Целые точки в многоугольниках и многогранниках

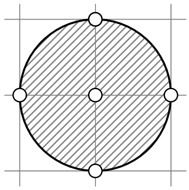
Г. А. Мерзон

Как найти площадь многоугольника на клетчатой бумаге? Если достаточно приблизительного ответа, то можно просто посчитать количество клеток, которые он занимает.

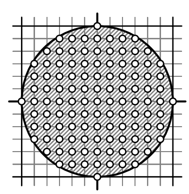
Чудесным образом эта нехитрая идея приводит и к *точным* формулам для площадей многоугольников и объёмов многогранников, вершины которых имеют целочисленные координаты. А возникающая *теория Эрхарта* оказывается применима в разных задачах алгебры и комбинаторики, в которых никаких геометрических фигур, на первый взгляд, не видно.

§1. Площадь и число целых точек

Пусть P — фигура на клетчатой бумаге, где каждая клетка имеет площадь 1. Грубую оценку для площади фигуры даёт количество занимаемых ею клеток, или, что примерно то же самое, число N_P узлов сетки, накрываемых P: $S_P \approx N_P$. Чтобы повысить точность этой оценки, можно посмотреть на сетку с более мелкими клетками. Пусть линии новой сетки идут на расстоянии $1/n$ друг от друга. Тогда площадь новой клетки равна $1/n^2$, и если P накрывает $N_P(n)$ узлов новой сетки, то $S_P \approx N_P(n)/n^2$. С ростом n мы получаем сколь угодно точное приближение к площади.



$n = 1,\ \ S_P \approx 5$



$n = 6,\ \ S_P \approx 3{,}139$

Предложение 1. $\dfrac{N_P(n)}{n^2} \to S_P \ (n \to \infty)$.

Вместо того чтобы измельчать сетку, можно увеличивать фигуру P: $N_P(n)$ есть количество узлов сетки, накрываемых фигурой nP, получающейся из P гомотетией с коэффициентом n (и центром в одном из узлов сетки).

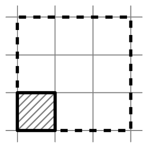
§ 2. Многочлен Эрхарта многоугольника

Далее P будет *многоугольником с вершинами в узлах сетки*. Чтобы превратить предложение 1 в формулу для площади, надо изучить, как $N_P(n)$ зависит от n. Начнём с примеров.

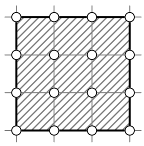
Пример 1. Пусть P — единичный квадрат. Тогда nP — квадрат со стороной n и $N_P(n) = (n+1)^2$. Видно, что выражение

$$\frac{N_P(n)}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

действительно стремится к 1, площади квадрата.



$P \mapsto 3P$



$N_P(3) = (3+1)^2$

Вообще, для прямоугольника $a \times b$

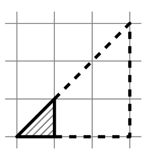
$$N_P(n) = (an+1)(bn+1) = (ab)n^2 + (a+b)n + 1,$$

и видно, что $N_P(n)/n^2$ стремится к ab.

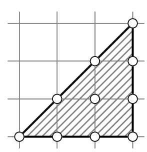
Пример 2. Пусть P — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1. Треугольник nP накрывает

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

узел сетки, и $\dfrac{N_P(n)}{n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \to \dfrac{1}{2} = S_P$.

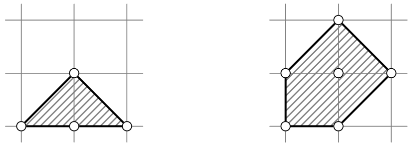


$P \mapsto 3P$



$N_P(3) = 1+2+3+4$

Упражнение 1. Найдите функции N_P для треугольника и пятиугольника на рисунке ниже.



На основании этих примеров можно предположить, что верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть P — многоугольник с вершинами в узлах сетки. Для натурального n определим $N_P(n)$ как число узлов сетки, которое накрыто многоугольником nP. Тогда*

1) *N_P — многочлен степени 2 с рациональными коэффициентами* (многочлен Эрхарта многоугольника P);
2) *старший коэффициент многочлена N_P равен площади многоугольника*;
3) *свободный член многочлена N_P равен* 1.

