Наш семинар: математические сюжеты

Регулярные графы

С. Б. Гашков

§ 1. Вместо введения

Читателю предлагается попробовать решить несколько олимпиадных задач (в скобках указано, когда и где они предлагались[1]; некоторые задачи, возможно, на олимпиадах не предлагались, но вполне могли бы). Прочитав статью, вы не только легко справитесь с теми задачами, которые не поддались вам вначале, но с удивлением увидите, в какие дебри могут завести поставленные в них такие простые и естественные вопросы.

Задача 1 (ММО, 1960, второй тур, 10.3). Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Доказать, что каждый из них знаком с одинаковым числом человек.

Эта задача широко известна, но почти нигде не отмечается один подводный камень в её решении. Хотите узнать, в чём дело? — читайте § 3.

Задача 2. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые два знакомых не имеют общих знакомых, а каждые два незнакомых имеют ровно одного общего знакомого. Доказать, что каждый из них знаком с одинаковым числом человек.

[1] ВМО — Всесоюзная математическая олимпиада; ММО — Московская математическая олимпиада; IMO — Международная математическая олимпиада.

В этой задаче есть такая же тонкость, как и в предыдущей. Читайте об этом § 4.

Если в задаче 1 еле заметно видоизменить условие, получится

Задача 3 (ММО, 2012, 11 класс, первый день, № 4). На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что n может быть больше 4.

Задача 4. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые двое имеют ровно одного общего знакомого. Доказать, что каждый из них, кроме, быть может, одного, знаком с одинаковым числом людей. Могут ли все они иметь равное число знакомых?

Задача 5. Собралось $n \geqslant 4$ человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые двое имеют ровно одного общего знакомого. Доказать, что если среди них найдётся знакомый со всеми остальными, то такой человек только один, число n нечётно и все остальные имеют в точности по два знакомых.

Предыдущие две задачи тесно связаны с одной непростой теоремой теории графов. Читайте о ней в § 5.

Задача 6 (ВМО 1969, 8.5). В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединён авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

Эта задача и её обобщения обсуждаются в § 4.

§ 2. Графы, цепи и циклы

Что такое графы — сейчас многие знают[2)], и олимпиадные задачи, относящиеся к теории графов, часто даже и формулируются в теоретико-графовых терминах, а не на «бытовом» (или «геометрическом») языке, как было раньше. Тем не менее в § 1 все задачи сформулированы без использования терминологии теории графов (чтобы не отпугнуть слу-

[2)] Если читатель всё же не знаком с ними, рекомендуем обратиться к достаточно просто написанным книгам [11, 16]. Приведённый в конце список литературы довольно обширен, но, конечно, не полон.

чайного читателя), но все необходимые далее понятия будут сейчас явно введены (для краткости это будет сделано формально, без примеров и мотивации).

Для простоты рассматривается только случай обыкновенных графов (хотя многие понятия аналогично определяются и для ориентированных графов и для мультиграфов).

Граф $G = (V, E)$ — это (упорядоченная) пара множеств: множества V *вершин* $v \in V$ и множества E *рёбер* $e \in E$ (этого графа). Рёбра графа $e = \{v_i, v_j\}$ (далее также $e = (v_i, v_j)$) — это двухэлементные множества вершин графа (т. е. просто неупорядоченные пары вершин). Если V и E — конечные множества, то граф называется *конечным*. Далее рассматриваются только конечные графы. Вершины, образующие ребро, называются *смежными*. При этом про ребро e и вершину v, $v \in e$, говорят, что они *инцидентны* (друг другу). Число $\deg_v(G)$ рёбер графа G, инцидентных данной вершине v, называется *степенью* этой вершины.

Обычный граф с n вершинами, в котором проведены все $n(n-1)/2$ рёбер, называется *полным графом* и обозначается K_n.

Графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение (биекция), сохраняющее смежность вершин, т. е. биекция $\varphi : V_1 \to V_2$ со следующим свойством: $\{v_i, v_j\} \in E_1$ тогда и только тогда, когда $\{\varphi(v_i), \varphi(v_j)\} \in E_2$.

Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, которая начинается и заканчивается вершиной: v_{i_1}, e_{j_1}, v_{i_2}, e_{j_2}, $\ldots$, v_{i_k}, e_{j_k}, $v_{i_{k+1}}$, где $e_{j_s} = \{v_{i_s}, v_{i_{s+1}}\}$ для всех $s = 1, \ldots, k$. *Длиной* маршрута называется число входящих в него рёбер. *Цепью* в графе G называется маршрут, не содержащий повторяющихся рёбер. Цепь, не содержащая повторяющихся вершин, называется *простой* цепью.

Граф называется *связным*, если любые его вершины соединяются цепью (а значит, и простой цепью). Если граф не связен, то он распадается на несколько связных подграфов — его *компонент связности*.

Расстоянием $d(v_i, v_j)$ между вершинами v_i и v_j называется длина кратчайшей (т. е. содержащей наименьшее число рёбер) цепи, начинающейся в вершине v_i и заканчивающейся в вершине v_j. Такая цепь называется *геодезической цепью* с концами v_i и v_j. Геодезическая цепь является простой цепью.

Циклом называется цепь, первая и последняя вершина которой совпадают. *Простым циклом* называется цикл, в котором совпадают только первая и последняя вершины. Простой цикл графа, включающий все его вершины, называется *гамильтоновым циклом*. Граф, имеющий гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым графом*.

Графы, у которых степени всех вершин равны, называются *регулярными*. Примером связного регулярного графа является любой простой цикл (в нём степени всех вершин равны 2). Примером несвязного регулярного графа является граф, состоящий из нескольких рёбер, попарно не имеющих общих вершин. Степень каждой вершины такого графа равна 1 и он называется *паросочетанием*.

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два подмножества так, что каждое ребро соединяет вершины из разных подмножеств.

2.1. Дружеские отношения и сильно регулярные графы

Связный граф называется (v, a, c, d)-*сильно регулярным*, если число его вершин v, степени вершин равны a, для каждой пары его смежных вершин число их общих соседей равно c, а для каждой пары несмежных вершин число их общих соседей равно d. Тривиальным примером такого графа при $a = v - 1$, $c = v - 2$ являлся бы полный граф на v вершинах, но у него просто нет пар несмежных вершин. Далее рассматриваются только нетривиальные и связные графы. *Обхватом* графа называется длина кратчайшего простого цикла. *Диаметром* графа называется наибольшее расстояние между его вершинами.

В частности, если $c = 0$, то граф не содержит треугольников («двое знакомых не имеют общих знакомых»), значит, обхват его не меньше 4. В случае $c > 0$ обхват равен трём.

Если $d = 1$, то граф не содержит циклов длины четыре и любые две его вершины соединяются единственной цепью длины не больше 2. Значит, в этом случае обхват графа не меньше 5, а диаметр равен 2. Если же $d \geqslant 2$, то любые две несмежные вершины принадлежат циклу длины четыре, а в случае $d = 2$ такой цикл единственный. Поэтому в случае $d \geqslant 2$ диаметр равен 2, а обхват — четырём.

§ 3. Задача Московской олимпиады 1960 года

На языке теории графов задача 1 формулируется так: граф не содержит треугольников, а каждые две несмежные вершины лежат на единственном цикле длины четыре. Докажем, что граф регулярен (а значит, он будет $(v, a, 0, 2)$-сильно регулярным). Пусть V — любая его вершина, V_i, $i = 1, \ldots, a$, — её соседи. По условию V_i, V_j при любых $i \neq j$ не смежны, значит, найдётся у них ещё один (кроме V) общий сосед $V_{i,j}$. Все вершины $V_{i,j}$ не смежны с V (иначе появляется треугольник, например $V, V_i, V_{i,j}$) и попарно различны (если $V_{i,j} = V_{k,l}$, то эта вершина вместе с V имеет не менее трёх общих соседей среди V_i, V_j, V_k, V_l). Больше вершин в графе нет: если есть ещё одна вершина V', то она не смежна с V, значит, имеет с ней двух общих соседей. Это вершины V_i, V_j, которые тогда имеют общих соседей V, V' и $V_{i,j}$, что невозможно. Значит, число v вершин в графе равно

$$1+a+\frac{a(a-1)}{2}=1+\frac{a(a+1)}{2}.$$

Положительное число a определяется однозначно.

Рёбра этого графа выше указаны все, кроме рёбер между вершинами $V_{i,j}$. Указанные рёбра образуют подграф этого графа, совпадающий с подграфом a-мерного двоичного куба, образованным нулевым, первым и вторым его слоями. Но у него должны быть ещё рёбра между вершинами $V_{i,j}$ (второго слоя). Они должны образовывать такой подграф степени $a-2$ на множестве вершин второго слоя, чтобы для всего графа выполнялось условие задачи. Однако неясно, при каких a такой граф существует. Очевидно, при $a=2$ он существует и является циклом длины четыре, а при $a \geqslant 3$ он содержит циклы длины 5. В [5] (и в других источниках), где публиковалось решение этой задачи, вопрос о существовании такого графа почему-то не обсуждался.

Задача 7. Докажите, что при $a=3$ и $a=4$ таких графов нет.

Задача 8. Докажите, что при $a=5$ такой граф есть и определяется однозначно.

