Геометрия: классика и современность

Доказательство гипотезы Пуанкаре (по работам Г. Перельмана)

Л. Бессьер, Ж. Бессон, М. Буало

Гипотеза, изначально сформулированная как чисто топологическая, сопротивлялась атакам топологов в течение ста лет, чтобы сдаться геометрам. Программа исследований, начатая Ричардом Гамильтоном в 1982 году и завершённая Григорием Перельманом в 2003 году, основывается на понятии потока кривизны Риччи — уравнения эволюции, которое стремится сделать метрику однородной.

§ 1. Введение

Топология поверхностей была хорошо изучена уже к концу XIX века. Всякая ориентируемая поверхность без края может быть описана топологически как граница некоторого кренделя. Количество дырок в этом кренделе равно максимальному числу непересекающихся замкнутых кривых, которые можно провести на этой поверхности так, чтобы в результате она не распалась на части; это число, называемое родом, даёт полную классификацию поверхностей. Таким образом, самая простая поверхность с топологической точки зрения — это сфера $S^2 \subset \mathbb{R}^3$; она является границей шара радиуса 1, и любая проведённая на ней замкнутая кривая разбивает её на части.

Bessières L., Besson G., Boileau M. La preuve de la conjecture de Poincaré d'après G. Perelman // Images des mathématiques. CNRS. Le 15 octobre 2006.

Перевод с французского Е. Ю. Смирнова.

Аналогичное исследование гиперповерхностей (или многообразий) без края в более высоких размерностях было начато несколько позже, а именно в 1895 году, в заметке Анри Пуанкаре *Analysis Situs* [13], которая ознаменовала рождение современной алгебраической топологии.

В 1904 году в пятом и последнем дополнении к *Analysis Situs* [13] Пуанкаре построил пример, показывающий, что в размерности 3 единичная сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ не может быть охарактеризована тем свойством, что всякая вложенная в неё поверхность разделяет её на части; для этого требуется задействовать более тонкие топологические понятия. Чтобы отличить построенное им трёхмерное пространство от сферы S^3, Пуанкаре использует понятие *фундаментальной группы*. Это алгебраический инвариант, который был введён ещё в первой заметке *Analysis Situs*; в его определении участвуют замкнутые пути (петли) в данном пространстве, которые не могут быть стянуты в точку посредством какой-либо непрерывной деформации (такие петли называются *существенными*). Если существенных петель нет, то фундаментальная группа тривиальна; в таких случаях говорят, что пространство *односвязно*[1]. Таковы, например, все сферы S^n размерности $n \geqslant 2$. Пуанкаре показывает, что построенное им пространство не односвязно.

В конце своей статьи он формулирует следующий вопрос[2], впоследствии ставший знаменитым: «Возможно ли, чтобы фундаментальная группа трёхмерного многообразия V была тривиальной и при этом многообразие V не являлось сферой?»

Предположение о том, что всякое односвязное многообразие размерности 3 есть сфера S^3, известно как *гипотеза Пуанкаре*. Доказательство этой гипотезы оказалось крайне сложной задачей. Она допускает естественное обобщение — *гипотезу о геометризации*, сформулированную Уильямом Тёрстоном в 1970-х годах для описания всех многообразий размерности 3.

Тёрстон [15] предположил, что восьми однородных геометрий достаточно для описания элементарных «кирпичиков», из которых строятся все многообразия размерности 3 (см. также [14]). При этом в центр исследований многообразий размерности 3 гипотеза геометризации поставила методы дифференциальной геометрии.

В начале восьмидесятых годов Ричард Гамильтон сформулировал новую программу исследований для доказательства гипотезы геометризации и,

---

[1] Это современная терминология. Пуанкаре использовал термин «односвязное» при обозначении сферы.

[2] Здесь Пуанкаре использует термин *односвязное пространство*.

в частности, гипотезы Пуанкаре. Его подход был основан на понятии потоков Риччи: в пространстве римановых метрик на рассматриваемом многообразии исследуется поведение решений некоторого дифференциального уравнения, связанного с кривизной (поток Риччи). При эволюции потока Риччи метрика стремится к однородной, однако же распределение кривизны не является однородным: за конечное время кривизна может «накапливаться» и становиться бесконечной в некоторых точках многообразия. С этими явлениями, которые называются особенностями потока Риччи, Гамильтону не удалось полностью разобраться.

Недавно[3] Григорий Перельман определил для потока Риччи монотонную функцию, называемую *энтропией*, которая позволила ему описать, каким образом возникают эти особенности, и классифицировать их. При этом ему удалось сделать решающий шаг в завершении программы Гамильтона. Начав с потока Риччи, он построил *поток с хирургией*, позволяющий избавиться от особенностей. Далее мы расскажем о доказательстве гипотезы Пуанкаре, которое было предложено Перельманом.

§ 2. Поток, ассоциированный с кривизной Риччи

Будем искать процесс типа эволюции, который приводил бы к некоторой выделенной римановой метрике на данном дифференцируемом многообразии M (см. определение 1). Мы хотим, чтобы у этой метрики была постоянная кривизна Риччи; такие метрики называются эйнштейновыми.