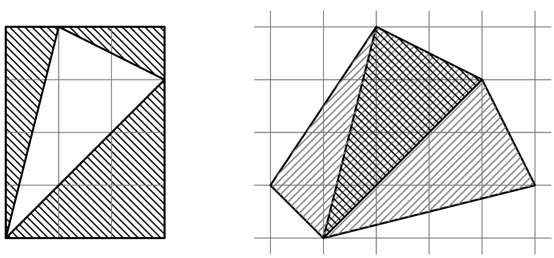
Подчеркнём, что основная часть теоремы — утверждение о полиномиальности функции N_P: в силу предложения 1 отсюда сразу следует и то, что это многочлен именно степени 2, и то, что его старший коэффициент равен площади.

Нетрудно из этой теоремы получить и явную формулу для площади: это один из двух неизвестных нам коэффициентов многочлена степени 2, так что его можно выразить через значения этого многочлена в каких-нибудь двух точках. Например, следующим образом.

Предложение 2. *Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то* $S_P = \frac{1}{2}(N_P(2) - 2N_P(1) + 1)$.

Из этой формулы видно, в частности, что *площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целой или полуцелой*, а это априори не очевидно даже для треугольников: представьте себе вычисление их площади по формуле Герона…

Обычный способ доказать полуцелочисленность площади — заметить, что любой треугольник можно получить, отрезая от прямоугольника прямоугольные треугольники (для которых утверждение очевидно), а любой многоугольник можно разрезать на треугольники (см. рис.).



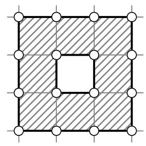
Такой план работает и для доказательства формулы для площади из предложения 2 (подробнее об этом можно прочитать в статье [1]), и для доказательства самой теоремы.

Упражнение 2. Докажите, что для (незамкнутой) ломаной $N_P(n)$ — многочлен степени 1 со свободным членом 1.

Упражнение 3. Докажите теорему 1 а) для прямоугольников со сторонами по линиям сетки; б) для прямоугольных треугольников с катетами по линиям сетки; в) для произвольных треугольников; г) для произвольных многоугольников.

Отметим здесь одну тонкость: для доказательства того, что свободный член многочлена Эрхарта равен 1, существенно, что P — это настоящий многоугольник. В более общем случае (если разрешены «многоугольники с дырками» и т. п.) свободный член равен *эйлеровой характеристике* фигуры P.

Упражнение 4. Найдите многочлен Эрхарта для «рамки» (см. рис.).



Верен и естественный аналог теоремы 1 для многогранников с вершинами в «целых» (имеющих целочисленные координаты) точках: количество $N_P(n)$ целых точек внутри многогранника nP зависит от n как многочлен степени 3, старший коэффициент которого равен объёму многогранника P.

Но вот план доказательства из упражнения 3 в этом случае не работает. Дело в том, что на плоскости любые две фигуры одной площади *равносоставлены* (одну можно разрезать на части и сложить из них другую), но в пространстве это уже не так: как доказал в начале XX века М. Ден, почти никакая треугольная пирамида не равносоставлена с параллелепипедом[1]. Поэтому на плоскости утверждение теоремы по сути достаточно проверить для единичного квадрата, но в пространстве это уже не работает.

В § 4 мы обсудим другое доказательство теоремы 1, которое без труда переносится и на многогранники.

§ 3. Взаимность и формула Пика

Число $N_P(n)$ было определено только для натуральных n. Но коль скоро оно зависит от n как многочлен, в этот многочлен можно формально подставлять и отрицательные n. Попробуем понять, какой смысл имеют получающиеся в результате этой странной процедуры числа.

[1] Про это можно прочитать в статье [4].