Указание. Вершины $V_{i,j}, V_{j,k}$ не смежные (иначе есть треугольник $V_{i,j}$, $V_{j,k}$, V_j) а вершины $V_{i,j}, V_{k,l}$ при $\{i,j\}\cap\{k,l\}=\varnothing$ обязаны быть смежными, так как вершина $V_{i,j}$ должна иметь степень пять, а её соседями (кроме V_i, V_j) могут быть только три вершины $V_{k,l}$, у которых $\{k,l\}\cap\{i,j\}=\varnothing$. Если вершины $V_{i,j}, V_{k,l}$ не смежные, то без ограничения общности $l=j$, и общими соседями у них будут только V_j и $V_{p,q}$, где множества $\{p,q\}$ и $\{i,j,k\}$ не пересекаются (не имеют общих элементов). Если вершины $V_{i,j}, V_k$ не смежные, то $k\neq i$, $k\neq j$, тогда их общими соседями будут только $V_{k,p}$ и $V_{k,q}$, где $\{p,q\}$ и $\{i,j,k\}$ не пересекаются. Треугольника в графе нет, так как вершины $V_{i,j}$, $V_{k,l}$, $V_{p,q}$ могут его образовывать лишь в случае попарно разных индексов i,j,k,l,p,q, что невозможно.

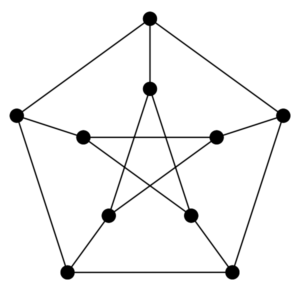

Рис. 1. Изображение графа Петерсена

Его кубический подграф[3)] из десяти вершин $V_{i,j}$ не содержит треугольников, и любые две несмежные вершины имеют только одного общего соседа.

[3)] Так называют регулярные графы, все вершины которых имеют степень три.

Задача 9. Докажите, что указанный подграф изоморфен графу Петерсена (рис. 1).

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если граф задачи* 1 *степени* a *существует, то* $a = 1 + n^2$, *где целое* n *не делится на четыре.*

Для доказательства теоремы понадобится

3.1. Немного линейной алгебры

Сопоставим каждому графу такую квадратную матрицу A порядка v, что на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число $a_{i,j} = 1$, если вершины V_i, V_j соединены ребром, и $a_{i,j} = 0$ в противном случае. Эта матрица, называемая далее *матрицей смежности* данного графа, симметрична, так как $a_{i,j} = a_{j,i}$, и по главной диагонали в ней нули (т. е. $a_{i,i} = 0$, $i = 1, \ldots, v$). Другими примерами симметричных булевых (т. е. заполненных только нулями и единицами) матриц являются матрица E, в которой единицы стоят только на главной диагонали, и матрица J, заполненная только единицами.

Будем говорить, что вектор $x = (x_1, \ldots, x_v)$ при умножении на произвольную матрицу M порядка v превращается в вектор $y = Mx$, где

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j.$$

Если $Mx = \lambda x$, где λ — некоторое число, то вектор x называют *собственным вектором* матрицы M, а λ — его *собственным значением*.

Собственный вектор для данного собственного значения λ определён неоднозначно, так как его можно умножить на любое число и опять получится собственный вектор. В частности, нулевой вектор является собственным для любого собственного значения, по этой причине нулевой вектор удобно собственным вектором не считать.

У матрицы E все ненулевые векторы собственные с собственным значением 1. У матрицы смежности A регулярного графа в каждой строке и каждом столбце стоит ровно a единиц, поэтому вектор $(1, \ldots, 1)$ является для неё собственным и имеет собственное значение a. По той же причине у матрицы J тот же вектор является собственным с собственным значением v. У неё есть также векторы с собственным значением 0. Ими являются все векторы $x = (x_1, \ldots, x_v)$, удовлетворяющие равенству $x_1 + \ldots + x_v = 0$. Любой такой вектор можно представить в виде $x_1 w_1 + \ldots + x_{v-1} w_{v-1}$, где $w_i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0, -1)$, поэтому говорят, что собственное значение 0 у матрицы J имеет *кратность* $v-1$ и ему соответствует собственное пространство размерности $v-1$ (порождённое векторами w_i, $i=1,\dots,v-1$). Собственное значение 1 у матрицы E имеет кратность v.

В линейной алгебре известна теорема, которой мы воспользуемся без доказательства, о том, что действительная симметричная матрица порядка n всегда имеет ровно n действительных собственных значений (и столько же собственных векторов), если учитывать их кратность (например, матрица E имеет одно v-кратное собственное значение, а матрица J — одно однократное и одно $(v-1)$-кратное).

Матрицы, так же как и векторы, можно умножать на числа и складывать. Например, можно рассмотреть матрицу $2J+(a-1)E$, в которой по главной диагонали стоят числа $a+1$, а вне её — двойки. Вектор $(1,\dots,1)$ является для неё собственным с собственным значением $2v+a-1$ (например, потому, что у матрицы $2J$ он имеет собственное значение $2v$, а у матрицы $(a-1)E$ — собственное значение $a-1$), а векторы w_i имеют собственное значение $a-1$ (потому что у матрицы $2J$ они имеют нулевое собственное значение, а у матрицы $(a-1)E$ — собственное значение $a-1$), которое поэтому имеет кратность $v-1$.

Квадратные матрицы равного порядка можно умножать и в результате получать матрицу того же порядка. Матрица $D=BC$ по определению состоит из чисел

$$d_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}c_{k,j}.$$

Матрица CB может и не совпадать с матрицей BC, но если $B=C$, то оба произведения очевидно совпадают и обозначаются B^2.

Легко проверить тождества $B(C+D)=BC+BD$, $(C+D)B=CB+DB$, $EB=BE=B$. Из них, например, следует, что $(A+E)^2=A^2+2A+E$. Также легко проверить, что если матрица A имеет собственное значение λ кратности k, то матрица A^2 имеет собственное значение λ^2 не меньшей кратности, потому что если $Ax=\lambda x$, то $A^2x=\lambda^2x$.

Если матрица B симметрическая, она имеет ровно v собственных значений с учётом кратности, и их сумма с учётом кратности равна сумме элементов главной диагонали матрицы — так называемому *следу матрицы* (этот известный факт из линейной алгебры также оставим без доказательства).

Лемма 1. *Обозначим в убывающем порядке $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ собственные значения матрицы смежности A данного регулярного графа степени a. Справедливо равенство $\lambda_1=a$, т. е. наибольшее собственное значение* *матрицы смежности A равно a, причём для связного графа кратность этого значения равна* 1.

Доказательство. Заметим, что $Ae = ae$ (где вектор $e = (1, \ldots, 1)$ записывается в виде столбца), потому что в каждой строке матрицы сумма чисел равна a. Очевидно, для любого вектора w

$$|(Aw)_i| = \Big|\sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j\Big| \leqslant a \max |w_i| = a|w|,$$

поэтому для любого собственного значения λ_j и его собственного вектора v, $Av = \lambda_j v$, имеем $|Av| = |\lambda_j||v| \leqslant a|v|$, откуда $|\lambda_j| \leqslant a = \lambda_1$. Предполагая, что $Aw = aw$ для какого-нибудь вектора w, имеем

$$aw_i = Aw_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j.$$

Если выбрать i так, чтобы $w_i = |w| = \max_j |w_j|$ (если нужно, вместо w можно взять $-w$), получим, что

$$a|w| = aw_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |w| = a|w|,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|w| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \sum_{j,\, a_{i,j}=1} a_{ij} w_j.$$

Значит, во всех вершинах графа, соседних с вершиной, в которой $w_i = |w|$, величина w_i имеет то же значение. Если граф связен, то для любого i значения w_i одинаковы, т. е. $w = |w|e$. □

Следующая лемма дополняет предыдущую[4)].

Лемма 2. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда* $\lambda_n = -\lambda_1$. *В этом случае все его собственные значения разбиваются на пары противоположных по знаку.*

Доказательство. Действительно, $\lambda_n = -\lambda_1$. Рассматривая любую компоненту связности и предполагая, что $Aw = -aw$, имеем

$$a|w_i| = |(Aw)_i| = \Big|\sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} A_{ij} |w_j|.$$

[4)] Обе леммы являются частными случаями теоремы Перрона — Фробениуса.

Выбирая i так, что $|w_i| = |w| = \max_j |w_j|$, получаем, что

$$a|w| = a|w_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|w_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|w| = a|w|,$$

откуда

$$a|w_i| = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|w_j| = \sum_{j\in\Gamma(i)} A_{ij}|w_j| = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|w|,$$

где $\Gamma(i)$ — окрестность вершины i, т. е. множество всех вершин, соседних с вершиной i. Значит, во всех вершинах графа, соседних с вершиной, в которой w_i максимально по модулю, модуль w_i имеет то же значение. Двигаясь по вершинам компоненты связности, получаем, что на них везде модуль w_i одинаков. Рассматривая множества вершин, в которых значения w_i равны, получаем два непересекающихся подмножества рассматриваемой компоненты. Они являются долями двудольного графа, так как внутри них нет рёбер, иначе для одной из вершин получилось бы неравенство

$$|aw| = |-aw_i| = |(Aw)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij}w_j\right| = \left|\sum_{j\in\Gamma(i)} \pm A_{ij}|w|\right| < |aw_i|.$$

Так как компоненты двудольны, то и весь граф двудолен.

Если же граф двудолен, то его матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$. Если для всех i

$$\lambda w_i = (Aw)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}w_j,$$

то, меняя знак у w на всех вершинах одной доли, получаем, что новый вектор — собственный для $-\lambda$. □

3.2. Доказательство теоремы 1

В приведённом выше решении задачи 1 показано, что число вершин рассматриваемого в ней графа равно $v = 1 + a(a+1)/2$. Пусть A — его матрица смежности. Вычислим явно матрицу A^2. По главной диагонали у неё стоят числа

$$m_{i,i} = \sum_{j=1}^{v} a_{i,j}a_{j,i} = \sum_{j=1}^{v} a_{i,j}^2 = a,$$

потому что в каждой строке в матрице A ровно a единиц, а остальные нули. Если $a_{i,j} = 1$, т. е. V_i, V_j соединены ребром, то

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{v} a_{i,k}a_{k,j} = 0.$$

Действительно, если $a_{i,k}a_{k,j} = 1$, то $a_{i,k} = 1 = a_{k,j}$, значит, V_k соединено рёбрами с V_i, V_j, и так как $k \neq i, j$, то в графе есть треугольник V_i, V_k, V_j, что противоречит условию. Поэтому $a_{i,k}a_{k,j} = 0$.