Поток, ассоциированный с кривизной Риччи (см. определение 1), — это дифференциальное уравнение на (бесконечномерном) пространстве $\mathscr{M}$ римановых метрик на многообразии M. В идеале хотелось бы, чтобы это обыкновенное дифференциальное уравнение использовало градиент некоторой функции, взятый со знаком «минус» (чтобы его траектории сходились к минимумам). Естественным кандидатом на эту роль является функция, которую в физике называют функционалом Гильберта — Эйнштейна. Это интеграл от кривизны (скалярная кривизна); критическими точками этой функции являются эйнштейновы метрики, т. е. такие метрики, для которых[4] $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$. К сожалению, простое вычисление показывает, что градиент этой функции даёт уравнение, которое в общем случае не имеет решений. Однако оказывается, что для наших целей годится некоторая модификация этого уравнения. Назовём потоком

[3] Статья опубликована в 2006 г. — *Прим. перев.*

[4] Обозначения см. на с. 57. — *Прим. перев.*

Риччи семейство $g(t)$ римановых метрик на M, определённое на $[0;T)$ и удовлетворяющее следующему уравнению эволюции (см. пример 2):

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}. \tag{1}$$

Определение 1

Дифференцируемое многообразие размерности n — это пространство, которое локально выглядит как стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$: у каждой точки имеется открытая окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$, которая называется *картой*, причём переход от одной карты к другой задаётся диффеоморфизмом класса C^∞ (см. рис. 1). В размерности 3 дифференцируемая структура единственна с точностью до диффеоморфизма, тогда как пространство $\mathbb{R}^4$ можно снабдить бесконечным числом попарно не диффеоморфных дифференцируемых структур. В дальнейшем все рассматриваемые многообразия мы будем считать принадлежащими классу C^∞ и ориентируемыми.

Чтобы изучать геометрию многообразия M (например, вычислять длины кривых, расстояния, объёмы и т. д.), требуется допол-

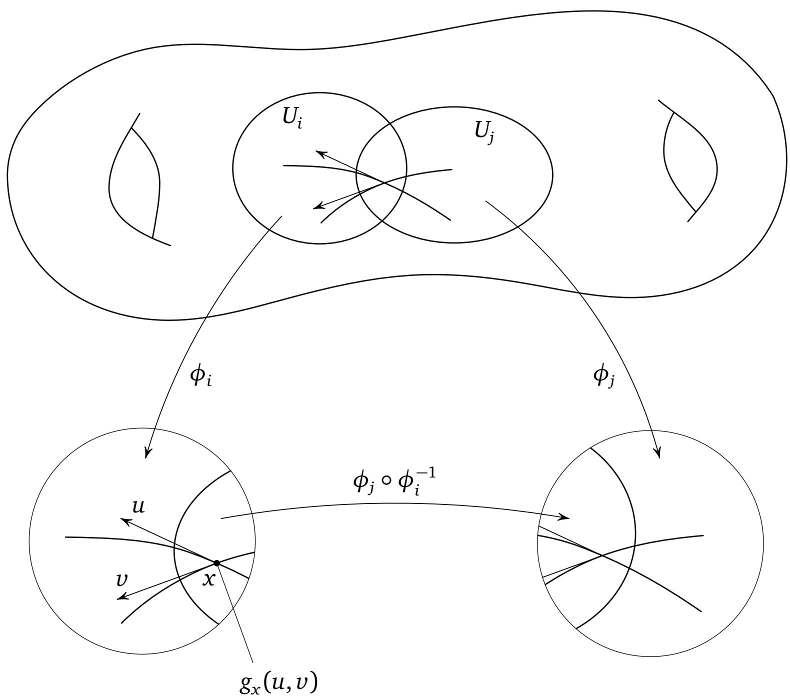

Рис. 1

нительная структура, называемая **римановой метрикой** и обозначаемая через g: в каждой точке x карты она задаёт скалярное произведение $g_i(x)$, которое изменяется от точки к точке как функция класса C^∞ и согласовано с переходом от одной карты к другой. Кривизны, ассоциированные с метрикой, измеряют её инфинитезимальное отклонение от стандартной метрики на $\mathbb{R}^n$. Они вычисляются как полиномиальные выражения от коэффициентов метрики g, ∂g и $\partial^2 g$.

Например, с каждой (двумерной) плоскостью P в касательном пространстве T_xM можно связать кривизну сечения $K(P)$, определяемую следующим образом. Обозначим через $C(r)$ круг с центром в x и радиусом r, касающийся плоскости P. Длина соответствующей окружности удовлетворяет формуле

$$\ell(C(r)) = 2\pi r\left(1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + o(r^2)\right),$$

где $K(P)$ измеряет дефект, т. е. отклонение от евклидовой длины окружности. Кривизна Риччи (называемая также тензором Риччи) задаётся в каждой точке x пространства M симметрической билинейной формой на T_xM (не обязательно положительно определённой). Её значение на векторе $v \in T_xM$, обозначаемое $\mathrm{Ric}_g(v, v)_x$, вычисляется как сумма кривизн сечений плоскостями, порождёнными векторами v и e_i, где e_i пробегает ортонормированный базис ортогонального дополнения к v в T_xM. Она характеризует дефект площади сфер малого радиуса. **Скалярная кривизна** $R(x)$ — это функция на M, определённая в каждой точке x как след кривизны Риччи $\mathrm{Ric}_g(\cdot, \cdot)_x$ относительно скалярного произведения g_x, т. е. как сумма собственных значений соответствующего оператора. Она характеризует отклонение объёма шаров малого радиуса от евклидова объёма.