Снова начнём с примеров. Для прямоугольника $a \times b$ имеем

$$N_P(n) = (an+1)(bn+1),$$

а значит,

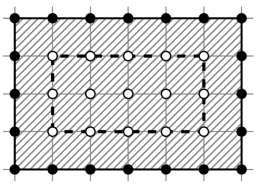
$$N_P(-n) = (-an+1)(-bn+1) = (an-1)(bn-1).$$

Таким образом, мы снова получили количество точек в прямоугольнике, но немного меньшем (каждую сторону нужно уменьшить на 2).

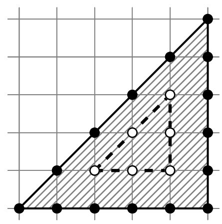
Для равнобедренного прямоугольного треугольника

$$N_\triangle(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$N_\triangle(-n) = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ тоже число точек в треугольнике, но чуть меньшем.



$N_P(2)$ и $N_P(-2)$



$N_\triangle(5)$ и $N_\triangle(-5)$

Теорема 2. *Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то значение $N_P(-n)$ многочлена Эрхарта в целой отрицательной точке равно количеству целых точек* строго внутри *многоугольника nP.*

Вместе с теоремой 1 эта *теорема взаимности* составляет двумерный случай *теоремы Эрхарта — Макдональда*. Про доказательство мы поговорим в следующем параграфе.

Если $N_P(n) = Sn^2 + \frac{b}{2}n + 1$, то $N_P(-n) = Sn^2 - \frac{b}{2}n + 1$. Эти два числа отличаются на bn. Таким образом, на границе многоугольника nP лежит bn узлов сетки. Другими словами, *коэффициент при n в многочлене Эрхарта — это половина количества узлов сетки на границе многоугольника P*. Теперь легко выразить площадь многоугольника S через количество узлов $N(-1)$ строго внутри него и количество узлов b на его границе.

Предложение 3 (формула Пика[2)]). *Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то*

$$S_P = i_P + \frac{b_P}{2} - 1,$$

[2)] У формулы Пика есть множество разных доказательств. Моё любимое доказательство — с тающим льдом ([5]) — можно прочитать в статьях [3, 8].

где i_P — число узлов сетки внутри многоугольника, b_P — число узлов сетки на его границе.

Можно сказать, что если формула для площади из предложения 2 выражала её через $N_P(0)$, $N_P(1)$, $N_P(2)$, то эта формула выражает площадь через $N_P(0)$ и $N_P(\pm 1)$:

$$S_P = \frac{N_P(1) + N_P(-1)}{2} - N_P(0).$$

Теперь понятно, что не стоит ожидать полного аналога формулы Пика для многогранников: если бы объём можно было выразить через количество целых точек внутри многогранника и на его границе, это значило бы, что мы можем найти старший член кубического многочлена N_P — т. е. один из *четырёх* его коэффициентов — по значениям этого многочлена всего в *трёх* точках (± 1 и 0).

Упражнение 5. Рассмотрим *тетраэдр Рива* — треугольную пирамиду, основание которой — половина единичного квадрата, а вершина находится над четвёртой вершиной квадрата на высоте h, т. е. вершины имеют координаты $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, h)$.

а) Убедитесь, что эта пирамида не содержит никаких целых точек, кроме своих вершин, но при изменении h её объём меняется.

б) Найдите многочлен Эрхарта такой пирамиды.

Последнее упражнение показывает, что даже если знать, сколько точек на границе лежат внутри граней, а сколько на рёбрах и т. д., этого не достаточно для нахождения объёма. Зато можно выразить объём через значения многочлена Эрхарта в четырёх точках.

Упражнение 6. Выведите из теоремы Эрхарта, что если P — многогранник с целыми вершинами, то его объём равен

$$\frac{N_P(3) - 3N_P(2) + 3N_P(1) - 1}{6}.$$

Можно найти и формулу для объёма, больше похожую на классическую формулу Пика.

Упражнение 7. Выразите объём многогранника P с целыми вершинами через b_P, i_P и i_{2P}, где i_{2P} обозначает количество узлов *вдвое меньшей решётки* внутри многогранника.