Если же $a_{i,j} = 0$, т. е. V_i, V_j не соединены ребром, то

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{v} a_{i,k}a_{k,j} = 2.$$

Действительно, если $a_{i,k}a_{k,j} = 1$, то $a_{i,k} = 1 = a_{k,j}$, значит, V_k соединено рёбрами с V_i, V_j, а таких вершин, смежных одновременно с V_i и V_j, имеется ровно две. Поэтому среди слагаемых только две единицы, а остальные нули.

Так как в обоих случаях, согласно доказанному, $m_{i,j} = 2(1 - a_{i,j})$, $m_{i,i} = a$, то $A^2 = (a-2)E + 2(J-A)$, потому что у матрицы $(a-2)E$ вне главной диагонали нули, а у матрицы $2(J-A)$ на ней двойки. Положив $B = A + E$, получаем, что $B^2 = A^2 + 2A + E$, значит, $B^2 = (a-1)E + 2J$.

В п. 3.1 было проверено, что матрица $(a-1)E + 2J = B^2$ имеет собственное значение $2v + a - 1$ кратности 1 и собственное значение $a - 1$ кратности $v - 1$. Поэтому (согласно проверенному там же свойству квадрата матрицы) матрица B имеет собственные значения только из множества $\{\pm\sqrt{2v + a - 1}, \pm\sqrt{a-1}\}$.

Из равенства $v = 1 + a(a+1)/2$ следует, что $\sqrt{2v + a - 1} = a + 1$, что неудивительно, так как матрица $B = A + E$ имеет собственный вектор $(1, \ldots, 1)$ с собственным значением $a + 1$. Так как матрица B симметрическая, она имеет ровно v собственных значений с учётом кратности, и их сумма с учётом кратности равна следу матрицы, который равен v, поэтому из доказанного выше следует равенство

$$v = r_1(a+1) + r_2\sqrt{a-1},$$

где r_1, r_2 — целые числа.

Так как $v/(a+1) = 1/(a+1) + a/2$ при $a > 2$ не целое, то $r \neq 0$, значит,

$$\sqrt{a-1} = \frac{v - r_1(a+1)}{r_2}$$

— рациональное число.

Но если $\sqrt{a-1}$ рационально, то оно целое, так как a целое. Следовательно, $a = 1 + k^2$, где k — целое.

Докажем, что в этом равенстве k не может быть кратным 4. Действительно, собственное значение матрицы B, равное $a + 1$, имеет кратность 1, а собственного значения $-(a+1)$ матрица B не имеет. Так как $B = A + E$, это следует из того, что, согласно лемме 1, матрица A не может иметь собственного значения $-a-2$, а максимальное по модулю собственное значение у неё равно a и имеет кратность 1.

Поэтому, обозначив кратности собственных чисел $\pm\sqrt{a-1}$ матрицы B через r и s, получаем систему уравнений

$$1+r+s=v=a+1+r\sqrt{a-1}-s\sqrt{a-1},$$

первое из которых означает, что сумма кратностей собственных чисел матрицы B равна её порядку, а второе — что сумма её собственных значений с учётом кратности равна её следу.

Решая эту систему, имеем

$$r-s=v-1-2s=\frac{a(a+1)}{2}-2s, \quad \frac{a(a-1)}{2}=(r-s)\sqrt{a-1},$$

значит,

$$\frac{a\sqrt{a-1}}{2}=r-s=\frac{a(a+1)}{2}-2s,$$
$$4s=a(a+1-\sqrt{a-1})=(1+k^2)(2+k^2-k).$$

Но при k, кратных четырём, правая часть последнего равенства не делится на 4. Теорема доказана.

Из неё следует, что рассматриваемый граф может существовать только при $a=2$, $a=5$, $a=10$, $a=26$ и т. д.

3.3. Граф Клебша — Гринвуда — Глисона

Графы задачи 1 при $a=2$ и $a=5$ существуют, как было показано выше. Первый из них тривиален, а второй известен под названием *графа Клебша*[5] или *графа Гринвуда — Глисона*. Они использовали в 1955 г.

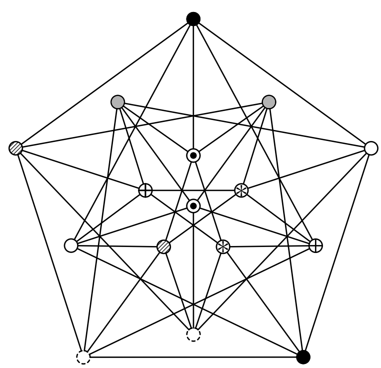

Рис. 2. Одно из изображений графа Клебша

[5] Альфред Клебш (1833–1872) — известный немецкий алгебраист.

этот граф для вычисления числа Рамсея[6] $R(3,3,3)=17$. Нижняя оценка $R(3,3,3)\geqslant 17$ фактически доказана в задаче 10.

Задача 10 (IMO 1964). Семнадцать учёных переписываются по трём темам. Докажите, что трое переписываются по одной теме.

Рёбра полного графа на 16 вершинах можно раскрасить в три цвета так, что рёбра одного цвета будут образовывать граф, изоморфный графу Клебша. Поэтому в полном графе не будет одноцветных треугольников. Правда, Гринвуд и Глисон построили этот граф из алгебраических соображений[7].

Ещё один способ построения этого графа таков. Нужно взять граф 4-мерного куба и добавить к нему рёбра, соединяющие противоположные вершины куба (его «диаметры»). Эта конструкция, применённая к n-мерному кубу, даёт регулярный граф с 2^n вершинами степени $n+1$ без треугольников диаметра $\lfloor n/2\rfloor$. Так же как и n-мерный куб, этот граф гамильтонов. Другой способ получить тот же граф — взять граф $(n+1)$-мерного куба и отождествить в нём все пары противоположных вершин (именно это фактически и делается в указании к задаче 8 в случае пятимерного куба).

3.4. Граф Симса — Гевирца и тройки Штейнера

Граф задачи 1 при $a=10$ тоже существует, он был получен американским математиком Чарльзом Симсом (1937–2017) и изучен в 1967 г. в диссертации другого американского математика Аллана Гевирца и называется графом Симса — Гевирца. От линий в его изображениях рябит в глазах.

Существует ли подобный граф при $a=26$, до сих пор неизвестно, но исследование его возможных свойств ведутся в Японии и в Уральском центре РАН.

Интересно, как оказалась задача 1 на Московской олимпиаде в 1960 г.?

Кратко опишем конструкцию графа Гевирца (этот $(56,10,0,2)$-сильно регулярный граф, на самом деле, единствен с точностью до изоморфизма, но мы оставим это без доказательства). Воспользуемся фактом существования в 22-элементном множестве 77 шестиэлементых подмножеств,

---

[6] Что такое числа Рамсея — см., например, [13].

[7] Роберт Гринвуд (1911–1993) — американский математик, активный деятель Американского математического общества.

Эндрю Глисон (1921–2008) — известный американский математик, решивший пятую проблему Гильберта. Во время Второй мировой войны (и после неё почти до конца жизни) работал криптоаналитиком и активно участвовал во взломе японских и немецких военных шифров.

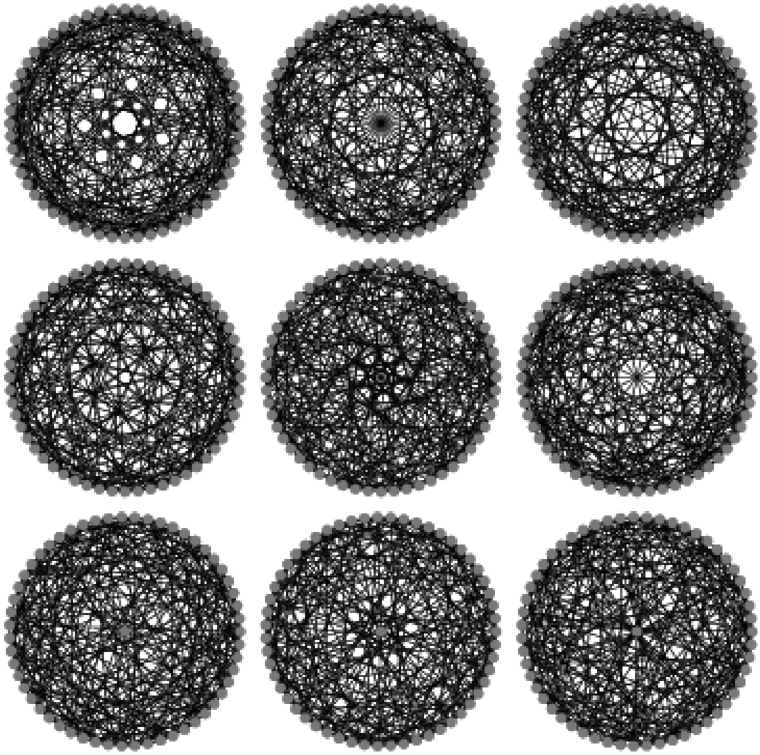

Рис. 3. Различные изображения графа Гевирца

никакие два из которых не имеют трёх общих элементов. Такая комбинаторная конфигурация на самом деле определена однозначно и называется *системой Штейнера*[8].