Подход с применением дифференциальных уравнений, описанный выше, оказывается трудноприменимым на бесконечномерном пространстве $\mathscr{M}$. Вместо этого мы применим более эффективный подход, при котором уравнение (1) записывается в некоторой системе локальных координат, параметризующих $\mathscr{M}$. При этом (1) становится параболическим уравнением в частных производных типа *«реакция-диффузия»*.

Пример 2. На сфере решением потока Риччи является метрика $g(t) = (1-2\lambda t)g_0$ на промежутке $[0; 1/(2\lambda))$, если кривизна Риччи в исходной метрике равна $\mathrm{Ric}_{g_0} = \lambda g_0$ при $\lambda > 0$.

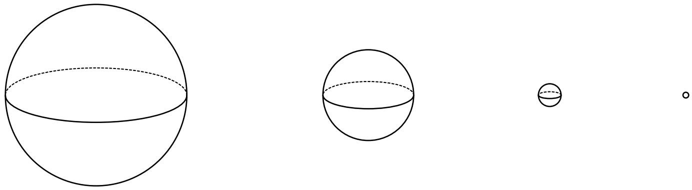

Рис. 2

Более общим образом, эволюция потока задаётся при помощи гомотетий, если начальная метрика является эйнштейновой. Метрики отрицательной кривизны при эволюции растягиваются, а метрики положительной кривизны стягиваются (см. рис. 2).

§ 3. Работы Р. Гамильтона

Гамильтон доказал [5] существование решения на малом отрезке времени для произвольных гладких начальных условий (простое доказательство см. в [4]). Затем этот поток можно продолжить, так как кривизны сечения (см. определение 1) остаются ограниченными по абсолютной величине. Чтобы оценить значения кривизн, нужно записать их уравнения эволюции и использовать принцип максимума.

Принцип максимума для кривизн

Начнём со скалярной кривизны, которая эволюционирует в соответствии с параболическим уравнением

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\operatorname{Ric}|^2, \tag{2}$$

где все величины являются функциями от $g(t)$. Во всякой точке x минимума скалярной кривизны метрики $g(t)$ лапласиан ΔR неотрицателен, следовательно, $\partial R/\partial t \geqslant 0$. Можно выдвинуть естественное предположение, что минимум скалярной кривизны метрики $g(t)$ на многообразии M (обозначим его через $R_{\min}(t)$) возрастает при росте t. Принцип максимума позволяет доказать это строго. Более того, если $R_{\min}(0) > 0$, можно доказать, что $R_{\min}(t)$ стремится к $+\infty$ за конечное время (если такой поток существует). В этом случае мы убеждаемся, что максимум кривизн сечения стремится к $+\infty$ за конечное время. Чтобы получить дополнительную информацию, используем уравнение эволюции тензора Риччи, имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial \operatorname{Ric}}{\partial t} = \Delta \operatorname{Ric} + Q(\operatorname{Ric}), \tag{3}$$

где Q — некоторое квадратичное выражение. Векторный принцип максимума показывает, что если $\mathrm{Ric}_{g_0} \geqslant 0$, то и $\mathrm{Ric}_{g(t)} \geqslant 0$. Если, кроме того, $\mathrm{Ric}_{g_0} > 0$, то это же верно и для всех t, причём во всех точках многообразия имеет место оценка

$$\frac{1}{R}\left|\,\mathrm{Ric} - \frac{R}{3}g\right| \leqslant \frac{\alpha}{R^{\beta}}, \tag{4}$$

где α и β — положительные константы. Это означает, что при стремлении $R(x,t)$ к бесконечности относительная разница в точке x между $\mathrm{Ric}_{g(t)}$ и его средним значением $\frac{R}{3}g$ стремится к нулю. При помощи оценки градиента скалярной кривизны Гамильтон доказал, что в предположении о строгой положительности кривизны Риччи она стремится на конечном промежутке времени к бесконечности с одной и той же скоростью во всех точках. Итак, если перенормировать метрику так, чтобы объём был постоянным, то $g(t)$ будет сходиться к некоторой метрике с постоянной положительной кривизной сечений, откуда получается

Теорема 3. *Если M — замкнутое риманово многообразие, на котором можно ввести метрику со строго положительной кривизной Риччи, то на M также существует метрика с постоянной и положительной кривизной сечений.*

Замечание 4. В частности, M является факторпространством сферы S^3 по конечной группе изометрий. Такое многообразие называется **сферическим**. Например, таково пространство прямых в $\mathbb{R}^4$, являющееся факторпространством сферы S^3 по отождествлению противоположных точек; при этом получается проективное пространство, обозначаемое через $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Это основополагающая теорема во всей этой теории; она является первым шагом к доказательству гипотезы Пуанкаре.