§ 4. Доказательство теоремы Эрхарта — Макдональда

Как доказать, что последовательность чисел представляет собой последовательность значений многочлена степени k? Если $k = 0$, то условие состоит в том, что последовательность постоянна, т. е. соседние члены равны. Если $k=1$, это арифметическая прогрессия, т. е. разность между соседними членами постоянна. Можно продолжать в том же духе и дальше.

Лемма 3. *N является многочленом степени k тогда и только тогда, когда его* разностная производная ΔN — *многочлен степени $k-1$. (По определению $\Delta N = N(n+1) - N(n)$.)*

Доказательство. В одну сторону утверждение доказать легко: $\Delta n^k = (n+1)^k - n^k$ — многочлен степени $k-1$ (это видно из формулы бинома Ньютона или просто из формулы для $a^k - b^k$); а раз каждый из мономов переходит в многочлен на единицу меньшей степени, то (поскольку $\Delta(F+G) = \Delta F + \Delta G$) и степень любого многочлена уменьшается на 1.

Утверждение в другую сторону нам сейчас нужно только для $k=2$, а это совсем просто:

$$N(n)=N(n-1)+\Delta N(n-1)=\ldots=N(0)+\Delta N(0)+\Delta N(1)+\ldots+\Delta N(n-1),$$

т. е. $N(n)$ — это сумма арифметической прогрессии ΔN плюс константа $N(0)$, а значит, $N(n)$ действительно является многочленом степени 2.

Доказательство общего случая — непосредственно связанное с суммами $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ — можно найти, например, в разделе 1 заметки [2]. (Или докажите его самостоятельно; указание: для многочлена P степени $k-1$ запишите условие $\Delta N = P$ как систему уравнений на коэффициенты многочлена N и убедитесь, что она всегда имеет решение.) $\square$

Избавляясь от рекурсии, можно переформулировать этот критерий полиномиальности следующим образом.

Предложение 4. *N является многочленом степени k тогда и только тогда, когда после не более чем $(k+1)$-кратного применения разностной производной он обращается в нуль, т. е. $\Delta^{k+1} N = 0$.*

Это утверждение, кстати, делает понятнее и формулу для площади из предложения 2: если нас интересует старший коэффициент многочлена степени 2, то с точностью до множителя правильный ответ даётся выражением $\Delta^2 N(0)$ (все мономы меньшей степени при применении Δ^2 уничтожаются), а $\Delta^2 N(0) = N(2) - 2N(1) + N(0)$.

Аналогичным образом формула из упражнения 6 связана с обращением в нуль выражения $\Delta^3 N$ для многочленов степени 2.

Теперь мы готовы доказать теорему Эрхарта — Макдональда для многоугольников. Нам осталось доказать следующее утверждение (включающее в себя и полиномиальность функции N_P, и утверждение о значении этого многочлена в нуле, и «взаимность» для значений в отрицательных точках).

Теорема 4. *Пусть P — многоугольник с вершинами в узлах сетки. Тогда функция, определённая в целых точках как*

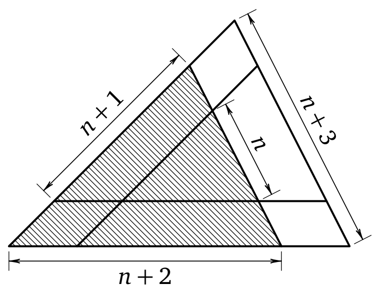
$$N_P(n)=\begin{cases}\text{\textit{число целых точек, накрываемых фигурой} } nP, & n>0;\\ 1, & n=0;\\ \text{\textit{число целых точек строго внутри фигуры} } (-n)P, & n<0,\end{cases}$$

является многочленом степени 2.

Напомним, что nP — это результат гомотетии фигуры P с коэффициентом n. Подчеркнём, что функция $N_P(n)$ определяется только для целых n.

