Решения задач из прошлых выпусков

1.10. Условие. Функция, заданная на всей вещественной прямой, бесконечно дифференцируема. В каждой точке некоторая производная (номер производной может зависеть от точки) равна нулю. Докажите, что эта функция — многочлен.

Решение этой задачи было опубликовано в «Математическом просвещении», вып. 4, с. 220. К сожалению, это решение неполно (не доказана непустота пересечения интервалов Δ_n). Публикуем другие два решения, принадлежащие ученикам школы № 57 г. Москвы.

Первое решение.

Лемма 1. *Пусть f — бесконечно гладкая функция и в некоторой точке a какая-то её производная (возможно, нулевая) не равна нулю. Тогда найдётся проколотая окрестность точки a, в которой функция f отлична от нуля.*

Доказательство. По условию существует такое k, что $f^{(k)}(a) \neq 0$ и $f^{(m)}(a) = 0$ при всех $m < k$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^k).$$

Отсюда очевидно, что в некоторой проколотой окрестности точки a знак $f(x)$ совпадает со знаком $f^{(k)}(a)(x-a)^k \neq 0$. □

Лемма 2. *Пусть f — бесконечно гладкая функция. Тогда если x — предельная точка множества нулей функции f, то все производные f в точке x равны нулю.*

Доказательство. Пусть $M = \{x : f(x) = 0\}$. Предположим, что x — предельная точка множества M и $f^{(n)}(x) \neq 0$ для некоторого n. Тогда из леммы 1 получаем, что $f(x_0) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x, чего не может быть, так как x — предельная точка множества M. Противоречие. □

Лемма 3. *Пусть f — бесконечно гладкая функция. Известно, что на любом интервале, на котором f не принимает нулевых значений, f — многочлен. Тогда f — многочлен на всей прямой.*

Доказательство. Пусть $M = \{x\colon f(x) = 0\}$. Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то множество $\mathbb{R}\backslash M$ открыто, а значит, представимо в виде счётного объединения непересекающихся интервалов $I_k := (a_k; b_k)$[1], на каждом из которых f является многочленом. Пусть существует такое $k \in \mathbb{N}$, что a_k или b_k — предельная точка множества M. Без ограничения общности пусть это a_k. Тогда из леммы 2 получаем, что $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\colon f^{(n)}(a_k) = 0$. Так как f — многочлен на I_k, то $f(x) \equiv 0$ на $[a_k; b_k]$, так как иначе $f^{(n)}(x) = \mathrm{const} \neq 0$ при некотором n. Получили противоречие с определением интервалов I_k.

Значит, a_k и b_k при любом k — не предельные точки M, т. е. $a_k = b_p$ и $b_k = a_q$ для некоторых $p, q \in \mathbb{N}$. Иными словами, интервалы I_p, I_k и I_q «примыкают друг к другу». По непрерывности f является многочленом в граничных точках этих интервалов. Выберем одну из этих точек a, и пусть от неё идёт влево последовательность примыкающих интервалов I_{n_k}. Положим $A = \inf a_{n_k}$. Предположим, что $A \neq -\infty$. На каждом из двух соседних интервалов f совпадает с одним и тем же многочленом, который даёт разложение f в ряд Тейлора в граничной точке. Поэтому f является многочленом на $(A; a]$. Так как $f(a_{n_k}) = 0$ при всех k, по непрерывности $f(A) = 0$ и потому A — предельная точка множества M. Рассуждая как выше, приходим к противоречию. Следовательно, $A = -\infty$.

Рассмотрим теперь последовательность примыкающих интервалов I_{m_k}, идущую от той же точки a вправо, и положим $B = \sup b_{n_k}$. Аналогично предыдущему получаем $B = +\infty$. А это означает, что $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, что и требовалось доказать. □

Лемма 4. *Пусть f — бесконечно гладкая функция, на некотором отрезке $[A; B]$ не являющаяся многочленом. Тогда найдётся отрезок $[C; D]$ внутри отрезка $[A; B]$, на котором f также не является многочленом и не принимает нулевых значений.*

Доказательство. Пусть $M = \{x\colon f(x) = 0\}$. Как и в лемме 3, можно записать

$$\mathbb{R}\backslash M = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k; b_k).$$

Предположим, что на каждом из этих интервалов f является многочленом. Но тогда из леммы 3 вытекает, что f является многочленом на $[A; B]$ — противоречие. □

[1] Возможно, одно из a_k равно $-\infty$, а одно из b_k равно $+\infty$.

Продолжим решение исходной задачи. Пусть f — бесконечно гладкая функция и при каждом $x\in\mathbb{R}$ некоторая её производная равна нулю. Предположим, что на некотором отрезке $[A;B]$ функция f не является многочленом. По лемме 4 существует отрезок $[x_0;y_0]\subset[A;B]$, на котором f не является многочленом и не обращается в нуль. Тогда и $f^{(1)}|_{[x_0;y_0]}\notin\mathbb{R}[x]$. По лемме 4 существует отрезок $[x_1;y_1]\supset[x_0;y_0]$, на котором $f^{(1)}$ не является многочленом и не обращается в нуль. Аналогично определяем отрезок $[x_n;y_n]$ для всех n.

Таким образом, мы получим последовательность таких вложенных отрезков $[x_0;y_0]\supset[x_1;y_1]\supset[x_2;y_2]\supset\ldots$, что при всех $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и при всех $x\in[x_n;y_n]$ имеем $f^{(n)}(x)\neq 0$. У отрезков $[x_n;y_n]$ есть общая точка x, в которой $f^{(n)}(x)\neq 0$ для всех $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, чего не может быть по условию задачи — противоречие. Значит, $f(x)$ является многочленом на всей оси.

Комментарий. Эта задача хорошо известна. См., например, книгу *Boas R. P. Jr.* A primer of real functions. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1960. (Carus Mathematical Monograph; Vol. 13). P. 58.

(*И. Украинцев, ученик 11 класса школы № 57 г. Москвы*)

Второе решение. Рассмотрим множество N точек, для которых существует интервал, их содержащий, в котором f — многочлен. Легко доказать, что если это множество совпадает с $\mathbb{R}$, то f — многочлен на всей прямой. Иначе говоря, достаточно показать, что множество $X=\mathbb{R}\setminus N$ пусто. Для этого нам потребуется *теорема Бэра*: *полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счётного числа нигде не плотных множеств*.