Ситуация резко меняется, если кривизна Риччи не является строго положительной. Наиболее общий результат таков: *для произвольных начальных условий поток существует на некотором максимальном промежутке $[0;T)$, и если $T<\infty$, то максимум кривизн сечений в момент времени t стремится к $+\infty$ при $t \to T$.*В последнем случае момент времени T называют *особым*. Вообще говоря, кривизна неограниченно возрастает лишь на некоторой части многообразия; при этом говорят, что поток имеет особенность. Между тем вариант предыдущих результатов, *теорема о сжатии* Гамильтона — Айви, показывает, что отрицательная часть кривизны становится пренебрежимо малой по сравнению со скалярной кривизной. Таким образом, скалярная кривизна регулирует значения всех кривизн.

Теперь скажем несколько слов об изучении особенностей.

Изучение особенностей: техника масштабирования

Эта техника, в анализе являющаяся классической, была использована в данной ситуации Гамильтоном в работах [7] и [8]. Масштабирование заключается в растяжении метрики и замедлении течения времени, которые позволяют получить новое решение уравнения потока. Будем рассматривать последовательности масштабирований и переходить по ним к пределу (см. ниже). Если доказать существование предельных потоков и классифицировать их, это даст нам всевозможные модели особенностей. Вопрос о существовании предельных потоков был одним из основных препятствий на пути к осуществлению программы Гамильтона. Этот вопрос недавно[5)] был полностью решён Перельманом.

В общем случае рассматривается последовательность масштабирований в точках (x_k, t_k), для которых $Q_k := R(x_k, t_k) \to +\infty$ и скалярная кривизна на $M \times [0; t_k]$ в которых максимальна. Тогда последовательность параболических растяжений метрик $g_k(t)$ в (x_k, t_k) имеет ограниченную кривизну на отрезках $[-t_k Q_k; 0]$, сходящихся к $(-\infty; 0]$. Подходящим условием, чтобы гарантировать сходимость последовательности $(M, g_k(t), x_k)$ (или некоторой её подпоследовательности) — в некотором смысле, который мы здесь не уточняем, — к потоку $(M_\infty, g_\infty(t), x_\infty)$, является оценка снизу на объём единичного шара с центром в x_k (в метрике $g_k(0)$) некоторой положительной константой, не зависящей от k. Первый из замечательных результатов Перельмана [10] состоит в том, что эта оценка всегда выполнена, если кривизна стремится к бесконечности за конечное время. По построению, полученный предел является потоком на $(-\infty; 0]$ ограниченной и при этом ненулевой кривизны. Более того, теорема Гамильтона — Айви о сжатии позволяет показать, что кривизна сечений предельного потока положительна или равна нулю.

Параболические растяжения. Идея масштабирования формализуется при помощи понятия **параболического растяжения** (см. рис. 3). Если даны поток Риччи $g(t)$ на $M \times [0; T)$, точка x_0 и момент времени t_0, то параболическое растяжение определяется как решение потока, заданное формулой

$$g_0(t) = Q_0 \cdot g\Big(t_0 + \frac{t}{Q_0}\Big), \quad \text{где } Q_0 = R(x_0, t_0).$$

Оно определено на промежутке $[-t_0 Q_0; (T - t_0) Q_0)$ и нормируется условием $R_{g_0}(x_0, 0) = 1$.

[5)] См. примечание 3.

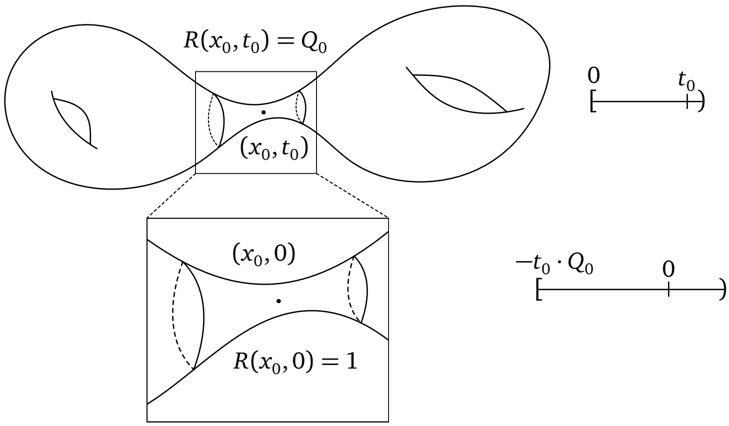

Рис. 3

§ 4. Потоки с хирургией по Перельману

Основным результатом первой статьи Перельмана [10] является теорема о канонических окрестностях, описывающая метрику $g(t)$ в точках большой скалярной кривизны. Если кривизна велика повсеместно, из этого получается классификация многообразий M. В таких случаях говорят, что поток останавливается. В противном случае идея (восходящая к Гамильтону [9]) состоит в том, чтобы избавиться от кусков многообразия M с большой кривизной, разрезав его вдоль сфер S^2 и заклеив дыры шарами B^3. Разумеется, это следует делать, следя за топологией и геометрией многообразия. После этого нужно рассмотреть поток на новом многообразии, которое, возможно, не будет связным, и повторить описанную процедуру. В некоторых случаях отдельные связные компоненты исчезают при хирургических операциях. В работе [11] Перельман доказывает, что для произвольных начальных условий, нормированных должным образом, этот поток с хирургией можно продолжать бесконечно. На каждом конечном промежутке времени при этом делается лишь конечное число хирургических операций. Если весь поток останавливается за конечное время, можно описать все его связные компоненты, а следовательно, и исходное многообразие. Так осуществляется доказательство гипотезы Пуанкаре. Классификация для длинных отрезков времени более сложна, и здесь мы её не рассматриваем.

