Восстановление многоугольников по проекциям вершин на прямые

О. И. Голембовский

Речь в этой статье пойдёт о возможности восстановления n точек на плоскости по их ортогональным проекциям на k наперёд заданных прямых. Вначале мы решим задачу (так сказать, разминочную), в которой нужно восстановить точки по их проекциям на две прямые. Далее будет установлена зависимость количества требуемых прямых от количества восстанавливаемых точек. После этого мы найдём все конфигурации точек с максимальным возможным количеством прямых, когда точки не восстанавливаются по проекциям. В конце статьи мы разберём трёхмерный аналог данной задачи (восстановление точек пространства по проекциям на плоскости).

Вступление

Рассмотрим следующую задачу. На плоскости выбраны произвольные конфигурации n точек и k прямых. Для каждой прямой определено мультимножество ортогональных проекций точек конфигурации. Требуется выяснить, можно ли однозначно восстановить точки по этим мультимножествам.

Заметим, что информация, которую мы можем извлечь из мультимножества конкретной прямой, не меняется при её параллельном переносе. В дальнейшем нам будет удобнее говорить не о проекциях на прямые, а о проекциях вдоль направлений (перпендикулярных соответствующим прямым).

Если среди прямых конфигурации есть параллельные, то они дают нам одну и ту же информацию. В дальнейшем будем считать, что *параллельных прямых в конфигурации нет*.

Автор написал эту работу, будучи учеником Ужгородской общеобразовательной школы-интерната с углублённым изучением отдельных предметов.

§ 1. Случай двух прямых

В данном параграфе рассмотрим случай двух прямых. Нас интересует, какие конфигурации точек мы можем восстановить по проекциям на них.

Для удобства будем считать, что направления, вдоль которых мы проектируем, — вертикальное и горизонтальное (в противном случае можем использовать аффинное преобразование плоскости).

Важно, что мы имеем дело с мультимножествами (каждую проекцию мы считаем столько раз, сколько точек в неё проектируется). Можно считать, что проекции «подписаны» количествами спроектированных точек.

Здесь a_i обозначает количество первоначальных точек, которые проектировались в i-ю точку на горизонтальной прямой. Аналогично b_i — количество точек, которые проектируются в i-ю точку на вертикальной прямой (рис. 1).

Будем говорить, что если точка A проектируется в i-ю точку по горизонтальной прямой и j-ю по вертикальной, то A имеет координаты $(i; j)$.

Возьмём все точки некоторого набора P с первой координатой x_i, пусть $y_\alpha, y_\beta, y_\gamma, \ldots$ — вторые координаты этих точек. Множество $\{y_\alpha; y_\beta; y_\gamma; \ldots\}$ обозначим $P(x_i)$.

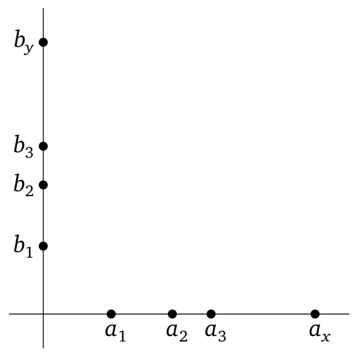

Рис. 1

Лемма 1. *Если набор P можно однозначно восстановить, то для любых i, j выполнено соотношение $P(x_i) \subseteq P(x_j) \vee P(x_j) \subseteq P(x_i)$.*

Доказательство (от противного). Рассмотрим множества $P(x_i)$, $P(x_j)$. Допустим, в $P(x_i)$ есть элемент y_n, которого нет в множестве $P(x_j)$, а в множестве $P(x_j)$ есть элемент y_m, которого нет в $P(x_i)$. Тогда возьмём точки $(x_i; y_n)$ и $(x_j; y_m)$ и заменим их точками $(x_i; y_m)$ и $(x_j; y_n)$. Заметим, что получившийся набор даёт те же проекции, что и первоначальный. Значит, мы не можем однозначно восстановить эти точки, что противоречит требованию леммы. $\square$

Отсортируем числа a_i в убывающем порядке. Теперь лемму 1 можно перефразировать так: *в наборе, который можно однозначно восстановить, количество чисел b_i, не меньших k, совпадает с a_k.*

Верно и обратное:

Теорема 1. *Набор P можно однозначно восстановить по его проекциям на две прямые тогда и только тогда, когда количество чисел b_i, не меньших k, совпадает с a_k.*

Доказательство. Выше мы доказали необходимость условия, теперь докажем его достаточность. Проведём индукцию по количеству точек на горизонтальной прямой, в которые проектируются точки набора. За базу индукции можно взять 0. Пусть теперь на вертикальной прямой есть $y > 0$ точек, куда проектируются точки набора. Возьмём точки, которые проектируются в первую точку горизонтальной прямой (куда проектируется наибольшее количество точек). Мы можем однозначно определить, где они находятся. А именно, строим перпендикуляр l к горизонтальной прямой в этой точке, а также перпендикуляры к вертикальной прямой во всех точках, где есть проекции (рис. 2). Отмечаем кружками точки пересечения. Обратим внимание, что, во-первых, все точки конфигурации, лежащие на прямой l, будут отмечены кружками, а во-вторых, все кружки будут использованы. Мы однозначно восстановили часть точек конфигурации, поэтому мы можем «стереть» все уже известные точки и внести соответствующие изменения в список проекций, после чего получим новую задачу меньшего размера о восстановлении точек по их проекциям. Для этой задачи условия теоремы по-прежнему выполняются. По предположению индукции, конфигурация точек для новой задачи однозначно восстанавливается. □