Лемма 0. *Пусть функция f бесконечно дифференцируема на интервале $(a;c)$. Если f — многочлен на интервалах $(a;b)$ и $(b;c)$, то f — многочлен на $(a;c)$.*

Доказательство. Оба многочлена совпадают с разложением f в ряд Тейлора в точке b. □

Лемма 1. *Все точки множества X — предельные.*

Доказательство. Пусть точка $x\in X$: x — изолированная. Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что $f\notin\mathbb{R}[x]$ на $(x-\varepsilon;x+\varepsilon)$, но каждая точка из $(x-\varepsilon;x)$ содержится в интервале, на котором $f\in\mathbb{R}[x]$. Зафиксируем $y_0\in(x-\varepsilon;x)$ и соответствующий интервал $(g_0;h_0)$. Положим

$$H=\sup_{h_0\leqslant h\leqslant x} h\colon f|_{[g_0;h]}\in\mathbb{R}[x].$$

Тогда $H = x$. Действительно, при $h = x - \delta$ ($\delta > 0$) отрезок $[g; h]$ можно увеличить по лемме 0. Аналогично для правой полуокрестности точки x. Значит, по лемме 0 функция f — многочлен на интервале, содержащем точку x. Но тогда $x \notin X$ — противоречие. □

Лемма 2. *Множество X пусто.*

Доказательство. Множество X замкнуто (так как его дополнение N, очевидно, открыто). Пусть X непусто. Положим $M_n = X \cap S_n$, где $S_n = \{x\colon f^{(n)}(x) = 0\}$. Тогда M_n замкнуто как пересечение замкнутых множеств и $X = \bigcup_n M_n$. В силу теоремы Бэра существует интервал $(c; d)$, пересечение которого с X непусто и содержится в некотором M_n. Легко проверить по индукции, что при $x_0 \in (X \cap [c; d])$ и $k \geqslant n$ обязательно $f^{(k)}(x_0) = 0$. Действительно, при $k = n$ это верно по выбору $(c; d)$, и если это верно при некотором k, то

$$f^{(k+1)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0,\, x \in X} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Если в $(c; d)] \setminus X$ нет отрезков, то

$$(c; d) \in M_n, \quad f|_{(c;d)} \in \mathbb{R}[x]$$

и, следовательно, $X \cap (c; d) = \varnothing$ — противоречие. Значит, существует отрезок $[l_0; k_0] \subset (c; d) \setminus X$. Положим

$$K = \sup_{k_0 \leqslant k \leqslant d} k\colon f|_{[l_0;k]} \in \mathbb{R}[x], \quad L = \inf_{c \leqslant i \leqslant l_0} l\colon f|_{[l;k_0]} \in \mathbb{R}[x].$$

Так как $(c; d) \cap X$ непусто, хотя бы одна из точек K, L не совпадает с концом отрезка $[c; d]$. Пусть это L (без ограничения общности). Если эта точка принадлежит некоторому интервалу, на котором $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, то из леммы 0 получаем противоречие с определением L. Значит, $L \in X$. Тогда по доказанному выше $f^{(t)}(L) = 0$ при всех $t \geqslant n$. Значит, степень многочлена, равного $f(x)$ на $[L; K]$, меньше n (так как он совпадает с разложением $f(x)$ в ряд Тейлора в точке L). Аналогично для всех отрезков из $(c; d) \setminus X$. Следовательно, на этом множестве $f^{(n)}(x) = 0$. На $(c; d) \cap X$ это также выполнено. Значит, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ на $(c; d)$ и этот интервал не может пересекаться с X — противоречие. □

Продолжим решение исходной задачи. Из леммы 2 получаем, что любое $x \in \mathbb{R}$ принадлежит интервалу, на котором $f \in \mathbb{R}[x]$. Любой отрезок $[n; n+1]$, где n целое, можно покрыть конечным числом таких интервалов. Из леммы 0 следует, что $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, что и требовалось доказать.

(*А. Соколов, ученик 11 класса школы № 57 г. Москвы*)

6.9′ (выпуск 21). Условие. Прожектор освещает бесконечный угол величиной в 1 градус. Разрешается располагать произвольным образом любое конечное количество прожекторов на плоскости так, чтобы они осветили целиком всю плоскость. Какое наименьшее число прожекторов потребуется, если это а) евклидова плоскость; б) плоскость Лобачевского?

(*Г. А. Гальперин*)

а) Ответ: 360.

Решение. Очевидно, что 360 прожекторов для освещения евклидовой плоскости достаточно. Для этого можно разрезать плоскость на 360 равных углов с общей вершиной и каждый из этих углов осветить своим прожектором.

На самом деле верно гораздо более сильное утверждение. Прожекторы можно разместить так, чтобы они освещали всю плоскость и при этом находились в произвольных наперёд заданных точках. Доказательство этого утверждения можно найти в статье: *Гальперин В.*, *Гальперин Г.* Освещение плоскости прожекторами // Квант. 1981. № 11. С. 28–30.

Рассмотрим теперь произвольные $n < 360$ прожекторов на плоскости и докажем, что они не освещают её полностью. Приведём два способа доказательства этого утверждения.

Первый способ. Сдвинем параллельными переносами все освещаемые прожекторами углы так, чтобы их вершины оказались в одной точке. Поскольку сумма величин этих углов меньше 360°, найдётся луч, выходящий из этой точки и не содержащийся ни в одном из них. При обратном сдвиге любого такого угла он будет пересекаться с найденным лучом не более чем по отрезку. Значит, все прожекторы будут освещать лишь ограниченную область на этом луче. Следовательно, на луче найдутся неосвещённые точки.

Второй способ. Поместим все n прожекторов внутрь круга фиксированного радиуса r и построим концентрический ему круг Ω_R переменного радиуса R. Тогда круг радиуса $R+r$ с центром в точке расположения любого прожектора целиком содержит внутри себя круг Ω_R. Поэтому освещённая прожекторами часть круга Ω_R имеет площадь не более $n\cdot\pi(R+r)^2/360$. При достаточно большом R эта величина будет меньше πR^2 — площади круга Ω_R. (Действительно, обе эти величины выражаются многочленами второй степени от R, причём коэффициент при старшей степени в первом случае меньше.) Значит, этот круг не освещён полностью.

б) Ответ: 2.

Решение. Чтобы разместить два прожектора, освещающих всю плоскость Лобачевского, воспользуемся следующим утверждением (верным в геометрии Лобачевского, но неверным в евклидовой геометрии). Любой угол содержит внутри себя некоторую прямую. Действительно, каждый угол содержит некоторую дугу абсолюта. Соединив две любые точки этой дуги, получим искомую прямую. Приведём также другое доказательство этого утверждения. Обозначим величину угла через α. Проведём произвольную прямую, а затем найдём точку, для которой угол параллельности относительно данной прямой меньше $\alpha/2$. (Такая точка найдётся в силу теоремы Лежандра, утверждающей, что любой острый угол является углом параллельности относительно данной прямой для некоторой точки.) Далее построим угол величины α с вершиной в этой точке, биссектрисой которого является перпендикуляр из точки на прямую. Из определения угла параллельности следует, что прямая целиком находится внутри угла.

Теперь разместим первый прожектор произвольным образом. Находим прямую, целиком содержащуюся внутри освещаемого им угла. Второй прожектор размещаем симметрично первому относительно этой прямой. Таким образом, каждая из двух полуплоскостей, ограниченных этой прямой, целиком освещается одним из прожекторов, а вместе они освещают всю плоскость.

Очевидно, что одного прожектора для освещения плоскости недостаточно. (*В. О. Бугаенко, Г. А. Гальперин*)

10.7. Условие. От прямоугольника отрезают квадрат, а с оставшимся прямоугольником производят ту же процедуру и далее повторяют её. Является ли последовательность отношений сторон (большей к меньшей) у этих прямоугольников периодической, если одна из сторон исходного прямоугольника равна 1, а другая равна а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt[3]{2}$, в) $\sqrt{2005}$?

а) Ответ: да. Период состоит из двух членов: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}+1$.

б) Ответ: нет.