Доказательство (набросок). Для числа целых точек имеет место *аддитивность*: если фигура P покрыта фигурами P_1 и P_2, пересекающимися по фигуре X, то $N_P=N_{P_1}+N_{P_2}-N_X$. Так как любой многоугольник можно разрезать на треугольники, а про многочлены Эрхарта отрезков (и вообще ломаных — см. упражнение 2) мы всё знаем, по существу достаточно доказать утверждение теоремы в случае, когда P — треугольник с вершинами в узлах сетки.

В этом случае равенство $\Delta^3 N_P=0$ имеет замечательное комбинаторно-геометрическое доказательство[3)].



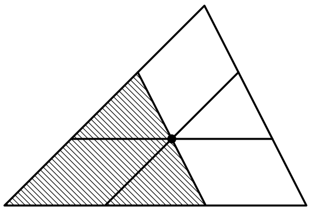
На рисунке треугольник $(n+3)P$ покрыт тремя треугольниками $(n+2)P$ (один такой треугольник заштрихован). Поэтому для подсчёта узлов сетки, покрываемых большим треугольником, можно применить формулу включений-исключений:

$$N_P(n+3)=3N_P(n+2)-3N_P(n+1)+N_P(n).$$

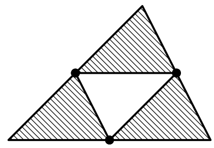
Это и есть равенство $\Delta^3 N(n)=0$ для натуральных n.

[3)] Такое доказательство теоремы Эрхарта — Макдональда придумал Стивен Сэм — см. статью [7].

Если на той же картинке посчитать только узлы строго внутри треугольников, получится доказательство того же равенства в случае $n+3<0$. Остаётся разобрать случаи, когда одно из чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ обращается в нуль. Ограничимся соответствующими двумя картинками.



$N(3)=3N(2)-3N(1)+1$



$N(2)=3N(1)-3+N(-1)$ □

Хотя доказательство опиралось на картинки с треугольниками, ничего специфически двумерного в нём нет.

Упражнение 8. Пусть P — треугольная пирамида, вершины которой имеют целые координаты.

а) Докажите, что $\Delta^4 N_P(n)=0$ для целых нетрицательных n.

б) Как определить функцию N_P в целых отрицательных точках, чтобы равенство $\Delta^4 N_P(n)=0$ выполнялось для всех целых n?

Как и в плоском случае, отсюда следует, что для треугольной пирамиды функция N_P является многочленом (теперь уже степени 3), а в силу аддитивности то же верно и для произвольного многогранника с целыми вершинами.

§ 5. Целые точки в многомерных многогранниках

Теорема 4 и её доказательство переносятся без существенных изменений на многогранники с вершинами в целых точках *в пространстве любой размерности*.

Теорема 5. *Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^k$ с целыми* (*имеющими целые координаты*) *вершинами. Для натурального n определим $N_P(n)$ как число целых точек, содержащихся в многогогrраннике nP. Тогда*

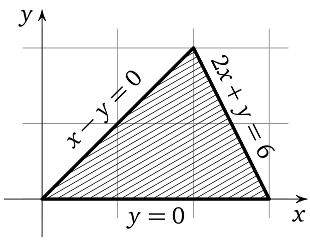
1) *N_P — многочлен степени k с рациональными коэффициентами* (многочлен Эрхарта);
2) *старший коэффициент этого многочлена равен объёму многогранника*;
3) *свободный член многочлена Эрхарта равен* 1;
4) *поскольку N_P — многочлен, в него можно формально подставлять и отрицательные числа, а именно*: $N_P(-n)=(-1)^k I_P(n)$, *где* $I_P(n)$ —

количество целых точек строго внутри многогранника nP (взаимность Эрхарта — Макдональда).

Эта теорема была открыта математиком-любителем Е. Эрхартом в начале 1960-х годов, но утверждение 4 теоремы он доказал лишь частично; завершил доказательство взаимности И. Макдональд уже в 1970-х годах.

Не очень понятно, наверное, как себе представлять геометрические объекты в многомерном пространстве, — но не составляет большого труда дать их аналитические (координатные) определения.