Любая тройка (трёхэлементное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, 22\}$) содержится ровно в одной из 77 «шестёрок» системы Штейнера. Действительно, троек ровно $\binom{22}{3} = 22 \cdot 21 \cdot 20/6 = 77 \cdot 20$, а каждая из 77 шестёрок содержит ровно $\binom{6}{3} = 20$ троек, а разные шестёрки не имеют общих троек. Каждая пара элементов из $\{1, 2, \ldots, 22\}$ содержится ровно в 5 шестёрках, потому что пару можно расширить до тройки ровно 20 способами, каждую из этих троек содержит одна шестёрка, значит, можно насчитать 20 шестёрок, содержащих данную пару, но при этом каждая шестёрка будет учтена четырежды (так как пару, лежащую в данной шестёрке, можно расширить до лежащей в ней тройки четырьмя способами). Очевидно, что любые 5 шестёрок, имеющих общую пару, не имеют кроме неё общих элементов, и значит, в объединении охватывают всё множество

[8] Якоб Штейнер (1796–1863) — крупный швейцарский математик.

$\{1, 2, \ldots, 22\}$. Проверим ещё, что каждый элемент множества $\{1, 2, \ldots, 22\}$ содержится ровно в 21 шестёрке. Действительно, каждый элемент можно дополнить до 21 пары (добавив один элемент), а каждая пара содержится ровно в 5 шестёрках. Значит, можно насчитать ровно $21 \cdot 5$ шестёрок, содержащих данный элемент, но при этом каждая шестёрка будет учтена 5 раз (дополнить элемент шестёрки до лежащей в ней пары можно пятью способами), значит, данный элемент содержится ровно в 21 шестёрке.

Проверим наконец, что любые две шестёрки могут пересекаться только по двум элементам. Для этого вначале посчитаем, с каким количеством шестёрок данная шестёрка пересекается по двум элементам. Количество способов выбрать пару элементов в данной шестёрке равно $\binom{6}{2} = 15$, а каждая из выбранных пар содержится в четырёх шестёрках (не считая данной). Значит, насчитывается ровно $15 \cdot 4 = 60$ шестёрок, пересекающих данную по двум элементам (очевидно, ни одна из этих шестёрок не подсчитана дважды, иначе она пересекалась бы с данной шестёркой минимум по трём элементам, но это запрещено условием). Подсчитаем теперь для данной шестёрки общее число пересекающих её шестёрок. С одной стороны, каждый элемент данной шестёрки содержится ровно в 20 других шестёрках, как было показано выше. Значит, можно насчитать $6 \cdot 20 = 120$ шестёрок, пересекающих данную. Но выше уже было найдено 60 шестёрок, пересекающих данную по двум элементам, и они только что были подсчитаны дважды (как содержащие один элемент и как содержащие второй). Таким образом, эти шестёрки уже учтены $60 \cdot 2 = 120$ раз, значит, ни одной шестёрки, пересекающей данную ровно по одному элементу, быть не должно (иначе второй способ подсчёта даст большее число, чем первый).

Построим теперь $(56, 10, 0, 2)$-сильно регулярный граф. Выкинем из описанной выше системы Штейнера $S(22, 6, 3)$ все шестёрки (их 21), содержащие элемент 22. Останется ровно $77 - 21 = 56$ шестёрок. Будем их рассматривать как вершины графа. Две вершины соединяем ребром, если соответствующие им шестёрки не пересекаются. Проверим, что для любой данной шестёрки найдётся ровно 10 не пересекающих её шестёрок. Достаточно убедиться, что число пересекающих её шестёрок равно 45. Действительно, каждая из них пересекает её по паре, их ровно $\binom{6}{2} = 15$, и каждая пара содержится ровно в трёх шестёрках (в полной системе Штейнера в четырёх, не считая данной, но одна из них содержит элемент 22 и поэтому была удалена).

Построенный граф не содержит треугольников, так как иначе были бы три попарно непересекающихся шестёрки A, B, C. Но имеется ровно 61 шестёрка, пересекающая A (учитываем и её саму), и столько же, пересекающих B. Количество шестёрок D, пересекающих одновременно A и B, не больше 45, потому что пара элементов $D \cap A$ может быть выбрана 15 способами, после чего найдётся не более трёх шестёрок, пересекающих A по той же паре и одновременно пересекающих B (так как эти шестёрки пересекают B по попарно не пересекающимся парам элементов). Значит, согласно правилу включения-исключения, число шестёрок, пересекающих A или B не меньше $61 + 61 - 45 = 77$, а так как всего в системе 77 шестёрок, то шестёрки C не существует (из этого рассуждения[9] также следует, что существует ровно 45 шестёрок, одновременно пересекающих любые две данные непересекающиеся шестёрки, но это далее не понадобится).

Остаётся проверить, что для любых двух пересекающихся шестёрок (т. е. не смежных вершин графа) найдётся ровно две не пересекающиеся с ними шестёрки (т. е. вершины, смежные с двумя данными несмежными). Допустим, что таких шестёрок нашлось три. Их объединение содержит не более 11 элементов (так как объединение двух пересекающихся шестёрок содержит ровно 10 элементов). Но согласно формуле включения-исключения в этом объединении не менее 12 элементов:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C| \geqslant \\ \geqslant 6 + 6 + 6 - 2 - 2 - 2 = 12,$$

так как в каждом пересечении их не более двух.

Покажем теперь, что шестёрок, не пересекающихся с данными двумя, всегда имеется две. Было уже показано, что есть 10 шестёрок, не пересекающихся с данной шестёркой A. Допустим, что 9 из них пересекаются со второй данной шестёркой B. Каждый из них пересекается с ней по одной паре из четырёх элементов (два элемента из B принадлежат A и поэтому не содержатся в этих 9 шестёрках). Таких пар ровно 6, значит, найдётся три пары из этих 9 шестёрок, которые пересекают B по одинаковым парам элементов (три шестёрки, пересекающие B по одной и той же паре элементов, существовать не могут, так как они содержали бы тогда $3 \cdot 4 = 12$ элементов, не принадлежащих ни A, ни B, а таких элементов только 11). Из этих трёх пар элементов две пары пересекаются. Рассмотрим четыре шестёрки, пересекающие B по этим двум парам. В каждой из них оставим 4 элемента, не лежащие ни в A, ни в B. Полученные множества попарно пересекаются по одному элементу, за исключением двух пар, которые не пересекаются. Каждая из этих двух пар в объединении содержит 8 элементов. Полученные восьмёрки в пересечении содержат не более четырёх элементов. Значит, все четыре рассматриваемые четвёр-

[9] На него мне указал И. С. Сергеев.

ки в объединении содержат не менее 12 элементов. Но это невозможно, так как вне A и B находится ровно 11 элементов.

Желающие узнать, как построить систему Штейнера $S(22, 6, 3)$, могут прочитать раздел

3.5. Тройки Штейнера, дизайн Витта и код Голея

Эту систему можно получить из так называемого *дизайна Витта*[10], который состоит из 759 восьмиэлементных подмножеств 24-элементного множества, никакие два из которых не имеют пять общих элементов[11]. Так как каждое восьмиэлементное множество содержит

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 8 \cdot 7 = 56$$

пятёрок, а в 24-элементном множестве пятёрок ровно

$$\binom{24}{5} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{5!} = 4 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = (23 \cdot 11 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 8) = 759 \cdot 56,$$

значит, каждая пятёрка принадлежит ровно одной восьмёрке. Поэтому дизайном Витта можно назвать систему из 759 восьмёрок, накрывающих все пятёрки без перекрытий.

Выделим из всех восьмёрок дизайна Витта те восьмёрки, которые содержат заданные два элемента, и удалим эти элементы из каждой такой восьмёрки. Получим систему шестёрок элементов 22-элементного множества, которая накрывает без перекрытий все тройки (так как каждую тройку можно расширить до пятёрки, добавив два удалённых элемента), а это и есть система Штейнера.

Остаётся вопрос — как построить дизайн Витта? Обозначим через v_1 вектор (11011100010), а через $v_2, \ldots, v_{11}$ все его циклические сдвиги (например, $v_2 = (01101110001)$). Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, 11$, единичные векторы длины 11 и рассмотрим векторы w_i длины 24: $w_i = (1, e_i, 0, v_i)$, $i = 1, \ldots, 11$. Добавим к ним вектор (наполовину из нулей, наполовину из единиц) $w_{12} = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ и рассмотрим все возможные суммы векторов w_i по модулю два. Этих сумм ровно 2^{12} (в том числе и «пустая сумма», равная нулевому вектору). Можно проверить (см. [13]), что все эти суммы различны, и среди них ровно 759 векторов содержат 8 единиц каждый (а векторов с меньшим числом единиц вообще нет, кроме нулевого). Сопоставив каждому из этих векторов восьмёрку его единиц, получим дизайн Витта.

[10] Названного в честь известного немецкого алгебраиста Эрнста Витта (1911–1991).
[11] На это указал мне Ю. В. Таранников.

Если из каждого из этих 2^{12} векторов длины 24 удалить последнюю координату, получим 2^{12} векторов длины 23, образующих *код*[12] *Голея*. Этот код обладает интересным свойством: если для каждого его вектора, рассматриваемого как вершина 23-мерного куба, образовать шар радиуса 3 с центром в ней[13], то полученные 2^{12} шаров попарно не будут пересекаться (это означает, что расстояние между любыми двумя вершинами кода Голея не меньше 7) и их объединение в точности содержит все вершины куба (а каждый шар содержит $1 + 23 + \binom{23}{2} + \binom{23}{3} = 2^{11}$ вершин). За доказательствами отсылаем читателя к [13], хотя он может попытаться получить их и самостоятельно.