Решение. Каждый член последовательности получается из предыдущего либо вычитанием единицы, либо вычитанием единицы и обращением. Рассмотрим подпоследовательность $\{x_n\}$ рассматриваемой последовательности, состоящую из членов, получаемых из предыдущего вторым способом. Эта подпоследовательность может быть задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 1/(x_n - a_n)$, где a_n — натуральное число. Условие периодичности такой последовательности легко сводится к квадратному уравнению с целыми коэффициентами. Таким образом, если последовательность периодична, то все её члены являются квадратичными иррациональностями, что неверно для $\sqrt[3]{2}$.

в) Ответ: да.

Решение. Верно и утверждение, обратное к доказанному выше: если начальное отношение является квадратичной иррациональностью, то последовательность периодична. Достаточно доказать, что какой-либо член этой последовательности повторится. Каждый член последовательности может быть получен из начального многократным применением двух операций — вычитания единицы и взятия обратного. Заметим, что если начальный член последовательности является квадратичной иррациональностью, то это же верно для всех её членов. Действительно, если число α — корень многочлена ax^2+bx+c, то $\alpha-1$ является корнем многочлена

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(b+2a)x+(a+b+c),$$

а $1/\alpha$ — корнем многочлена cx^2+bx+a. Будем вместо последовательности чисел рассматривать последовательность квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами, корнями которых они являются. Докажем, что с помощью указанных преобразований мы можем получить лишь конечное число квадратных трёхчленов.

Без ограничения общности можно считать, что $a>0$. Непосредственно проверяется, что дискриминант $D=b^2-4ac$ сохраняется при преобразованиях двух описанных типов:

$$(a,b,c)\mapsto(a,b+2a,a+b+c) \quad \text{и} \quad (a,b,c)\mapsto(c,b,a)$$

(или $(a,b,c)\mapsto(-c,-b,-a)$, если $c<0$). Поэтому при фиксированном b фиксировано и произведение $ac=(D-b^2)/4$, а значит, имеется лишь конечное число возможных пар значений коэффициентов a и c. Осталось доказать, что коэффициенты b у всех таких многочленов ограничены.

Преобразование второго типа сохраняет $|b|$. Если $|b|>\sqrt{D}$, то преобразование первого типа уменьшает $|b|$. Докажем это. Заметим, что в этом случае корни рассматриваемого квадратного трёхчлена имеют одинаковый знак, противоположный знаку коэффициента b (это следует из формулы корней квадратного уравнения). В нашем случае один из корней положителен, значит, и второй тоже. Поэтому $b<0$. При преобразовании первого типа к нему прибавляется положительное число $2a$. Если получившийся новый коэффициент $b'=b+2a$ таков, что $|b'|<\sqrt{D}$, то тем самым $|b'|<|b|$. Если же $|b'|>\sqrt{D}$, то в силу изложенного выше наблюдения $b'<0$, и значит, с учётом того, что $b<b'$, опять же $|b'|<|b|$. (Заметим, что поскольку корни многочлена иррациональны, D не является полным квадратом и поэтому случай равенства $|b'|=\sqrt{D}$ невозможен.) Значит, рассматриваемая последовательность обязательно содержит многочлен, для которого $|b|<\sqrt{D}$ (в противном случае абсолютные величины коэффициентов b образовывали бы монотонно убывающую последовательность положительных целых чисел). Назовём часть рассматриваемой последовательности до этого многочлена включительно её *началом*.

Имеется лишь конечное число возможных многочленов, для которых выполняется условие $|b| < \sqrt{D}$. Над каждым из них произведём преобразование первого типа и среди результатов найдём многочлен с максимальным по абсолютной величине коэффициентом b. Этот максимум ограничивает сверху абсолютные величины коэффициентов b всех многочленов последовательности, кроме, быть может, её начала. Утверждение доказано.

Фактически мы доказали, что квадратичные иррациональности — это в точности числа, выражаемые периодическими цепными дробями. Это утверждение называется *теоремой Лагранжа*. Её доказательство, близкое приведённому выше, можно прочитать в книге А. Я. Хинчина «Цепные дроби» (М.: Наука, 1978, с. 62–65). (*В. О. Бугаенко*)

11.4′ (выпуск 23). Условие. Сколько полных расстановок ладей в трёхмерном кубе $4\times4\times4$? [Расстановка ладей в k-мерном кубе является полной, если ладьи не бьют друг друга и количество ладей максимально возможное.] (*А. Ю. Эвнин*)

Ответ: 576.

Первое решение. Разобьём куб на 16 столбиков, а также на 4 слоя толщиной 1. В каждом столбике должна быть ровно одна ладья. Расположение ладей представим матрицей 4×4, в которой $a_{i,j}$ есть номер слоя, содержащего ладью из данного столбика. Нетрудно видеть, что в каждой строке и каждом столбце этой матрицы по одному разу встречаются числа 1, 2, 3, 4. Значит, эта матрица — латинский квадрат 4-го порядка.

Будем расставлять ладьи по слоям, от нижнего до верхнего. Заполнение k-го слоя означает расстановку в матрице четырёх символов k по одному в каждой строчке и каждом столбце.

Ясно, что после того, как заполнены три слоя, последний заполняется однозначно (ставим ладьи в свободные от них столбцы, или, что то же самое, записываем четвёрки в свободные клетки матрицы). Первый слой можно задать перестановкой (j_1, j_2, j_3, j_4) чисел от 1 до 4, где $a_{i,j_i} = 1$ для всех i. Поэтому первый слой заполняется $4! = 24$ способами.

Второй слой задаётся перестановкой π чисел от 1 до 4, которая по отношению к перестановке (j_1, j_2, j_3, j_4) является беспорядком (на 1-м месте не j_1, на 2-м месте не $j_2, \ldots$, на 4-м месте не j_4). Число таких беспорядков равно 9. Проблема в том, что количество способов заполнить третий слой зависит от того, как был заполнен второй. Поскольку неподвижных элементов нет, здесь всего два варианта: либо π представляет собой цикл длиной 4 (таких перестановок $3! = 6$), либо произведение двух циклов длиной 2 (таких перестановок 3: для фиксированного элемента выбираем пару, что можно сделать тремя способами, оставшиеся элементы образуют вторую пару). Вот примеры заполнения слоёв обоих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & 1 & 2 \\ 2 & & & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 \\ & & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что в первом случае третий слой заполняется двумя способами, а во втором — четырьмя.

Поэтому ответ к задаче вычисляется так: $24 \cdot (6 \cdot 2 + 3 \cdot 4) = 576$.

Замечание. В настоящее время (на начало 2019 г.) вычислено количество латинских квадратов лишь до 11 порядка. Так что если в условии задачи заменить числа 4 и 16 на k и k^2 соответственно, то при $k > 11$ науке на данный момент ответ неизвестен! (*А. Ю. Эвнин*)

Второе решение. Сведём задачу к эквивалентной: «Сколько существует способов расставить по четыре элемента каждого из четырёх типов на доске 4×4 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце был ровно один элемент каждого типа?»

Зафиксируем порядок элементов в первой строке, а затем в оставшихся клетках первого столбца. Теперь выберем определённый элемент и проверим, на каких позициях в оставшемся квадрате 3×3 он может стоять. Непосредственно видим, что ровно в четырёх из шести расстановок позиции остальных элементов определяются однозначно, а в остальных двух возникают противоречия.