Напомним, что точка k-мерного пространства $\mathbb{R}^k$ — это просто упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_k)$ из k вещественных чисел; мы называем точку *целой*, если все её координаты целые. *Выпуклые многогранники* (а про невыпуклые многогранники мы говорить не будем) задаются системами *линейных неравенств*, т. е. неравенств вида $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k \leqslant c$. Переход к многограннику nP соответствует домножению правой части каждого из неравенств на n.



$$\longleftrightarrow \quad \begin{cases} -y \leqslant 0; \\ y - x \leqslant 0; \\ 2x + y \leqslant 6. \end{cases}$$

Если в данной точке какое-то из неравенств обратилось в равенство, то говорят, что эта точка лежит на *грани* нашего многогранника (а если в данной точке выполняются все строгие неравенства — что она лежит строго *внутри* многогранника).

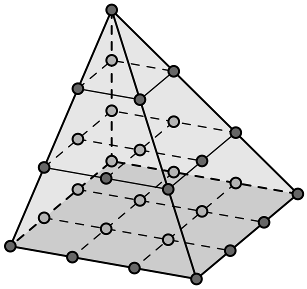
Пример 3. Единичный квадрат можно задать неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Единичный куб — неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Естественно определить *k-мерный куб* как многогранник в $\mathbb{R}^k$, заданный системой неравенств $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, k)$.

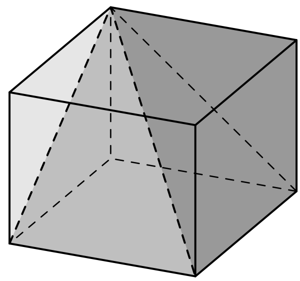
После растяжения в n раз получаются неравенства $0 \leqslant x_i \leqslant n$. Поэтому каждая из координат может принимать $n + 1$ целое значение и $N_P(n) = (n+1)^k = n^k + \ldots + 1$.

В частности, старший коэффициент этого многочлена равен 1, что соответствует тому, что единичный куб имеет единичный объём.

После такой разминки перейдём к более содержательным примерам — двум разным многомерным аналогам равнобедренного прямоугольного треугольника $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$.

Пример 4. Пусть P — это пирамида, основание которой — единичный квадрат, а высота попадает в одну из вершин этого квадрата и имеет длину 1. Тогда пирамида nP содержит $1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2$ целых точек.





Таким образом,

$$N_P(n)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1.$$

То, что старший коэффициент (т. е. объём пирамиды) равен $1/3$, отлично согласуется с тем, что из трёх таких пирамид можно сложить куб.

Такую пирамиду можно задать неравенствами $0\leqslant x\leqslant z\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant z\leqslant 1$. Хорошо видно, что сечение плоскостью $z=c$ — это действительно квадрат $c\times c$. А разбиение куба на три такие пирамиды — это его разбиение на части, где максимальной координатой является x, y или z.

Аналогично можно рассмотреть в пространстве размерности $k+1$ пирамиду P, задаваемую неравенствами $0\leqslant x_i\leqslant x_0\leqslant 1$ $(i=1,\ldots,k)$. Единичный куб разбивается на $k+1$ такую пирамиду (соответствующие тому, какая из $k+1$ координаты в данной точке куба максимальная). Сечение пирамиды nP плоскостью $x_0=m$ представляет собой k-мерный куб $0\leqslant x_i\leqslant m$, в котором $(m+1)^k$ целых точек. Таким образом,

$$N_P(n)=1^k+2^k+\ldots+(n+1)^k=:S_k(n+1).$$

Значит, сумма k-х степеней последовательных чисел — многочлен степени $k+1$ от n со старшим членом $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$. В частности,

$$S_k(n)\approx\frac{1}{k+1}n^{k+1}.$$

А из взаимности следует, например, что $S_k(n)$ для нечётного k является многочленом от $n(n+1)/2$ (подробности можно найти в разделе 4 заметки [2] или попробовать восстановить самостоятельно) — это можно считать обобщением известной формулы

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2.$$

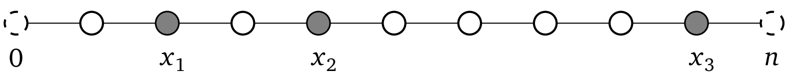
Вообще, если в первых параграфах мы хотели выразить площадь многоугольника через количество целых точек, то в многомерном случае обычно наоборот: проще вычислить объём, а более интересно количество целых точек.