§ 4. Графы Мура

Начнём с нескольких задач, которые интересны и сами по себе.

Задача 11. Докажите, что число вершин в графе с максимальной степенью $a > 1$ и диаметром 2 не превосходит $a^2 + 1$. Докажите, что число вершин в графе с максимальной степенью $a > 1$ и диаметром D не превосходит

$$1 + a\sum_{i=0}^{D-1}(a-1)^i.$$

Указание. Пусть a — степень некоторой вершины. Число вершин, лежащих от неё на расстоянии r, не больше $a(a-1)^{r-1}$. Любая вершина удалена от данной на расстояние не больше D.

Напомним, что *обхватом* графа называется длина кратчайшего простого цикла в нём.

Задача 12. Докажите, что число вершин в графе с максимальной степенью $a > 1$ и обхватом 5 не меньше $a^2 + 1$. Докажите, что число вершин в графе с максимальной степенью $a > 1$ и обхватом $2g + 1$ не меньше

$$1 + a\sum_{i=0}^{g-1}(a-1)^i.$$

Указание. Пусть a — степень вершины. Множество M_r вершин, лежащих от неё на расстоянии $r \leqslant g$, содержит ровно $a(a-1)^{r-1}$ вершин,

[12] Открытый в 1949 г. швейцарско-американским математиком Марселем Голеем (1902–1989). Этот код был первым найденным кодом, исправляющим три ошибки.

[13] Этот шар состоит из всех вершин куба, удалённых от центра шара на расстояние не больше трёх.

иначе к двум из них будут идти разные пути длины r, образующие цикл длины не больше $2r < 2g + 1$.

Задача 13. Докажите, что число вершин в графе с диаметром 2 и обхватом 5 (если такой граф существует) равно $1 + a^2$, где a — степень любой его вершины.

Докажите, что число вершин в графе с диаметром d и обхватом $2d + 1$ (если такой граф существует) равно

$$1 + a\sum_{i=0}^{g-1}(a-1)^i,$$

где a — степень любой его вершины.

Указание. Применить задачи 11, 12.

Очевидно, что при $a = 1$ связный регулярный граф состоит из двух вершин, соединяемых ребром.

Графы с диаметром 2 и обхватом 5 называются графами Мура[14)].

Задача 14. Докажите, что граф Мура $(1 + a^2, a, 0, 1)$-сильно регулярный.

Указание. Применить задачу 13.

Задача 15. Докажите, что при $a = 2$ единственным графом Мура является простой цикл длины пять.

Указание. Применить задачу 14.

Теорема 2 (Хофман — Синглтон). *Графы Мура могут существовать только при* $a = 2, 3, 7, 57$.

Доказательство. Согласно задаче 14 граф Мура $(1 + a^2, a, 0, 1)$-сильно регулярный. В силу задачи 15 далее считаем, что $a > 2$. Проверим, что граф не может быть двудольным. Действительно, тогда в каждой доле по $(a^2+1)/2$ вершин. Каждой вершине сопоставляется a смежных с ней вершин в другой доле, которые образуют $a(a-1)/2$ различных пар. Сопоставив эти пары рассматриваемой вершине, заметим, что разным вершинам сопоставляются непересекающиеся множества пар (иначе граф содержал бы цикл длины четыре). Поэтому всем вершинам одной доли сопоставляется $(a^2+1)a(a-1)/4$ различных пар вершин во второй доле. Но это невозможно, так как из второй доли можно образовать только $(a^2+1)(a^2-1)/8$ различных пар вершин. Значит, граф Мура не двудольный.

14) Эдвард Ф. Мур (1925–2003) — американский математик, один из основателей теории автоматов. Поставил задачу о поиске графов, впоследствии названных его именем.

Пусть A — его матрица смежности. Аналогично доказательству теоремы 1 проверяется, что
$$A^2=(a-1)E+J-A$$
(вне главной диагонали элементы A^2 вдвое меньше, чем у матрицы A^2 теоремы 1, а на диагонали — такие же). Полагая $B=A+\frac{1}{2}E$, аналогично получаем равенство
$$B^2=A^2+A+\frac{1}{4}E=\left(a-\frac{3}{4}\right)E+J.$$
Матрица B^2 имеет собственное значение
$$a^2+a+\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$$
кратности 1 и собственное значение $a-3/4$ кратности $v-1=a^2$. Значит, матрица B может иметь только собственные значения $\pm(a+1/2)$, $\pm\sqrt{a-3/4}$. Согласно лемме 1 матрица A имеет собственное значение a кратности 1 и не имеет собственного значения $-a-1$. Значит, матрица $B=A+\frac{1}{2}E$ имеет собственное значение $a+1/2$ кратности 1 и не имеет собственного значения $-a-1/2$, а так как сумма её собственных значений равна её следу, то
$$\frac{v}{2}=\frac{1+a^2}{2}=a+\frac{1}{2}+r\sqrt{a-\frac{3}{4}}-s\sqrt{a-\frac{3}{4}},\quad 1+r+s=v=1+a^2.$$
Поэтому
$$\frac{a^2-2a}{2}=(a^2-2s)\sqrt{a-\frac{3}{4}},$$
значит,
$$s=\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{a^2-2a}{\sqrt{4a-3}}\right).$$
Так как s — целое и $a\neq 2$, число $\sqrt{4a-3}$ рациональное, а значит и целое, т. е. $a=(k^2+3)/4$ с натуральным k. Но так как $\dfrac{a^2-2a}{\sqrt{4a-3}}$ целое, то
$$a(a-2)=\frac{(k^2+3)(k^2-5)}{16}=\frac{k^4-2k^2-15}{16}$$
должно делиться на $\sqrt{4a-3}=k$, поэтому k делит 15, т. е. $k=1,3,5,15$, откуда $a=1,3,7,57$. Случай $a=1$ тривиален. □

При $a=3$ существует только один граф Мура. Это граф Петерсена (рис. 1). Из теоремы 2 следует, что собственные значения его матрицы равны $3, 1, -2$.

Хофман и Синглтон построили граф Мура степени 7 и доказали его единственность. Из теоремы 2 следует, что собственные значения его матрицы равны $7, 2, -3$.

По-видимому, неизвестно, существуют ли графы Мура степени 57.

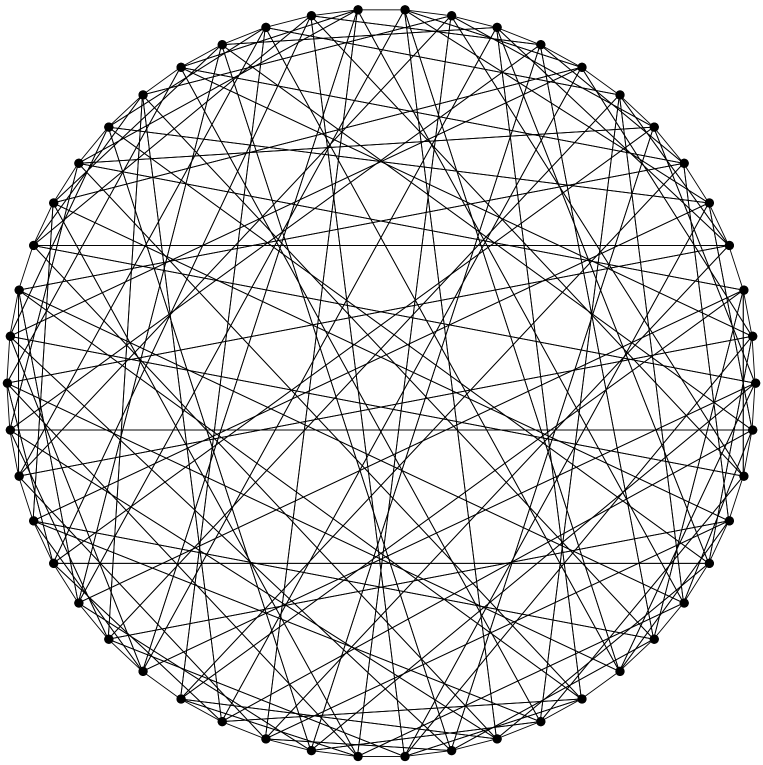

Рис. 4. Изображение графа Хофмана — Синглтона

4.1. Рёберные раскраски полных графов и замечательное свойство числа 6

Задача 16. Полный граф K_{2n+1} можно представить в виде объединения n не пересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов.

Указание. Обозначим его вершины через $v_1, \ldots, v_{2n+1}$. На множестве вершин $v_1, \ldots, v_{2n}$ зададим n не пересекающихся по рёбрам цепей

$$P_i = v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{i-n+1}, v_{i+n-1} v_{i-n},$$

где сложение и вычитание в индексах проводится по модулю $2n$ с таким расчётом, чтобы индексы оставались в области $\{1, 2 \ldots, 2n\}$. При этом j-й по счёту вершиной в цепи P_i будет v_k, где $k = i + (-1)^{j+1} \lfloor j/2 \rfloor$. Потом получаем гамильтоновы циклы C_i из цепей P_i, соединив концы цепи с вершиной $2n + 1$.

Если паросочетание охватывает все вершины графа, оно называется *совершенным паросочетанием*.

Задача 17. Полный граф K_{2n} можно представить в виде объединения не пересекающихся по рёбрам $n-1$ гамильтоновых циклов и одного совершенного паросочетания.

Указание. См. указание к задаче 16.

Задача 18. Полный граф K_{2n+1} 1-факторизуем, т. е. его можно представить в виде объединения не пересекающихся по рёбрам $2n$ совершенных паросочетаний.

Указание. Всё это следует из утверждения задачи 17.