Теперь можно менять порядок элементов первой строки, переставляя столбцы 4! способами, и в каждом случае можно менять порядок оставшихся элементов первого столбца, переставляя 3! способами строки 2–4. Окончательно получим $4 \cdot 3! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576$ расстановок. (*Д. Козырев*)

14.6′ (выпуск 23). Условие. Многочлен $P(x, y)$ от двух переменных принимает только положительные значения. Может ли он принимать все положительные значения? (*Фольклор*)

Ответ: может.

Решение. Пусть $P(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2$. Тогда $P(x, y) > 0$, так как оба слагаемых неотрицательны и не могут быть равны нулю одновременно. С другой стороны, для любого положительного числа a возьмём $x = \sqrt{a}$, $y = 1/\sqrt{a}$, и тогда $P(x, y) = a$. (*В. О. Бугаенко*)

14.11. Условие. Известно, что если зафиксировать одну переменную, то функция $f(x, y)$ по другой будет многочленом. Верно ли, что она будет сама многочленом от двух переменных? (*Б. П. Панеях*)

Ответ: да, верно.

Решение.

Лемма 1. *Если последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$, степени которых ограничены в совокупности, поточечно сходится на прямой к некоторой функции $f(x)$, то эта функция — многочлен.*

Доказательство. Пусть $\max(\deg P_n) = N-1$. Применив интерполяционную формулу Лагранжа к точкам $1, 2, \ldots, N$, получим для любого x и для всех натуральных n:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{N} P_n(i) R_i(x), \quad \text{где} \quad R_i(x) = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{N} \frac{x-j}{i-j}.$$

Тогда

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sum_{i=1}^{N} R_i(x) \lim_{n\to\infty} P_n(i) = \sum_{i=1}^{N} f(i) R_i(x),$$

т. е. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Пусть все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны, причём*

$$\begin{cases} a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \ldots + x_1^n a_n = y_1, \\ a_0 + x_2 a_1 + x_2^2 a_2 + \ldots + x_2^n a_n = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + x_{n+1} a_1 + x_{n+1}^2 a_2 + \ldots + x_{n+1}^n a_n = y_{n+1}. \end{cases}$$

Тогда эта система уравнений относительно $\{a_i\}$ имеет единственное решение, причём a_i представимы в виде линейных комбинаций величин $y_1, y_2, \ldots, y_n$, коэффициенты которых — рациональные функции от x_i.

Доказательство. Рассмотрим (единственный) интерполяционный многочлен Лагранжа, график которого проходит через точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\ldots$, (x_n, y_n). Согласно системе уравнений из условия, его коэффициенты равны $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Из явной формулы интерполяционного многочлена Лагранжа следует утверждение леммы.

Можно также воспользоваться тем, что определитель системы — это определитель Вандермонда, который отличен от нуля, поэтому решение системы единственно. □

Пусть функция $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такова, что $g(x_0, y) \in \mathbb{R}[y]$ при любом $x_0 \in \mathbb{R}$ и $g(x, y_0) \in \mathbb{R}[x]$ при любом y_0, принадлежащем некоторому отрезку $[a; b]$. Положим $F(x, y) := \partial g(x, y)/\partial y$. Очевидно, $F(x_0, y) \in \mathbb{R}[y]$ при всех $x_0 \in \mathbb{R}$.

Лемма 3. *Существует такой отрезок* $[c;d]\subset[a;b]$, *что* $F(x,y_0)\in\mathbb{R}[x]$ *при любом* $y_0\in[c;d]$.

Доказательство. Положим

$$M_k=\{y_0\mid y_0\in[a;b],\deg_x(g(x,y_0))\leqslant k\}.$$

Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k=[a;b]$. Применим теорему Бэра: полное метрическое пространство не может быть представлено в виде счётного объединения нигде не плотных множеств. Получаем, что некоторое M_k плотно на некотором отрезке $[c;d]\subset[a;b]$. Пусть $y_0\in[c;d]$. При любом $x\in\mathbb{R}$ имеем

$$F(x,y_0)=\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=y_0}=\lim_{z\to y_0}\frac{g(x,z)-g(x,y_0)}{z-y_0}.$$

Так как M_k всюду плотно на $[c;d]$, то существует последовательность его элементов $\{z_m\}$, сходящаяся к y_0. Выражение

$$\frac{g(x,z_m)-g(x,y_0)}{z_m-y_0}$$

при любом m обозначает многочлен. По построению M_k множество степеней этих многочленов ограниченно. Как мы показали выше, они поточечно сходятся к $F(x,y_0)$. По лемме 1 получаем $F(x,y_0)\in\mathbb{R}[x]$, что и требовалось доказать. □

Продолжим решение исходной задачи. Пусть $f(x,y)$ удовлетворяет условию задачи. Положим $L_K=\{x_0\mid\deg_y(f(x_0,y))\leqslant K\}$. Так как L_K в совокупности покрывают $\mathbb{R}$, некоторое L_K бесконечно. Пусть $a_0=0$, $b_0=1$, $W_k(x,y)=\partial^k f(x;y)/\partial y^k$. Так как $f(x_0,y)\in\mathbb{R}[y]$, имеем $W_k(x_0,y)\in\mathbb{R}[y]$ при всех k. По лемме 3 имеем $W_1(x,y_0)\in\mathbb{R}[x]$ для всех y_0 из некоторого отрезка $[a_1;b_1]\subset[a_0;b_0]$. Аналогично $W_2(x,y_0)\in\mathbb{R}[x]$ для всех y_0 из некоторого отрезка $[a_2;b_2]\subset[a_1;b_1]$, и т. д.

Возьмём произвольное $y_0\in[a_{K+1};b_{K+1}]$. По построению $W_{K+1}(x,y_0)\in\in\mathbb{R}[x]$. С другой стороны, для любого $x_0\in L_K$ имеем $\deg(f(x_0,y))\leqslant K$, откуда $W_{K+1}(x_0,y)=0$ при любом y. Так как L_K бесконечно, найдётся бесконечно много таких x_0, что $W_{K+1}(x_0,y_0)=0$. Значит, многочлен $W_{K+1}(x,y_0)$ тождественно равен нулю. Но y_0 — произвольная точка из $[a_{K+1};b_{K+1}]$. Поэтому для любого $x\in\mathbb{R}$ многочлен $W_{K+1}(x,y)$ тождественно равен нулю на $[a_{K+1};b_{K+1}]$ и, следовательно, тождественно равен нулю на $\mathbb{R}$. Таким образом, для любого $x\in\mathbb{R}$ имеем $\partial^{K+1}f(x;y)/\partial y^{K+1}\equiv 0$ на $\mathbb{R}$ и потому степень многочлена $f(x,y)$ по y не превосходит K. Тогда можно записать

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{K}a_i(y)x^i,$$

и выполнена система уравнений

$$\begin{cases} a_0(y)+a_1(y)+a_2(y)+\ldots+a_K(y)=f(1,y)\in\mathbb{R}[y], \\ a_0(y)+2a_1(y)+4a_2(y)+\ldots+2^K a_K(y)=f(2,y)\in\mathbb{R}[y], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0(y)+(K+1)a_1(y)+(K+1)^2a_2(y)+\ldots+(K+1)^K a_K(y)= \\ \hfill =f(K+1,y)\in\mathbb{R}[y]. \end{cases}$$

По лемме 2 каждое $a_i(y)$ представимо в виде линейной комбинации функций $f(1,y)$, $f(2,y)$, $\ldots$, $f(K+1,y)\in\mathbb{R}[y]$. Значит, $a_i(y)\in\mathbb{R}[y]$ для всех i. А так как

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{N}a_i(y)x^i,$$

получаем, что $f(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Для функций, совпадающих с многочленами в рациональных точках, утверждение задачи, вообще говоря, неверно:

Утверждение. *Существует такая аналитическая функция* $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, *что* $g(x_0,y)\in\mathbb{R}[y]$, $g(x,y_0)\in\mathbb{R}[x]$ *при всех* $x_0, y_0\in\mathbb{Q}$, *но* $g(x,y)\notin\mathbb{R}[x,y]$.