Канонические окрестности

Теорема о канонических окрестностях утверждает, что, грубо говоря, в точках с большой скалярной кривизной потока Риччи геометрия является канонической, т. е. почти что изометричной одной из конечного числа простых моделей. Чтобы не вводить лишних параметров, предположим, что поток живёт на промежутке, содержащем отрезок $[0;1]$ (этого можно добиться перенормировкой начальной метрики), и потребуем, чтобы единичные шары в начальной метрике были почти евклидовыми. Такие начальные данные будем называть нормализованными. Имеет место

Теорема 5. *Для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует универсальная константа $r = r(\varepsilon) > 0$ со следующим свойством. Пусть $(M, g(t))$ — поток Риччи с нормализованными начальными данными, а $x \in M$ и $t \geqslant 1$ таковы, что $R(x,t) \geqslant r^{-2}$. Тогда точка x имеет окрестность, которая после растяжения в $\sqrt{R(x,t)}$ раз становится изометричной с точностью до ε одной из следующих моделей*:

i) *цилиндру $S^2 \times (-1/\varepsilon; 1/\varepsilon)$ с канонической метрикой произведения и скалярной кривизной* 1; *такую окрестность назовём ε-горлышком*;

ii) *шару B^3 или дополнению к шару в проективном пространстве, т. е. $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \bar{B}^3$, с метрикой строго положительной скалярной кривизны, которые близки всюду, кроме некоторого компакта, к описанному выше сферическому цилиндру*; *такую окрестность будем называть ε-шапочкой*;

iii) *замкнутому многообразию со строго положительной кривизной сечения.*

При этом будем говорить, что $g(t)$ удовлетворяет гипотезе о канонических окрестностях для масштаба r (см. рис. 4).

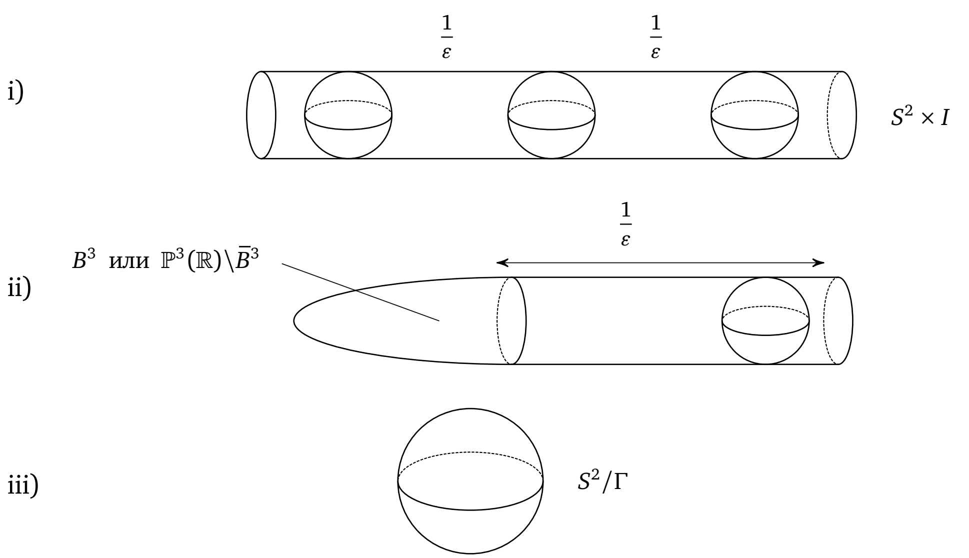

Рис. 4

Мы называем два диффеоморфных многообразия изометричными с точностью до ε, если не более чем на ε отличаются их римановы метрики, а также их производные порядков не более $1/\varepsilon$. В частности, кривизны на этих окрестностях сравнимы со скалярной кривизной $R(x,t)$. Размер окрестностей, соответствующих случаям i) и ii), сравним с $\frac{2}{\varepsilon}R^{-1/2}(x,t)$. Кроме того, пространственные и временны́е колебания оцениваются универсальными константами.

Замечание 6. В случае iii), ввиду связности, многообразие M целиком содержится в окрестности, и согласно теореме 3 оно диффеоморфно сферическому многообразию.

Описание первого особого момента времени

На протяжении этого раздела зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и масштаб $r > 0$, относительно которого метрика $g(t)$ удовлетворяет предположению о канонических окрестностях. Мы будем описывать метрику $g(t)$ при $t \to T < \infty$, где T — особый момент времени. Обозначим через Ω множество точек, где скалярная кривизна остаётся ограниченной, т. е.

$$\Omega = \{x \in M, R(x,\cdot) \leqslant c(x) < +\infty\}.$$

По предположению, существует такая точка $x \in M$, в которой $R(x,t) \to +\infty$, следовательно, множество Ω строго меньше, чем M.