С многогранниками и целыми точками в них связаны многие классические задачи перечислительной комбинаторики от нахождения числа магических квадратов до нахождения числа деревьев. Здесь приведём только самый простой пример.

Пример 5. В примере 4 мы разбивали куб на части согласно тому, какая из координат максимальна. Разобьём теперь куб на более мелкие части, соответствующие тому, в каком порядке идут величины координат. Таким образом, многогранник P задаётся неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant 1$.

Упражнение 9. Как выглядит многогранник $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$?

Куб в $\mathbb{R}^k$ разбивается на $k!$ таких многогранников (соответствующих разным перестановкам индексов), поэтому объём многогранника P равен $1/k!$. Найдём число целых точек *строго внутри* многогранника nP. Это число решений неравенств $0 < x_1 < \ldots < x_k < n$, другими словами, количество k-элементных подмножеств множества $\{1, \ldots, n-1\}$.



Получаем, что

$$I_P(n) = \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}.$$

Отметим, что это действительно многочлен от n степени k со старшим коэффициентом $1/k!$.

Подставим в этот многочлен формально $-n$:

$$I_P(-n) = \frac{(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-k)}{k!} = (-1)^k\binom{n+k}{k}.$$

С другой стороны, взаимность сообщает нам комбинаторный смысл получившегося выражения: поскольку $(-1)^k I_P(-n) = N_P(n)$, мы получили, что $\binom{n+k}{k}$ — это число решений неравенств $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant n$, т. е. число способов выбрать k *возможно повторяющихся* элементов из $(n+1)$-элементного множества. Получилось нетривиальное комбинаторное утверждение. Обозначив через $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ количество способов выбрать k элементов (возможно, повторяющихся) из n-элементного множества, можно записать

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Подобным образом можно доказывать и более сложные комбинаторные теоремы взаимности — например, для хроматических многочленов графов.

О множестве других сюжетов, связанных с целыми точками в многогранниках, можно прочитать в книге [6].

Благодарности

Автор благодарен Гаянэ Паниной и Фёдору Петрову за высказанные замечания.

Список литературы

[1] *Кушниренко А. Г.* Целые точки в многоугольниках и многогранниках // Квант. 1977. № 4. С. 13–20.
http://kvant.mccme.ru/1977/04/celye_tochki_v_mnogougolnikah.htm

[2] *Мерзон Г. А.* Алгебра, геометрия и анализ сумм степеней последовательных чисел // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017. С. 104–118. http://dev.mccme.ru/~merzon/pscache/bernoulli-mp.pdf

[3] *Мерзон Г. А.* Формула Пика и тающий лёд // Квант. 2018. № 9.

[4] *Фукс Д. Б.* Можно ли из тетраэдра сделать куб? // Квант. 1990. № 11. С. 2–11.
http://kvant.mccme.ru/1990/11/mozhno_li_iz_tetraedra_sdelat.htm

[5] *Blatter C.* Another proof of Pick's area theorem // Math. Magazine. 1997. Vol. 70, № 3. P. 200.

[6] *Beck M.*, *Robins S.* Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra. New York: Springer, 2015.

[7] *Sam S. V.* A bijective proof for a theorem of Ehrhart // Amer. Math. Monthly. 2009. Vol. 116, № 8. P. 688–701. arXiv:0801.4432.

[8] *Tabachnikov S.* Proofs (not) from the Book // Math. Intelligencer. 2014. Vol. 36, № 2. P. 9–14.

Григорий Александрович Мерзон, МЦНМО, НИУ ВШЭ
merzon@mccme.ru