Доказательство. Пусть $z_1, z_2, \ldots$ — нумерация всех рациональных чисел. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует такое $k_n\in\mathbb{N}$, что $|z_j|/k_n\leqslant 1$ при всех $j\leqslant n$. Рассмотрим функцию

$$g(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{(x-z_j)(y-z_j)}{n!k_n^2}.$$

Покажем, что данный ряд сходится абсолютно на всей плоскости. Действительно, при всех $n\in\mathbb{N}$, $x, y\in\mathbb{R}$

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{|(x-z_j)(y-z_j)|}{n!k_n^2}\leqslant\prod_{j=1}^{n}\frac{|xy|+|xz_j|+|z_jy|+|z_j^2|}{n!k_n^2}\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{j=1}^{n}\frac{|xy|+|x|+|y|+|1|}{n!}=\frac{(|xy|+|x|+|y|+|1|)^n}{(n!)^n}.$$

Значит,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{(x-z_j)(y-z_j)}{n!k_n^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|xy|+|x|+|y|+|1|)^n}{(n!)^n}.$$

Ряд в правой части очевидно сходится. Следовательно, функция $g(x,y)$ определена корректно и является аналитической.

Для любых $i, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant i$ имеем

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{|(z_i - z_j)(y - z_j)|}{n! k_n^2} = 0,$$

поэтому $g(z_i, y) \in \mathbb{R}[y]$. Аналогично $g(x, z_i) \in \mathbb{R}[x]$. С другой стороны, для любого натурального N имеем

$$\deg_x(g(x, z_{N+2})) = N + 1 > N.$$

Следовательно, $g \notin \mathbb{R}[x, y]$. □

(*И. Украинцев, ученик 11 класса школы № 57 г. Москвы*)

15.9. Условие. а) Дана 2×2-матрица A с вещественными коэффициентами. Докажите, что её можно представить как сумму квадратов двух матриц второго порядка с вещественными коэффициентами.

(*SEEMOUS 2010*)

б)* Можно ли матрицу размера $n \times n$ с вещественными коэффициентами представить в виде суммы квадратов нескольких матриц размера $n \times n$ с вещественными коэффициентами? Если «да», то каково минимальное число квадратов? (*О. Ливнэ Бар-Он, Ш. Кармиели*)

а) Решение. Любую вещественную 2×2-матрицу можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & l \end{pmatrix},$$

где k и l положительны. Матрицы первого вида находятся в естественном соответствии с комплексными числами, сохраняющем умножение. Из комплексного числа всегда извлекается квадратный корень, поэтому он извлекается из первой матрицы. Квадратный корень из второй матрицы равен

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k} & \dfrac{m}{\sqrt{k} + \sqrt{l}} \\ 0 & \sqrt{l} \end{pmatrix}.$$

(*О. Ливнэ Бар-Он, Ш. Кармиели*)

б) Ответ: при $n = 1$ указанное представление не всегда возможно (отрицательное число непредставимо как сумма квадратов).

Для остальных нечётных n: необходимы три квадрата.

Для чётных n: необходимы два квадрата.

Решение. Пусть n чётно.

Лемма. *В некоторой ε-окрестности единичной матрицы квадратный корень извлекается.*

Доказательство. Применим формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^{1/2} = f_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1, поэтому для матрицы с нормой, меньшей 1, ряд сходится. Непосредственно проверяется, что $(f_{1/2}(x))^2 = 1 + x$, и аналогичное верно для матриц, когда ряд сходится (поскольку степени матрицы коммутируют). Лемма доказана. $\square$

Обозначим через m максимум абсолютных величин элементов матрицы A. Пусть M таково, что $1/M^2 < \varepsilon/m$. Положим $A = D + (-M^2E)$, где E — единичная матрица. Тогда $D = M^2(E + A/M^2)$. Но $E + A/M^2$ находится в ε-окрестности единичной матрицы, и согласно лемме из неё извлекается квадратный корень, а тогда он извлекается и из D.

Второе слагаемое, $-M^2I$, также является квадратом, так как в чётных размерностях квадратом является $-E$ (при $n = 2$ это поворот на $90°$, а в высших размерностях используем разбиение на двумерные блоки). Таким образом, любую 2×2-матрицу можно разложить в сумму двух квадратов. Квадратом является не каждая такая матрица (матрицы с отрицательным определителем квадратами не являются).

Пусть теперь n нечётно. Докажем, что $-E$ не является суммой двух квадратов, так что иногда нужно не меньше трёх, и построим разложение произвольной матрицы на три квадрата.

Разложение строится аналогично чётному случаю. Пусть V — диагональная матрица, причём в правом нижнем углу стоит 1, а остальные диагональные элементы равны -9. Далее, пусть U — диагональная матрица, в левом верхнем углу которой стоит 1, а остальные диагональные элементы равны -9. У этих матриц есть квадратный корень: возьмём диагональную матрицу размерности на 1 меньше, у которой на диагонали стоит -1, извлечём из неё квадратный корень, умножим на 3 и добавим единичную 1×1-матрицу.

Любую $n \times n$-матрицу A можно представить в виде $A = MV + MU + W$ с любым достаточно большим положительным M. Но если M достаточно велико, то W/M близко к диагональной матрице, у которой на концах диагонали стоит 8, а остальные диагональные элементы равны 18. Согласно лемме из неё извлекается квадратный корень. Искомое разложение построено.

Осталось доказать, что $-E$ не является суммой двух квадратов. Пусть $E = A^2 + B^2$, где A, B — вещественные матрицы. Выберем базис над полем комплексных чисел, в котором матрица A верхнетреугольная. Тогда

A^2 и $B^2 = -E - A^2$ тоже верхнетреугольные. На главной диагонали этих матриц стоят квадраты собственных значений матриц A и B. Получаем систему уравнений: $a_k^2 + b_k^2 = -1$.