Множество Ω пусто: поток останавливается. В этом случае можно доказать, что M является сферическим многообразием, произведением $S^2 \times S^1$ или связной суммой проективных пространств, которую мы обозначаем через $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})\#\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Действительно, если кривизна всюду неограниченно возрастает, можно найти такой момент времени t_0, близкий к особому моменту T, что $(M, g(t_0))$ будет покрыто конечным числом канонических окрестностей. Если среди них имеется окрестность типа iii), то M диффеоморфно сферическому многообразию. В противном случае можно покрыть M горлышками, склеив их друг с другом по краям так, что в результате они образуют $S^2 \times S^1$, или же заклеив их края шапочками, получая в итоге S^3, $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ или $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})\#\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Замечание 7. Если M односвязно, то оно оказывается диффеоморфным сфере S^3.

Множество Ω непусто. С помощью оценок на кривизны можно доказать, что Ω — открытое множество, на котором метрика $g(t)$ сходится к регулярной метрике $g(T)$. Переходя к пределу, получаем, что $g(T)$ удовлетворяет предположению о канонических окрестностях. Чтобы понять структуру множества Ω, зададимся масштабом кривизны $\rho < r$ и определим множество $\Omega_\rho = \{x \in \Omega \colon R(x, T) \leqslant \rho^{-2}\}$. Множество $\Omega \setminus \Omega_\rho$ покрывается горлышками и шапочками. Разбор различных случаев показывает, что любая точка $x \in \Omega \setminus \Omega_\rho$ принадлежит одному из следующих множеств:

i) *ε-трубка*: цилиндр $S^2 \times I$, полученный объединением конечного числа горлышек, граница которого содержится в Ω_ρ;

ii) *ε-остриё*: объединение бесконечного числа горлышек, диффеоморфное $S^2 \times \mathbb{R}^+$; конец острия $S^2 \times \{0\}$ принадлежит Ω_ρ, а на другом конце скалярная кривизна стремится к плюс бесконечности;

iii) объединение конечного числа горлышек, заклеенное шапочкой и примыкающее по границе к Ω_ρ;

iv) отдельные компоненты связности Ω_ρ: диффеоморфные $S^2 \times \mathbb{R}$ *двойные острия*, полученные как объединения бесконечного числа горлышек, и диффеоморфные $\mathbb{R}^3$ *заострённые шапочки*, полученные как объединение бесконечного числа горлышек, заклеенное шапочкой (см. рис. 5).

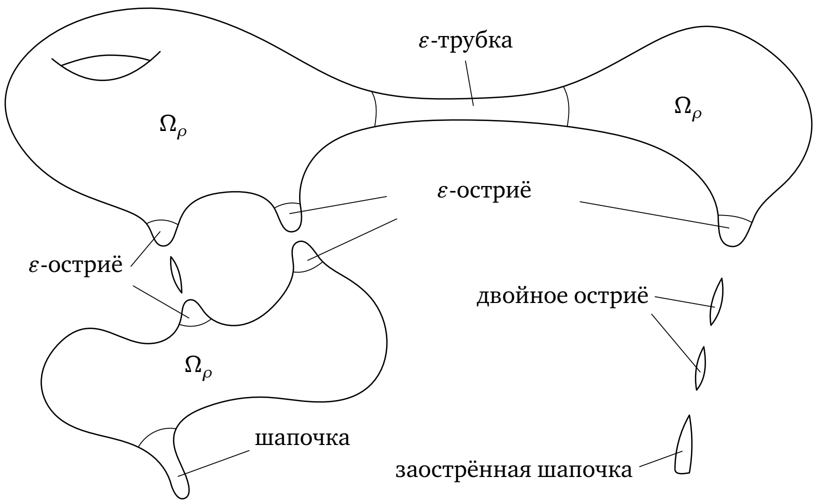

Рис. 5

Замечание 8. Если Ω_ρ пусто, то, действуя аналогично случаю $\Omega = \varnothing$, можно доказать, что M диффеоморфно $S^2 \times S^1$, $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ или сферическому многообразию. В таких случаях тоже говорят, что поток останавливается, даже если кривизна не стремится к бесконечности во всех точках.

Хирургия. К множеству Ω можно применять следующие хирургические операции:

1° удаление всех компонент связности множества Ω, не пересекающих Ω_ρ;

2° выбрасывание множеств точек, примыкающих к Ω_ρ, и заклейка образовавшихся дыр шапочками, диффеоморфными шару (см. рис. 6).