Утверждение задачи 18 можно сформулировать как возможность раскрасить все рёбра полного графа на $2n+1$ вершинах в $2n$ цветов так, чтобы рёбра каждого цвета однократно покрывали все рёбра графа. Это утверждение известно всем организаторам футбольных (и других) чемпионатов, так как оно используется при составлении расписания однокругового турнира. Поэтому далее для краткости любую 1-факторизацию называем просто *факторизацией*, а также (рёберной) раскраской или турниром, а любой 1-фактор — просто *фактором*, а также паросочетанием или туром (тогда его элементы можно называть вместо рёбер матчами).

Следующие задачи принадлежат известному канадскому алгебраисту Хигману[15]. В них указаны некоторые замечательные свойства полного графа на 6 вершинах (а значит, и числа 6).

Задача 19. Граф K_6 имеет ровно 6 один-факторизаций (т. е. существует 6 способов организовать однокруговой турнир 6 команд или 6 рёберных раскрасок), и все они попарно изоморфны. Два непересекающихся фактора содержатся в единственной факторизации (т. е. любые два тура без общих матчей содержатся в одном турнире — иными словами, любые два не пересекающихся паросочетания содержатся в единственной раскраске).

Указание. Рассмотрим произвольную 1-факторизацию. Два непересекающихся 1-фактора образуют 2-фактор, т. е. гамильтонов цикл или объединение непересекающихся циклов. В случае 6 вершин возможен только первый вариант. Вне этого цикла остаются 9 рёбер, 3 из которых можно представлять как длинные диагонали правильного шестиугольника (они образуют фактор), а остальные диагонали образуют два трёхзвенных цикла («звезду Давида»). Любой фактор, состоящий из этих 9 рёбер, содержит хотя бы одну длинную диагональ (звезда Давида не содержит фактора), а так как их три, то остальные три фактора из рассматриваемой факторизации содержат по одной длинной диагонали каждый, при этом

[15] Дональд Гордон Хигман (1928–2006).

они однозначно определяются своими длинными диагоналями. Значит, турнир однозначно определяется любыми двумя своими турами. Один тур можно выбрать ровно 15 способами (первый матч — 15 способами, второй — 6 способами, третий — 1 способом, но надо учесть, что, переставляя выбранные матчи 6 способами, всё равно получаем один тур). После этого второй тур можно выбрать 8 способами (матч для первой команды выбираем 4 способами, после этого есть 2 способа выбрать второй матч), значит, получится $15 \cdot 8$ турниров. Но каждый из них при этом подсчитан $5 \cdot 4$ раз (так как из 5 туров упорядоченную пару туров можно выбрать ровно $5 \cdot 4$ способами). Значит, различных турниров ровно $15 \cdot 8/(5 \cdot 2) = 6$. Их изоморфизм очевиден.

Рассмотрим теперь следующую комбинаторную конфигурацию. Назовём «точками» команды $1, 2, \ldots, 6$ из условного чемпионата города М. (или, если вам это больше понравится, команды Д, С, Ц, Л, Т, Х) и туры (точнее, все способы организовать тур) этого чемпионата. Всего точек будет $6 + 15 = 21$ (см. указание к задаче 19). Назовём блоками все матчи и все турниры (точнее, все способы организовать чемпионат в один круг). Всего блоков, согласно задаче 19, будет тоже $15 + 6 = 21$. Каждому блоку сопоставим точки следующим образом: если блок — это матч, сопоставим ему обе участвовавшие в нём команды и все три тура, в которые может входить этот матч (их три, потому что есть три способа разбить на пары четыре оставшиеся команды), т. е. блоку сопоставляется 5 точек. Если же блок — это турнир, ему сопоставляется все 5 составляющих его туров, т. е. тоже 5 точек. Далее вместо блоков будем говорить о «прямых», состоящих из 5 «точек».

Задача 20. Докажите, что в указанной конфигурации

(i) каждая пара «точек» содержится ровно в одной прямой и любые две «прямые» имеют ровно одну общую «точку»,

(ii) каждая «точка» содержится ровно в 5 «прямых» и каждая «прямая» содержит ровно 5 «точек».

Указание. Две команды однозначно определяют один матч, команда и тур однозначно определяют один матч тура, в котором команда участвовала, два тура либо содержат ровно один общий матч, либо не имеют общих матчей и однозначно определяют содержащий их турнир (см. задачу 19). Значит, каждая пара точек содержится ровно в одной прямой. Два турнира не могут иметь два общих тура (см. задачу 19), для любого турнира и матча найдётся единственный тур турнира, включающий этот матч, поэтому «прямые» пересекаются не более чем по одной «точке». Через каждую «точку» проходит ровно 5 «прямых» (остальных точек ровно 20, и на каждой такой прямой есть ещё 4 точки, причём эти «четвёрки» не пересекаются и каждая из 20 точек входит в одну из «четвёрок»), поэтому каждый тур содержит три матча (очевидно) и входит ровно в два турнира (то, что каждая команда участвовала в 5 матчах, очевидно). Каждая прямая пересекается с 20 прямыми (в каждой своей «точке» с четырьмя), т. е. с каждой другой прямой (всего прямых 21). Значит, каждая пара «прямых» имеет ровно одну «общую точку». Таким образом, любые два матча либо имеют общего участника, либо входят в единственный тур (это и так очевидно), и любые два турнира имеют единственный общий тур.

Конфигурация задачи 20 известна как *конечная проективная плоскость четвёртого порядка*. Известно, что такая плоскость определяется однозначно (с точностью до изоморфизма).

Далее пригодится определяемая ниже двойственность, которую можно установить между графом $A = K_6$ и графом, определённым на множестве X факторизаций графа A (его тоже обозначаем X). Вершин в графе A и различных его факторизаций, согласно задаче 19, ровно 6. Каждому 1-фактору в A (т. е. туру), согласно задаче 20, однозначно сопоставляется пара содержащих его факторизаций (т. е. турниров). Пометим каждый тур этой парой турниров, т. е. ребром в графе X. Каждый матч принадлежит трём турам (потому что остальные четыре команды можно разбить на пары тремя способами), т. е. каждое ребро в графе A принадлежит трём факторам в графе A. Их пометки не пересекаются (иначе был бы турнир, содержащий два тура, имеющих общий матч), т. е. соответствующие три ребра в графе X (три пары факторизаций графа A) образуют паросочетание. Значит, каждому ребру в графе A однозначно сопоставлен фактор в графе X. Каждая вершина в графе A принадлежит 5 рёбрам, каждое из которых однозначно определяет фактор в графе X. Эти факторы образуют факторизацию в графе X. Действительно, если два из них имеют общее ребро в графе X, то оно образовано двумя факторизациями в графе A. Значит, эти факторизации содержат два разных фактора в графе A (факторы разные, так как они содержат каждый по ребру, выходящему из одной вершины графа A, что было бы невозможно в случае совпадения этих факторов), но этого не может быть согласно задаче 20. Таким образом, можно взаимно однозначно сопоставить рёбрам графа A факторы графа X (и тех и других 15), а вершинам графа A — факторизации графа X (и тех и других 6). Если при этом соответствии вершина графа A принадлежит некоторому его ребру, то соответствующий ему фактор графа A содержится в факторизации графа A (т. е. подходящей вершине графа X), соответствующей этой вершине графа A.

Благодаря указанному соответствию можно ввести обозначение

$$(a, b) \sim (x, y),$$

если (a, b) — ребро в графе $A = K_6$, а x, y — факторизации графа A, содержащие фактор в графе A, который содержит ребро (a, b).

4.2. Граф Хофмана — Синглтона

Есть несколько разных конструкций графа Хофмана — Синглтона (однако доказано, что этот граф определён однозначно с точностью до изоморфизма). Далее будет приведена конструкция, принадлежащая Хигману.

Пусть дан граф Мура степени $n+1$. Возьмём в нём произвольное ребро (u, v). Пусть A — множество n вершин, смежных с u (кроме v), а X — множество n вершин, смежных с v (кроме u). Так как в графе нет треугольников, множества A и X не пересекаются. Всякая другая вершина смежна единственной вершине $a \in A$ и единственной вершине $x \in X$. Обозначим её упорядоченной парой (a, x) (путаницы с рёбрами графа не будет, потому что таких рёбер в нём нет). Какие рёбра могут соединять эти вершины? Пусть $((a, x), (b, y))$ — одно из таких рёбер. Очевидно, что тогда $a \neq b$, $x \neq y$ (если, например, $a = b$, то (a, x), (a, y), a — треугольник, что невозможно). Если вершина (a, x) смежна с вершинами (b, y) и (c, z), то $b \neq c$, $y \neq z$ (если, например, $b = c$, то (a, x), (b, y), (b, z), b — цикл длины четыре, что тоже невозможно). Таким образом, при $a, b \in A$, $x \in X$ имеется не более одной вершины $y \in X$, для которой вершины (a, x) и (b, y) смежны.

Задача 21. Докажите, что при $a = 3$ граф Мура единственный.

Задача 22. Докажите (не пользуясь теоремой 2), что при $a = 4$ не существует графа Мура.

Построим граф Мура степени 7. Так как $|A| = |X| = 6$, можно отождествить множество A с множеством вершин графа K_6, а множество X — с множеством его факторизаций (см. п. 4.1). Рассмотрим множество из 36 вершин, обозначенных выше как (a, x). Рёбра, связывающие эти вершины с 14 вершинами из $A \cup X \cup \{u, v\}$, проводим, как было указано выше. Очевидно, что степени этих 14 вершин равны 7. Остаётся провести рёбра между вершинами (a, x) и (b, y). Сделаем это тогда и только тогда, когда $(a, b) \sim (x, y)$ согласно введённому в конце п. 4.1 определению, т. е. когда (a, b) — ребро в графе $A = K_6$, а x, y — факторизации графа A, содержащие фактор, включающий ребро (a, b). Докажем, что вершина (a, x) смежна с 5 вершинами (b, y) (тогда её степень равна 7). Действительно, вершину $b \neq a$ можно выбрать 5 способами, после чего вершина y при данной вершине x выбирается одним способом, так как есть только три пары факторов графа A, содержащих это ребро, и соответственно три пары факторизаций графа A, содержащих эти факторы. При этом в конце п. 4.1 было показано, что эти пары факторизаций не пересекаются, поэтому для любой факторизации x парная ей факторизация y определяется однозначно.