Так как многочлен нечётной степени имеет нечётное количество вещественных корней (с учётом кратности), то среди a_k нечётное количество вещественных, а остальные разбиваются на пары комплексно сопряжённых. То же верно для b_k. Но если a_k вещественное, то $a_k^2 \geqslant 0$, тогда $b_k^2 \leqslant -1$, т. е. b_k не является вещественным. Оно комплексно сопряжено некоторому b_j, тогда $a_j^2 \geqslant 0$ и a_j вещественное. Таким образом, вещественные собственные значения матрицы A разбиваются на пары, что невозможно, так как их количество нечётно. Получено противоречие, что и требовалось. (*О. Ливнэ Бар-Он, Ш. Кармиели*)

16.5. Условие. Двумерная фигура в четырёхмерном пространстве имеет площадь S. Её проекция на плоскость первых двух координатных осей имеет площадь S_1, а проекция на плоскость последних двух осей имеет площадь S_2. Докажите, что $S \geqslant S_1 + S_2$. (*Фольклор*)

Решение. Измеримая фигура на двумерной поверхности может быть аппроксимирована прямоугольниками, и то же верно для её проекций на координатные плоскости. Поэтому достаточно доказать неравенство для прямоугольника. Пусть он задан векторами $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ и $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Тогда

$$S = |u| \cdot |v|, \quad \pm S_1 = u_1v_2 - u_2v_1, \quad \pm S_2 = u_3v_4 - u_4v_3.$$

Положим $u^* = (\pm u_2, \pm u_1, \pm u_4, \pm u_3)$, где знаки выбраны таким образом, что $S_1 + S_2$ равно скалярному произведению $\langle u^*, v\rangle$. Поскольку

$$\langle u^*, v\rangle \leqslant |u^*| \cdot |v| = |u| \cdot |v| = S,$$

получаем нужное неравенство. (*Л. Радзивиловский*)

19.6. Условие. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — иррациональное число, β — произвольное число из интервала $(0; 1)$, а Q_M — минимум дробной части $N \cdot \alpha$, где $N < M$ — целое. Аналогично R_M есть минимум дробной части $\beta - N \cdot \alpha$. Докажите, что $Q_M > R_M$ при бесконечно многих M. (*С. В. Конягин*)

Первое решение. Нам нужно доказать, что для любого натурального числа N найдётся такой номер $n > N$, что $Q_n > R_n$. Если $R_N = 0$, то $R_n = 0 < Q_n$ при всех $n > N$. Пусть $R_N > 0$. В силу иррациональности α любой интервал $(a; b) \subset (0; 1)$ содержит бесконечно много чисел $\{n\alpha\}$. В частности, существуют такие натуральные числа n, что

$$\max(0, \beta - R_N) < \{n\alpha\} < \beta, \quad \text{т. е.} \quad \{\beta - n\alpha\} < \min(\beta, R_N).$$

Среди таких чисел n выберем минимальное n_0. Число n_0 удовлетворяет условиям

$$\{\beta - n_0\alpha\} < \min(\beta, R_N) \leqslant \{\beta - n\alpha\}$$

при любом $n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$. Заметим, что $n_0 > N$, так как в противном случае по определению R_N выполнялось бы неравенство $R_N \leqslant \{\beta - n_0\alpha\}$.

Если $R_{n_0} < Q_{n_0}$, то искомое $n = n_0$ найдено. Допустим, что $R_{n_0} \geqslant Q_{n_0} = \{m\alpha\}$, $1 \leqslant m \leqslant n_0$. Тогда выполняются соотношения

$$R_{n_0+m} \leqslant \{\beta - (n_0 + m)\alpha\} = R_{n_0} - Q_{n_0}, \qquad (*)$$

$$Q_{n_0+m} = Q_{n_0} = \{m\alpha\}. \qquad (**)$$

Действительно, неравенство $(*)$ вытекает из того, что

$$\{\beta - (n_0 + m)\alpha\} = \{\{\beta - n_0\alpha\} - \{m\alpha\}\} = \{R_{n_0} - Q_{n_0}\} = R_{n_0} - Q_{n_0}.$$

Допустим, что равенство $(**)$ не выполнено, т. е. $\{k\alpha\} < Q_{n_0}$ при некотором $k = \{n_0 + 1, \ldots, n_0 + m\}$. Тогда $0 \leqslant n_0 + m - k < n_0$ и

$$\{\beta - (n_0 + m - k)\alpha\} \leqslant \{\beta - (n_0 + m)\alpha\} + \{k\alpha\} = R_{n_0} - Q_{n_0} + \{k\alpha\} < R_{n_0},$$

но это противоречит выбору n_0. Положим $n_1 = n_0 + m$. Если $R_{n_1} < Q_{n_1}$, то остаётся взять $n = n_1$. Если же $R_{n_1} \geqslant Q_{n_1}$, то мы можем подставить в $(*)$ и $(**)$ n_1 вместо n_0. Далее положим $n_2 = n_1 + m = n_0 + 2m$ и т. д.

При некотором k имеем $R_{n_k} < Q_{n_k}$, так как если при всех k будет $R_{n_k} \geqslant Q_{n_k}$, то, подставляя в $(*)$ и $(**)$ вместо n_0 последовательно $n_1, n_2, \ldots$, мы получим

$$Q_{n_0} = Q_{n_0+m} = Q_{n_0+2m} = \ldots,$$

$$R_{n_0+km} \leqslant R_{n_0} - kQ_{n_0}. \qquad (***)$$

Но при больших k правая часть $(***)$ меньше нуля. Это противоречие завершает доказательство.

(*По кн.: В. А. Садовничий, А. А. Григорян, С. В. Конягин. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ, 1987. С. 288*)

Второе решение. Пусть по окружности единичной длины с отмеченной точкой β, начиная из нулевой точки движется Кентавр, длина его прыжка α. Нужно показать, что наилучшее приближение к нулевой точке после n прыжков оказывается лучше, чем к точке β, при бесконечно многих n. Если $\beta \geqslant \alpha$, то можно заменить β на $\beta' = \beta - \alpha$, при этом наилучшее приближение не ухудшится, а количество прыжков уменьшится на 1. Кроме того, можно считать, что $\alpha < 1/2$ (иначе, изменив направление прыжков, перейдём к величине $\alpha' = 1 - \alpha < 1/2$.

Итак, $0 < \beta < \alpha < 1/2$ (случаи равенств очевидны). Рассмотрим дугу $[\alpha; 2\alpha]$. Вырежем её и заклеим. При этом мы не потеряем наилучшие приближения ни к 0, ни к точке β, а количество шагов уменьшится. Мы получили движение по окружности длины $1-\alpha$ с шагом α.

Поскольку одно n, требуемое в условии задачи, очевидным образом существует, дело завершает индукция.

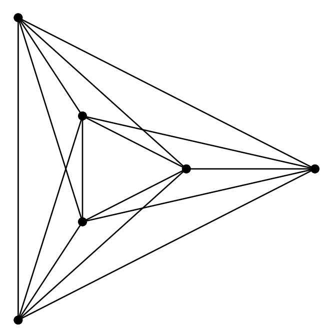
Комментарий. Описанная процедура «режем-клеим» называется *индукцией Рози*. С её помощью проще всего доказать (и понять), что цепные дроби задают наилучшие приближения. Иными словами, пусть дан единичный отрезок и отрезок длины $\alpha \leqslant 1$. Заменяем 1 на $\alpha_1 = 1 - n\alpha$, где $n = [\alpha^{-1}]$ (т. е. откладываем отрезки длины α, пока возможно), от пары $(1, \alpha)$ переходим к новой паре отрезков (α, α_1) и продолжаем ту же процедуру. Утверждается, что α_i дают наилучшие приближения целых чисел числами, кратными α. (См. также задачу 10.7 и её решение, опубликованное в данном выпуске (с. 186), где дано наглядное представление алгоритма Евклида для отрезков, отвечающее процедуре построения цепной дроби.)