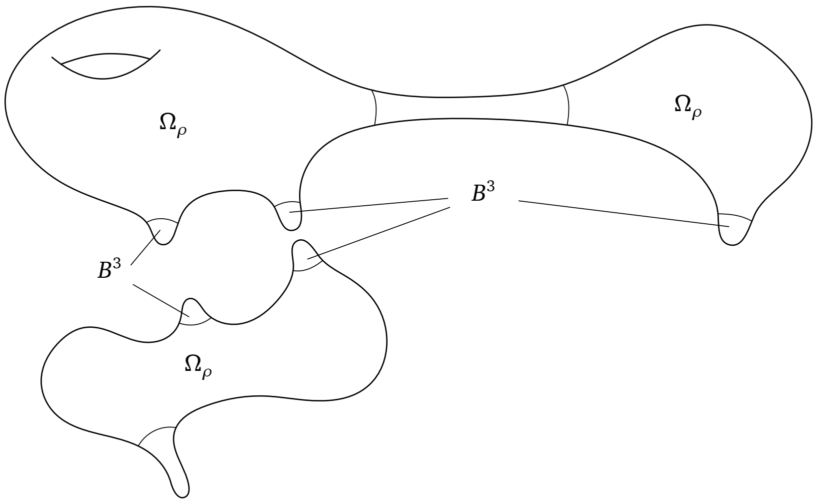

Рис. 6

В результате получается новое дифференцируемое многообразие, возможно несвязное, которое мы обозначаем через M_1. Во всякий момент времени $t < T$, близкий к T, множество $(M \setminus \Omega_\rho, g(t))$ покрыто каноническими окрестностями. Также можно проверить, что M есть сумма различных связных компонент многообразия M_1 и, возможно, конечного числа ручек $S^2 \times S^1$ и проективных пространств $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Эта хирургическая операция должна выполняться с учётом метрики: нужно следить, как именно производятся все переклейки. Это делается так: нужно выбросить все точки в середине некоторого δ-горлышка, где $0 < \delta \ll \varepsilon$. Таким образом мы определяем хирургическую операцию с параметрами (r, δ), где r — это радиус кривизны (зависящий от ε), начиная с которого существуют канонические окрестности, и параметр ρ определяется как $\rho = \delta r$. На многообразии M_1, таким образом, появляется корректно определённая риманова метрика $g_1(T)$, которая задаёт начальные условия для уравнения (1), после чего поток можно рассматривать одновременно на всех компонентах связности многообразия M_1.

Замечание 9. Если множество Ω_ρ пусто, определение хирургической операции, тем не менее, имеет смысл. Но в этом случае $M_1 = \varnothing$, и поток останавливается.

Потоки с хирургией. Важное достижение Перельмана в работе [11] состоит в том, что ему удалось проитерировать описанную конструкцию бесконечное число раз. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, которое используется в этой конструкции.

Определение 10. Пусть $r(t)$, $\delta(t)$ — пара функций, убывающих на луче $[0; +\infty)$ и принимающих положительные значения. Потоком с хирургией называется следующий набор данных:

i) строго возрастающая дискретная последовательность $(t_k)_{0 \leqslant k \leqslant N \leqslant \infty}$ со значениями из $[0; +\infty)$ и определённые для каждого целого числа k;

ii) компактное многообразие M_k, возможно несвязное или пустое;

iii) поток Риччи $g_k(t)$ на $M_k \times [t_k; t_{k+1})$, особый в точке t_{k+1} и удовлетворяющий гипотезе о канонических окрестностях для масштаба $r(t)$; при этом риманово многообразие $(M_{k+1}, g_{k+1}(t_{k+1}))$ получается из $(M_k, g_k(t))$ при помощи хирургической операции с параметрами (r, δ) в момент времени t_{k+1}.

Говорят, что риманово многообразие (M, g_0) нормализовано, если его кривизны сечений ограничены по модулю числом 1, а объём всякого единичного шара равен как минимум половине евклидова объёма. Перельман доказывает, что существуют такие универсальные строго убывающие функции $r(t)$, $\delta(t)$, для которых поток с хирургией существует на $[0; +\infty)$ для произвольных нормализованных начальных данных (M, g_0).

В частности, на каждом конечном отрезке совершается только конечное число операций. Если M_k — многообразие, полученное в k-й особый момент времени (с учётом выброшенных компонент связности), то M получается как связная сумма компонент связности многообразия M_k с некоторым количеством копий $S^2 \times S^1$ и факторов сферы S^3 по конечным группам. Если M_k пусто, поток останавливается, и M оказывается диффеоморфным связной сумме конечного числа многообразий вида $S^2 \times S^1$ и факторов S^3 по конечным группам. В частности, если M односвязно, то оно диффеоморфно S^3.

§ 5. Гипотеза Пуанкаре

После того как мы доказали существование потока с хирургией на бесконечном промежутке времени, для доказательства гипотезы Пуанкаре остаётся убедиться, что этот поток за конечное время будет останавливаться на гомотопической сфере, т. е. на односвязном многообразии. Согласно вышесказанному это многообразие тогда будет диффеоморфно S^3. Расскажем об этом более подробно.

Пусть у нас имеется односвязное компактное многообразие M_0, которое мы будем предполагать неприводимым (см. ниже). Возьмём на нём нормализованную метрику g_0. Для этих начальных данных можно построить поток с хирургией $(M_k, g_k(t))$, определённый на $[0; +\infty)$. Мы знаем, что у всякого многообразия M_k, если оно непусто, имеется компонента M_k^1, диффеоморфная M_0, а остальные компоненты являются сферами. Поэтому можно рассмотреть ограничение потока с хирургией на эту единственную компоненту. Чтобы доказать, что оно останавливается за конечное время, приведём набросок рассуждения Т. Колдинга и В. Миникоцци [3], которое технически более просто, чем доказательство Перельмана [12].