Треугольников с хотя бы одной вершиной в $A \cup X \cup \{u, v\}$ очевидно нет (так как нет рёбер $\langle(a, x), (a, y)\rangle$ и $\langle(a, x), (b, x)\rangle$). Пусть (a, x), (b, y), (c, z) — треугольник с вершинами вне множества $A \cup X \cup \{u, v\}$. Тогда a, b, c и x, y, z — тройки разных вершин, и $(a, b) \sim (x, y)$, $(c, b) \sim (z, y)$, $(a, c) \sim (x, z)$, где x, y, z можно рассматривать как три разные факторизации графа A.

Не ограничивая общность, можно считать фактор $\{(a, b), (c, d), (e, f)\}$ принадлежащим факторизациям x, y, а фактор $\{(b, c), (d, e), (f, a)\}$ принадлежащим факторизациям z, y, где $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ (два непересекающихся фактора в y образуют цикл длины 6). Тогда общий фактор факторизаций x, z, содержащий ребро (a, c), определяется однозначно и совпадает с $\{(a, c), (b, e), (d, f)\}$ (так как (d, e) уже входит в фактор из x; (d, a), (d, c) очевидно не могут входить в фактор вместе с (a, c); (d, b) тоже не может, потому что иначе в фактор входило бы ребро (e, f), входящее в фактор из x). Но этот фактор содержит «длинную диагональ» (b, e) шестиугольника (a, b, c, d, e, f) и поэтому входит в y наряду с указанными выше факторами, объединение которых даёт этот шестиугольник (это было отмечено в конце п. 4.1). Но тогда факторизации y, z (и y, x) имеют два общих фактора, что невозможно (см. опять п. 4.1). Значит, построенный граф не содержит треугольников.

Почему нет в нём и циклов длины 4? Очевидно, что они не могут проходить через вершины u, v. Пусть цикл содержит вершины $a \in A$, (a, x), (a, y), (b, z). Тогда очевидно, что $b \neq a$ (иначе в графе был бы, например, треугольник a, (a, x), (a, z)), а факторизации x, y, z все различны (если, например, $z = y$, то z, (a, z), (b, z) — треугольник). По построению выполнены условия $(a, b) \sim (x, z)$, $(a, b) \sim (y, z)$. Это означает, что некий фактор, содержащий ребро (a, b), принадлежит факторизациям x, z и некий фактор, содержащий ребро (a, b), принадлежит факторизациям y, z. Очевидно оба этих фактора совпадают (разные факторы из одной факторизации z не могут иметь общего ребра), т. е. некий фактор, содержащий ребро (a, b), принадлежит всем трём факторизациям x, y, z. Поэтому, согласно задаче 20, его можно рассматривать как точку проективной плоскости (состоящей из 21 точки), а содержащие его три факторизации — как три прямые, проходящие через эту точку. Кроме этого фактора есть ещё два фактора, содержащие ребро (a, b), и они вместе с вершинами a, b образуют ещё одну прямую, проходящую через этот фактор. Кроме этой прямой через него проходят ещё две прямые, содержащие по три фактора и по две вершины (эти прямые можно провести через этот фактор и любое из двух его рёбер, отличных от (a, b)). Получается, что через выбранную точку рассматриваемой плоскости (т. е. через этот фактор) проходит 6 прямых, а это противоречит утверждению задачи 20. Аналогично рассматривается случай четырёхугольника $x \in X$, (a, x), (b, x), (c, y).

Остаётся рассмотреть возможность существования цикла вида (a, x), (b, y), (c, z), (d, u). Очевидно, что случаи $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = a$ невозможны (не бывает рёбер (a, x), (a, y)) и невозможны случаи $x = y$, $y = z$, $z = u$, $u = y$. Ясно также, что $a \neq c$, $b \neq d$, $x \neq z$, $y \neq u$ (если, например, $a = c$, то существует цикл a, (a, x), (a, z), (d, u), а это, как уже доказано, невозможно). Поэтому a, b, c, d попарно различны, как и x, y, z, u. Согласно определению цикл (a, x), (b, y), (c, z), (d, u) возможен, только когда выполнены соотношения $(a, b) \sim (x, y)$, $(b, c) \sim (y, z)$, $(c, d) \sim (z, u)$, $(a, d) \sim (x, u)$. А это означает, что найдётся фактор, содержащий ребро (a, b), общий для факторизаций x, y; найдётся фактор, содержащий ребро (b, c), общий для факторизаций y, z (значит, y содержит цикл с соседними вершинами a, b, c); найдётся фактор, содержащий ребро (c, d), общий для факторизаций z, u (значит, z содержит цикл с соседними вершинами b, c, d); найдётся фактор, содержащий ребро (d, a), общий для факторизаций u, x (значит, u содержит цикл с соседними вершинами c, d, a, а x содержит цикл с соседними вершинами d, a, b).

Задача 23. Докажите, что указанная ситуация невозможна.

§ 5. Теорема о дружбе

На задачи 4, 5 проливает свет следующая

Теорема 3 (Эрдёш — Реньи — Шош). *Пусть $G = (V, E)$ — граф, в котором любые две вершины имеют ровно одного общего соседа. Тогда в G существует вершина («политик»), смежная всем другим (а эти вершины разбиваются на непересекающиеся пары, и в каждой паре её вершины соединены ребром).*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и получим противоречие. Вначале докажем, что граф G — регулярный (и тогда он будет $(v, a, 1, 1)$-сильно регулярным для некоторой степени a). Потом докажем, что такой граф может быть только треугольником.

Очевидно, что из условия следует отсутствие в графе циклов длины 4 (иначе у какой-то пары было бы два общих знакомых). Докажем вначале, что любые две не смежные вершины u, v имеют равные степени $d_u = d_v$.

Пусть $d_u = a$ и вершины $v_1, \ldots, v_a$ — соседи вершины u. Только одна из них, например v_1, смежна вершине v («общий друг» u и v), а вершине v_1 смежна только одна вершина из $v_2, \ldots, v_a$, например v_2 («общий друг» u и v_1). Вершина v имеет с v_2 общего соседа v_1, с вершиной v_1 — общего соседа z_2, а с остальными вершинами v_i — общих соседей z_i, $i \geqslant 3$. Так как в графе нет циклов длины 4, все вершины $v_1, z_2, z_3, \ldots, z_a$ различны (например, если $z_i = z_j$, то возникает цикл u, v_i, z_i, v_j), а так как они смежны вершине v, то её степень $d_v \geqslant a = d_u$. Аналогично (меняя местами u и v) доказываем, что $d_u \geqslant d_v$, значит, $d_u = d_v$.

Любая вершина $w \neq v_1$ не смежна либо с u, либо с v, значит, согласно доказанному, её степень d_w также равна $a = d_u = d_v$. По предположению найдётся вершина $w \neq v_1$, не смежная с v_1 («нет политика»). Тогда, согласно доказанному, $d_{v_1} = d_w = a$, значит, степени всех вершин равны.

Суммируя степени всех a соседей вершины u, получаем a^2. Так как каждая вершина $v \neq u$ имеет с u ровно одного соседа, то при этом каждая вершина $v \neq u$ была посчитана 1 раз, а вершина u — ровно a раз. Значит, общее число вершин в графе G равно $v = a^2 - a + 1$. Случай $a = 1$ тривиален, а в случае $a = 2$, очевидно, получается треугольник. Покажем, что при $a > 2$ такого графа не существует. Заметим, что он не может быть двудольным, так как у двудольного регулярного графа обе доли равны, значит, число вершин $v = a^2 - a + 1$ должно быть чётным, что очевидно неверно.

Рассмотрим, как и раньше, матрицу смежности A этого графа и её квадрат. По главной диагонали в матрице A^2 стоят числа a, так как в каждой строке и каждом столбце матрицы A ровно a единиц, а остальные нули. Из условия наличия ровно одного общего соседа у любой пары вершин следует, что вне главной диагонали в матрице A^2 стоят единицы. Значит, $A^2 = (a-1)J + E$. Как и в предыдущих доказательствах, делаем вывод, что матрица A^2 имеет только собственные значения $a - 1 + v = a^2$ и $a - 1$, значит, матрица A может иметь только собственные значения $\pm a, \pm\sqrt{a-1}$. Из лемм 1, 2 следует, что собственного значения $-a$ у неё нет, а собственное значение a имеет кратность 1. Пусть кратности собственных значений $\pm\sqrt{a-1}$ равны r и s. Так как матрица A симметрична, то все её собственные значения действительны и сумма их кратностей равна её порядку v, значит, $1 + r + s = v$. Так же как и раньше, замечаем, что сумма всех собственных значений с учётом кратности равна следу матрицы A, т. е. нулю (по главной диагонали у матрицы смежности всегда нули), значит, $a + (r - s)\sqrt{a-1} = 0$. Очевидно $r - s \neq 0$, значит, $\sqrt{a-1} = a/(s-r)$ — рациональное число. Как и в предыдущих доказательствах, отсюда имеем, что $a = 1 + k^2$ при целом k, поэтому $k(s-r) = k^2 + 1$, но $k^2 + 1$ кратно k, очевидно, только при $k = 1$. Значит, $a = 2$, т. е. сильно регулярный $(a^2 - a + 1, a, 1, 1)$-граф существует только при $a = 2$ (и является треугольником). □

Из теоремы 3 вытекает, например, следующее утверждение: если в некоторой компании каждые двое имеют ровно одного общего друга, то число людей в ней нечётно. Это утверждение можно усилить следующим образом.