(*А. Я. Канель-Белов*)

22.3. Условие. а) Для какого максимального N можно расположить N точек на плоскости, соединить их попарно отрезками и раскрасить отрезки в синий и красный цвет так, чтобы отрезки одного цвета не имели внутренних точек пересечения, а каждый отрезок имел не более одной точки пересечения с отрезком другого цвета? (*Л. Радзивиловский*)

Ответ: $N = 6$.

Решение. Задача равносильна следующей: при каких N существует полный граф на плоскости, у которого каждое ребро пересечено не более одного раза и никакие три ребра не пересекаются в общей внутренней точке. Действительно, в таком графе на каждом «перекрёстке» можно покрасить образующие его рёбра в разные цвета. Покрасив остальные рёбра произвольно в красный и синий цвет, получим граф, удовлетворяющий условию исходной задачи.



На рисунке показан пример для новой задачи с $N = 6$. Удаляя из этого графа вершины и примыкающие к ним рёбра, можно получить примеры для меньших N.

Предположим, что имеется полный граф на 7 вершинах, удовлетворяющий условию новой задачи. У него 21 ребро с X точками пересечения. Пусть O — одна из них, принадлежащая рёбрам AC и BD. Рассмотрим четырёхугольник

$ABCD$. Его стороны не пересечены. Действительно, пусть, например, какое-то ребро входит в треугольник ABO, пересекая сторону AB. Тогда оно должно выйти из треугольника через AB, AO или BO и снова пересечь ребро, которое уже пересечено (случай прохождения через вершину треугольника можно исключить малым шевелением).

Таким образом, в графе с минимальным числом пересечений вокруг каждого пересечения расположено четыре непересечённых ребра. Каждое непересечённое ребро при этом засчитывается не более двух раз, поэтому количество непересечённых рёбер не меньше $2X$. Количество пересечённых рёбер равно $2X$, поэтому $4X < 21$, откуда $X \leqslant 5$.

Рассмотрим граф, вершинами которого служат вершины исходного графа и точки пересечения, а рёбрами — непересечённые рёбра исходного графа и половинки пересечённых рёбер. Этот граф, в отличие от исходного, планарен. У него $V = 7 + X$ вершин, $E = 21 + 2X$ рёбер и $F \geqslant 2E/3$ граней. По формуле Эйлера

$$2 = F - E + V \geqslant V - \frac{E}{3} = 7 + X - \left(7 + \frac{2X}{3}\right) = \frac{X}{3},$$

откуда $6 \geqslant X$. Но выше доказано, что $X \leqslant 5$, — противоречие.

Поскольку невозможно построить искомый граф для $N = 7$, это невозможно и для $N > 7$. (*Л. Радзивиловский*)

23.7. Условие. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$ с неотрицательными коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Докажите, что все их коэффициенты равны 0 или 1, если $P(x)Q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

(*Б. И. Каневский, В. А. Сендеров*)

Решение. Коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ вещественны, поэтому для каждого корня каждого из этих многочленов найдётся комплексно сопряжённый. Но все эти корни равны 1 по абсолютной величине, поэтому можно переформулировать утверждение задачи следующим образом: если z — корень одного из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, то $1/z$ — корень того же многочлена, имеющий ту же кратность. Значит, если

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

то последовательность $\{a_j\}$ симметрична, $a_j = a_{m-j}$; аналогично: если

$$Q(x) = b_n x^k + \ldots + b_1 x + b_0,$$

то $b_j = b_{k-j}$. Разумеется, здесь $m + k = n$.

Мы хотим доказать, что все коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны 0 или 1. Предположим противное. Эти коэффициенты не могут быть больше единицы: если $a_j > 1$, то коэффициент при x^{k+j} многочлена

$P \cdot Q$ равен a_j плюс неотрицательное число, но он должен быть равен 1. Отметим, что $a_0 = 1 = b_0$, поскольку эти коэффициенты не превосходят 1, неотрицательны и их произведение равно 1.

Выберем наименьшее t, при котором x^t в одном из многочленов имеет коэффициент, отличный от 0 и 1; без ограничения общности можно считать, что это происходит в $P(x)$. Тогда все коэффициенты при меньших степенях в P и Q равны 0 или 1; это $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}$ и $b_0, b_1, \ldots, b_{t-1}$.

Рассмотрим коэффициент при x^t в $P \cdot Q$ (равный 1, как и все коэффициенты этого произведения); он равен $1 \cdot a_t + b_t \cdot 1 +$ произведения нулей и единиц. Так как $a_t > 0$, получаем $b_t = 1 - a_t$, откуда $0 < b_t < 1$. По симметрии $b_{k-t} = b_t$, откуда $0 < b_{k-t} < 1$.

Теперь рассмотрим коэффициент при x^k в $P \cdot Q$, также равный 1. Его слагаемыми являются $b_k a_0 = 1$, строго положительное $b_{k-t} a_t$ и неотрицательные слагаемые. Противоречие. (*Л. Радзивиловский*)

23.9. Условие. Пусть α, β — положительные числа. Рассмотрим такую симметрическую матрицу (a_{ij}), что

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+\alpha} \cdot \frac{1}{i+j+\beta}.$$

Докажите, что эта матрица положительно определена. (*А. А. Логунов*)

Решение. Рассмотрим меру $\dfrac{dx}{x^{1-\alpha}} \cdot \dfrac{dy}{y^{1-\beta}}$ на единичном квадрате $[0; 1]^2$. При положительных α и β

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}} \cdot \frac{dy}{y^{1-\beta}} = \alpha x^{\alpha}\Big|_0^1 \cdot \beta y^{\beta}\Big|_0^1 = \alpha\beta.$$

Поэтому любая функция, непрерывная на единичном квадрате и, следовательно, ограниченная, будет интегрируемой по этой мере. Значит, для многочленов можно определить скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \cdot g(x,y) \frac{dx}{x^{1-\alpha}} \cdot \frac{dy}{y^{1-\beta}}.$$

Оно положительно определено, поскольку ненулевой многочлен не может быть тождественным нулём на квадрате. Пусть $p_i(x,y) = x^i y^i$ при $i = 1, \ldots, n$. Эти многочлены линейно независимы. При этом

$$\langle p_i, p_j \rangle = \int_0^1 \int_0^1 x^{i+j} \cdot y^{i+j} \frac{dx}{x^{1-\alpha}} \cdot \frac{dy}{y^{1-\beta}} = \frac{1}{i+j+\alpha} \cdot \frac{1}{i+j+\beta},$$

а это в точности элементы исходной матрицы. Таким образом, это матрица скалярного произведения, и потому она положительно определена.

(*Л. Радзивиловский*)

О решении задачи 15.1

В «Математическом просвещении», вып. 23, опубликовано решение задачи 15.1. К сожалению, в пп. в) и г) и в упражнении 6 б) допущены погрешности, которые не влияют на ход рассуждений, но меняют ответ[2]. Выражаем благодарность нашим читателям С. М. Лавренову и М. Б. Севрюку, заметившим эти погрешности. Ниже публикуем их письма.