> Неприводимость. Ориентируемое многообразие M называется неприводимым, если всякая сфера $S^2 \subset M$ ограничивает шар B^3. Из этого следует, что если M является связной суммой двух многообразий, то одно из них диффеоморфно самому M, а другое сфере S^3. Теорема Кнезера утверждает, что всякое ориентируемое многообразие является связной суммой конечного числа неприводимых односвязных многообразий и нескольких экземпляров $S^2 \times S^1$. В частности, если многообразие M односвязно, оно является связной суммой конечного числа неприводимых односвязных многообразий.

Ширина $(M_0, g(t))$ определяется как минимакс энергии сфер S^2 в «следе», оставленном многообразием M_0. Это геометрическая величина, строго положительная в случае, если петля, которая определяет след, существенна в пространстве $\mathscr{H}$, состоящем из непрерывных отображений из S^2 в $(M_0, g(t))$ с ограниченной энергией. Наличие существенной петли в $\mathscr{H}$ следует из односвязности многообразия M_0. Зафиксируем раз и навсегда гомотопический класс β некоторой существенной петли в $\mathscr{H}$. Ширина $W([\beta], g(t))$ риманова многообразия $(M_0, g(t))$ определяется по формуле

$$W([\beta], g(t)) = \inf_{\gamma \in [\beta]} \sup_{s \in [0;1]} E(\gamma(s)),$$

где

$$E(f) = \int_{S^2} |df|^2_{g(t)} d\mathrm{vol}_{S^2}$$

есть энергия отображения $f\colon S^2 \to (M_0, g(t))$.

Доказательство остановки потока за конечное время основано на следующих двух фактах.

1° На гладких частях потока ширина $W([\beta], g(t))$ достаточно быстро убывает при перемещении вдоль потока. Это следует из неравенства

Колдинга — Миникоцци [3]:

$$\frac{dW([\beta], g(t))}{dt} \leqslant -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} W([\beta], g(t))$$

(C — некоторая константа, которую можно вычислить). Это гарантирует остановку за конечное время, если поток остаётся гладким, поскольку ширина становится нулевой за конечное время, но, с другой стороны, она должна быть положительной.

2° Если t_{k+1} — особый момент времени для потока $g_k(t)$ на M_0, то

$$\lim_{t \to t_{k+1}^-} W([\beta], g_k(t)) \geqslant W([\beta], g_{k+1}(t_{k+1})).$$

Отсюда следует существование $(1 + \xi(t))$-липшицева диффеоморфизма между $(M_0, g_k(t))$ и $(M_0, g_{k+1}(t_{k+1}))$, где $\xi(t) \to 0$ при $t \to t_{k+1}$.

Список литературы

[1] *Bessières L.* Conjecture de Poincaré: la preuve de R. Hamilton et G. Perelman // Gaz. Math. 2005. Vol. 106. P. 7–35.

[2] *Besson G.* Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci, d'après G. Perelman // Séminaire Bourbaki 2004/2005, Astérisque. № 307 (2006). P. 309–347.

[3] *Colding T. H., Minicozzi W. P., II.* Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman // J. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 18, № 3. P. 561–569.

[4] *Deturck D.* Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors // J. Differential Geom. 1983. Vol. 18, № 1. P. 157–162.

[5] *Hamilton R.* Three-manifolds with positive Ricci curvature // J. Differential Geom. 1982. Vol. 17, № 2. P. 255–306.

[6] *Hamilton R.* Four-manifolds with positive curvature operator // J. Differential Geom. 1986. Vol. 24, № 2. P. 153–179.

[7] *Hamilton R.* The formation of singularities in the Ricci flow // Surveys in Differential Geometry, vol. II. (Cambridge, MA, 1993). Cambridge, MA: Int. Press, 1995. P. 7–136.

[8] *Hamilton R.* A compactness property for solutions of the Ricci flow // Amer. J. Math. 1995. Vol. 117, № 3. P. 545–572.

[9] *Hamilton R.* Four-manifolds with positive isotropic curvature // Comm. Anal. Geom. 1997. Vol. 5, № 1. P. 1–92.

[10] *Perelman G.* The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. ArXiv:math.DG/0211159.

[11] *Perelman G.* Ricci flow with surgery on three-manifolds. ArXiv:math.DG/0303109.

[12] *Perelman G.* Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. ArXiv:math.DG/0307245.

[13] *Poincaré H.* Œuvres. Tome VI. Gauthier-Villars. Paris, 1953.

[14] *Scott P.* The geometries of 3-manifolds // Bull. London Math. Soc. 1983. Vol. 15, № 5. P. 401–487. (Рус. пер.: *Скотт П.* Геометрии на трёхмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.)

[15] *Thurston W. P.* Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1982. Vol. 6, № 3. P. 357–381.

Лоран Бессьер, Гренобльский университет

Жерар Бессон, Гренобльский университет

Мишель Буало, Тулузский университет