Задача 24 (С.-Петербург, 1995). В любой компании из чётного числа людей найдутся двое имеющих в ней чётное число общих друзей.

Из задачи 24 следует, что если в классе любые двое имеют нечётное число общих друзей, то численность класса нечётна.

Эту задачу можно решить, применяя матрицы, но есть у неё и элементарное решение, найти которое предоставляем читателю.

§ 6. Задача Московской олимпиады 2012 года

На языке теории графов задача 3 формулируется так: каждые две вершины лежат на единственном цикле длины четыре. Докажем, что граф регулярный (а значит, он будет $(v, a, 2, 2)$-сильно регулярным). Пусть V — любая его вершина, а V_i, $i = 1, \ldots, a$, — её соседи. По условию у вершин V_i, V_j при любых $i \neq j$ найдётся ещё один (кроме V) общий сосед $V_{i,j}$. Все вершины $V_{i,j}$ попарно различны (если $V_{i,j} = V_{k,l}$, то эта вершина вместе с V имеет не менее трёх общих соседей среди V_i, V_j, V_k, V_l). Каждая вершина графа, отличная от V, совпадает с одной из вершин $V_{i,j}$ (поскольку имеет с V двух общих знакомых, например V_i, V_j). Значит, число v вершин в графе равно $1 + a(a-1)/2$. В силу строгой монотонности этого квадратного трёхчлена при $a \geqslant 1$ число a определяется однозначно.

Очевидно, что $(4, 2, 2, 2)$-графом является только полный граф на 4 вершинах. Примером $(16, 6, 2, 2)$-графа является решётчатый граф $L(4)$, вершинами которого являются упорядоченные пары чисел (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 4$, которые соединяются рёбрами тогда и только тогда, когда они имеют общую компоненту. Решётчатый граф $L(n)$ можно рассматривать как граф шахматной доски размера $n \times n$, в котором две клетки соединены ребром, если стоящие на них ладьи угрожают друг другу.

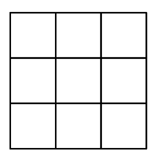

Рис. 5. Решётчатый граф $L(4)$

Задача 25. Проверьте, что граф $L(m)$ — это $(m^2, 2m-2, m-2, 2)$-сильно регулярный граф.

Граф задачи 3 является частным случаем (v, a, k, k)-сильно регулярного графа. При $k = 1$ такие графы изучались в § 5. Оказалось, что они могут быть только треугольниками. Но если отбросить условие регулярности, оставив только условие, что любые две вершины имеют ровно k общих соседей, то при $k=1$ возможны нерегулярные графы, указанные в теореме 3, и других таких графов не бывает. При $k=2$ в задаче 3 показано, что такой граф обязательно регулярный. Можно доказать, что это верно и при любом $k>1$. Рассуждая аналогично §§ 3–5, можно показать, что необходимое условие существования (v,a,k,k)-сильно регулярного графа заключается в целочисленности выражений

$$\frac{1}{2}\left(v-1\pm\frac{a}{\sqrt{a-k}}\right)$$

(эти выражения являются кратностями собственных значений $\pm\sqrt{a-k}$ матрицы смежности этого графа). Из этой целочисленности следует, что $\sqrt{a-k}=u$, где u — целое число, делящее a. Но так как $a=k+u^2$, это возможно, лишь когда u делит k. Таких чисел конечное количество, значит, и (v,a,k,k)-сильно регулярных графов при фиксированном k будет конечное количество. В частности, при $k=2$ может быть только $u=1,2$, т. е. $a=3,6$. В случае $a=3$ имеем $v=1+a(a-1)/2=4$, т. е. получаем граф K_4. В случае $a=6$ имеем $v=a(a-1)/2=16$, и примером такого графа является решётчатый граф $L(4)$.

Но индийский математик Ш. Ш. Шрикханде (р. 1917) в 1959 г. нашёл другой пример $(16,6,2,2)$-сильно регулярного графа и доказал, что этих примеров ровно два (он также доказал, что $(m^2,2m-2,m-2,2)$-сильно регулярный граф при $m\neq 4$ с точностью до изоморфизма существует только один и он совпадает графом $L(m)$ из задачи 25). Граф Шрикханде можно получить следующим образом. Возьмём квадрат и разрежем его на 16 равных квадратов, проведя по три прямые параллельно сторонам квадрата, на равных расстояниях друг от друга. Через полученные точки на сторонах квадрата проведём ещё 6 прямых, параллельных его диагонали, а также проведём и саму диагональ. Проведённые прямые вместе с диагональю и сторонами квадрата образуют 25 точек пересечения, являющихся вершинами 32 равных треугольников, на которые эти прямые его разрезают. Рассмотрим вначале граф с вершинами в этих 25 точках, соединённых рёбрами тогда и только тогда, когда они лежат на одной из проведённых прямых (с учётом сторон и диагоналей) и являются на ней соседями.

Очевидно, что все «внутренние» вершины этого графа имеют степень 6, но степени «граничных» вершин меньше, да и вершин в нём не 16, а 25.

Если две вершины графа смежны и соединяющее их ребро не лежит на границе квадрата, то найдутся два треугольника, у которых это ребро будет общим, и вместе они образуют параллелограмм, ограниченный рёбрами графа (цикл длины четыре, в котором эти две вершины не являются соседними). Некоторые пары несмежных вершин определяют диагональ в подобном же параллелограмме, и поэтому они тоже имеют ровно две вершины, смежные с ними обеими. Однако для двух не смежных вершин не всегда найдутся ровно две вершины, смежные с ними обеими.

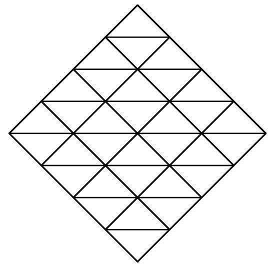

Рис. 6. Граф с 25 вершинами

Чтобы избавиться от всех этих неприятных явлений, отождествим пары вершин, лежащих на противоположных сторонах квадрата, если они лежат на прямой, параллельной другим двум его сторонам. При этом все четыре угловые вершины квадрата «склеятся» в одну вершину, ещё 6 пар вершин также «склеятся», и получим граф с 16 вершинами[16].

Задача 26. Проверьте, что полученный таким образом граф является $(16, 6, 2, 2)$-сильно регулярным графом и, в отличие от графа $L(4)$, не содержит полных подграфов на 4 вершинах[17].

Указание. Внимательно разберитесь со склейками. При склеивании несмежные ранее пары вершин могут стать смежными, т. е. к старым рёбрам добавятся новые (рис. 7). Четыре вершины, до склейки лежавшие на одной прямой, параллельной стороне квадрата, или на его главной диагонали, в новом графе образуют циклы длины четыре (в старом графе они образовывали трёхзвенные цепи). Два больших треугольника, образованные появившимися при склейке линиями, на самом деле содержат по 4 вершины нового графа, образующие циклы длины 4. Ещё два добавленных при склейке ребра вместе с двумя старыми рёбрами образуют ещё один цикл длины 4. Перебирая все пары вершин нового графа, можно проверить, что каждая пара лежит ровно на одном цикле длины 4 и её вершины не являются на нём соседями. У тех пар, для которых такой цикл был уже на старом графе, он будет и на новом, нужно только проверить, что не появится новых таких циклов. У тех пар, для которых такого цикла на старом графе не было, на новом он появится.

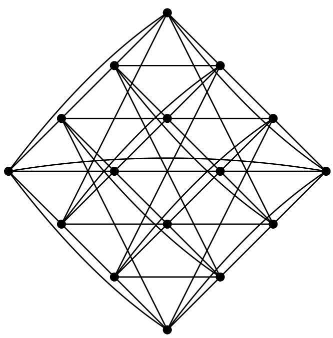

Рис. 7. Граф с 16 вершинами

Таким образом, получаем, что условие (n, a, c, d)-сильной регулярности не всегда определяет граф однозначно с точностью до изоморфизма.

[16] Квадрат при этом превращается в тор.

[17] То есть *клику* из 4 вершин.

Список литературы

[1] *Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из книги. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

[2] *Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П.* Петербургские математические олимпиады. СПб.: Лань, 2005.

[3] *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1986 (есть и поздние издания).

[4] *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[5] *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[6] *Зыков А. А.* Основы теории графов М.: Наука, 1987 (есть и поздние издания).

[7] *Камерон П., ван Линт Дж.* Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М.: Наука, 1980.

[8] *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. М.: Мир, 1998.

[9] Московские математические олимпиады 1958–1967 г. / В. Прасолов и др. М.: МЦНМО, 2013.

[10] Московские математические олимпиады 1981–1992 г. / А. Бегунц и др. М.: МЦНМО, 2017.

[11] *Оре О.* Графы и их применение. УРСС: Ленанд, 2015.

[12] *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980.

[13] *Таранников Ю. В.* Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии. М.: МЦНМО, 2011.

[14] *Татт У.* Теория графов. М.: Мир, 1988.

[15] Теория графов. Сборник переводов / Под ред. В. Б. Алексеева, Г. П. Гаврилова, А. А. Сапоженко. М.: Мир, 1974.

[16] *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977 (есть и поздние издания).

[17] *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973 (есть и поздние издания).

[18] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[19] *West D.* Introduction to graph theory. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Inc., 2001.

Сергей Борисович Гашков, мехмат МГУ

sbgashkov@gmail.com