В 23-м выпуске «Математического просвещения» на с. 226 приведена задача 15.1в:

Что больше: $\sqrt[3]{60}$ *или* $2+\sqrt[3]{7}$?

Задача имеет «простое» решение:

$$\sqrt[3]{60} > \frac{90}{23}, \qquad \text{так как } 60\cdot 23^3 - 90^3 = 1020 > 0.$$

$$\frac{90}{23} > 2+\sqrt[3]{7}, \quad \text{так как } (90-2\cdot 23)^3 - 23^3\cdot 7 = 15 > 0.$$

Ответ: $\sqrt[3]{60} > 2+\sqrt[3]{7}$.

Ответ на с. 227 неверный!

На с. 227 предлагается решение:

Заметим, что $\sqrt[3]{60} = 4\sqrt[3]{1-1/16}$ и $2+\sqrt[3]{7} = 2+2\sqrt[3]{1-1/8}$.

Разлагая оба выражения в ряд, имеем, что первые два главных члена совпадают, а третий член уже оказывается существенно больше у второго выражения (перед этим членом стоит знак «плюс») и это различие не может быть скомпенсировано остальными членами.

Попробуем аккуратно реализовать это решение.

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}, \quad f'(x) = \frac{1}{3(1+x)^{2/3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9(1+x)^{5/3}}.$$

$$f(x) = 1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2!}f'(\theta(x)x)x^2 = 1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{9(1+\theta(x)x)^{5/3}}\right)x^2,$$

$$0<\theta(x)<1.$$

Остаточный член представлен в форме Лагранжа. Далее,

$$\sqrt[3]{60} = 4\sqrt[3]{1-\frac{1}{16}} = 4\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9(1-\theta_1/16)^{5/3}}\right)\frac{1}{16^2}\right) =$$

$$= 4-\frac{1}{12}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{(1-\theta_1/16)^{5/3}}, \quad \text{где } \theta_1 = \theta\left(\frac{1}{16}\right),$$

[2] См. список опечаток в конце выпуска.

$$2+\sqrt[3]{7}=2+2\sqrt[3]{1-\frac{1}{8}}=2+2\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9(1-\theta_2/8)^{5/3}}\right)\frac{1}{8^2}\right)=$$
$$=4-\frac{1}{12}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{(1-\theta_2/8)^{5/3}},\quad \text{где } \theta_2=\theta\left(\frac{1}{8}\right).$$

Итак, первые два члена ряда действительно совпадают, но перед третьим членом стоит знак «минус», а не «плюс»!

Докажем, что

$$-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{(1-\theta_1/16)^{5/3}}>-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{(1-\theta_2/8)^{5/3}}.$$

После преобразований получаем

$$\left(1-\frac{\theta_2}{8}\right)^{5/3}<2\left(1-\frac{\theta_1}{16}\right)^{5/3}.$$

Возведём обе части в степень $3/5$ и получим после преобразований

$$\sqrt[5]{8}\cdot\theta_2-\sqrt[5]{32}\cdot\theta_1<16(\sqrt[5]{8}-1).$$

Заметим, что

$$\sqrt[5]{8}\cdot\theta_2-\sqrt[5]{32}\cdot\theta_1<\sqrt[5]{8}\cdot 1-\sqrt[5]{32}\cdot 0=\sqrt[5]{8}.$$

Но $\sqrt[5]{8}<16(\sqrt[5]{8}-1)$ (так как $15\sqrt[5]{8}>16 \iff 6\,075\,000>1\,048\,576$). Неравенство доказано.

Впрочем, неравенство $15\sqrt[5]{8}>16$ можно доказать быстрее:

$$15\sqrt[5]{8}>16 \quad\iff\quad \sqrt[5]{8}>\frac{16}{15} \quad\iff\quad 8>\left(1+\frac{1}{15}\right)^5.$$

Заметим, что $8>e>(1+1/15)^{15}>(1+1/15)^5$, что и требовалось.

В упражнении 6(б) ошибка в знаке неравенства. На самом деле

$$\sqrt[3]{413}=7{,}447\ldots>7{,}442\ldots=6+\sqrt[3]{3}.$$

Сергей Михайлович Лавренов,
ИПМ им. М. В. Келдыша, `lasemi@mail.ru`

В последнем выпуске 23 сборника «Математическое просвещение» (третья серия, 2019) допущена неаккуратность в решении задачи В. И. Арнольда 15.1.г) на с. 227. Приведённый в сборнике ответ

$$\int_0^{2\pi}\sin^{100}x\,dx\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \text{с погрешностью } \leqslant 20\,\%$$

неверен, правильный ответ

$$\int_0^{2\pi} \sin^{100} x\,dx \approx \frac{1}{2}$$

(кстати, сам В. И. Арнольд в статье «Математический тривиум» // УМН, 1991, т. 46, вып. 1, с. 225–232 на с. 226 говорил о точности в 10 %).

Действительно, как справедливо пишет автор решения А. Я. Белов,

$$\int_0^{2\pi} \sin^{100} x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^{100} x\,dx \approx 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-50x^2}\,dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{50}}. \tag{1}$$

Заменяя $\pi = 3{,}14159\ldots$ приближённым значением $25/8 = 3{,}125$, получаем $1/2$. (При публикации здесь была допущена арифметическая ошибка.)

В этой задаче есть дополнительный нюанс: все интегралы

$$A_n = \int_0^{2\pi} |\sin^n x|\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

можно очень просто вычислить *точно*, причём без явного использования напрашивающегося здесь аппарата бета- и гамма-функций. Действительно, при $n \geqslant 2$ имеем

$$A_n = -4\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(\cos x) = 4\int_0^{\pi/2} \cos x\,d(\sin^{n-1} x) =$$

$$= 4(n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)(A_{n-2} - A_n),$$

так что

$$A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}, \quad n \geqslant 2. \tag{2}$$

Так как $A_0 = 2\pi$ и $A_1 = 4$, то при $k \geqslant 0$

$$A_{2k} = 2\pi\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \quad A_{2k+1} = 4\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Подчеркнём, что это *точные* равенства. Теперь

$$A_{100} = 2\pi\frac{99!!}{100!!} = 2\pi\frac{100!}{(100!!)^2} = 2\pi\frac{100!}{(2^{50}\,50!)^2},$$

и по формуле Стирлинга

$$A_{100} \approx 2\pi\sqrt{200\pi}\left(\frac{100}{e}\right)^{100}\frac{1}{100\pi\cdot 2^{100}}\left(\frac{e}{50}\right)^{100} = \frac{\sqrt{2\pi}}{5},$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с прежним значением (1).

Арнольд почти наверняка имел в виду решение Белова (идея замены $\cos x$ на $e^{-x^2/2}$ в окрестности нуля применима к целому классу интегралов), а не изложенное выше альтернативное решение, опирающееся на соотношение (2).

Прямое компьютерное вычисление даёт

$$A_{100} = 2\pi \prod_{k=1}^{50} \frac{2k-1}{2k} = 0{,}5000739\ldots,$$

так что 1/2 приближает A_{100} с погрешностью всего 0,015 %! Интересно, что 25/8 приближает π с погрешностью 0,53 %.

Михаил Борисович Севрюк,
Институт энергетических проблем
химической физики РАН им. В. Л. Тальрозе,
2421584@mail.ru, sevryuk@mccme.ru