского в 2 раза больше максимальной скорости Гангстера, но Полицейский близорук, он видит только часть улицы длиной ε, а Гангстер видит всё вокруг и Полицейского в том числе. Определить, при каких ε Полицейский сможет поймать Гангстера. Рассмотрите тот же вопрос при других соотношениях скоростей. (*По мотивам задачи: Задачник «Кванта», М645, авторы В. Дринфельд, В. Соколов*)