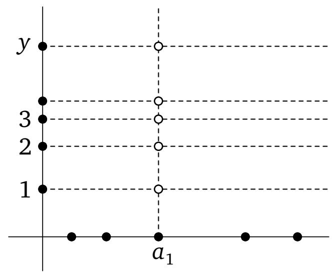

Рис. 2

§ 2. Случай n точек

В этом параграфе мы выясним, сколько необходимо прямых для того, чтобы при любом расположении мы могли восстановить наши n точек. *Обозначим это количество* $f(n)$. Логично начать с маленьких n. Очевидно, что $f(1) = 2$. Чуть сложнее случай $n = 2$. Двух прямых недостаточно (контрпример — две противоположные вершины квадрата, которые будем проектировать на прямые его сторон. Две другие вершины дают те же проекции). Но пока неясно, почему трёх прямых хватит. Аналогично для $n = 3$ и $n = 4$ можно найти примеры, когда не хватает трёх и четырёх прямых соответственно (рис. 3).

Для произвольного n такой пример тоже есть. В правильном $2n$-угольнике возьмём вершины, идущие через одну. Таким способом получаются два правильных n-угольника. Два этих набора дают одинаковые проекции на прямые, перпендикулярные сторонам $2n$-угольника. На рис. 4 показан пример для $n = 5$.

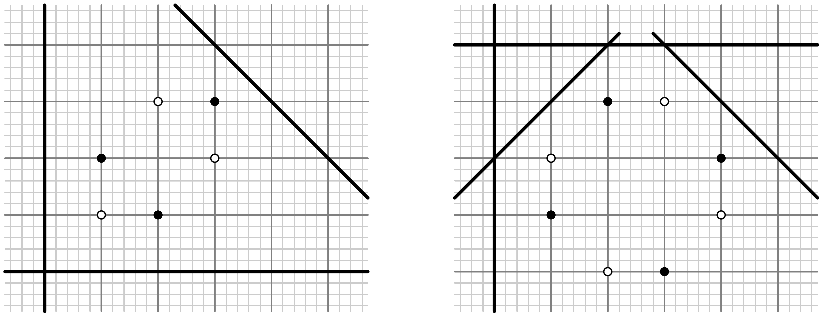

Рис. 3

Лемма 2. *Пусть набор P состоит из точек A_i, а набор P' — из точек B_i, $i \in [1; n]$, и пусть эти наборы дают одинаковые мультимножества проекций на прямую l. Тогда точки можно разбить на пары $(A_i; B_j)$ так, чтобы прямые A_iB_j были перпендикулярны l.*

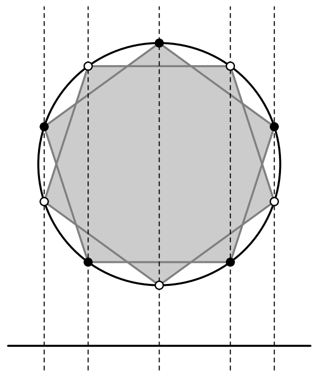

Рис. 4

Доказательство. Рассмотрим проекции точек набора P на прямую l. Проведём через них прямые, перпендикулярные l. На этих прямых будет лежать поровну точек из этих наборов. Для каждой такой прямой произвольным образом разбиваем точки на пары, что и завершает доказательство. □

Теорема 2. $f(n) = n + 1$.

Доказательство. Выше мы показали, что $f(n) \geqslant n + 1$. Осталось показать, что если у нас есть проекции на $n + 1$ прямую, то можно восстановить наш набор. Пусть наборы P и P', каждый из n точек, дают одинаковые мультимножества проекций на эти прямые. Мы можем для каждой прямой разбить точки наборов на пары по лемме 2. Рассмотрим пары, где есть точка A_1 из набора P, не принадлежащая набору P'. Мы знаем, что их количество $n + 1$ при n точках в P'. По принципу Дирихле среди этих пар есть две одинаковые A_1B_i. Тогда среди данных $n + 1$ прямых найдутся две прямые, перпендикулярные A_1B_i. Они будут параллельны, что противоречит принятому нами условию. □

§ 3. Случай n точек и n прямых

В этом параграфе рассмотрим ситуацию, когда *n точек можно перепутать с другими n по проекциям на n прямых*. Пусть два n-угольника неразличимы по таким проекциям. Если у них есть общая вершина, то $(n-1)$-угольники, получающиеся при удалении этой общей вершины, будут также неразличимы по проекциям на n прямых, что невозможно по теореме 2. Поэтому далее будем считать, что у неразличимых многоугольников нет общих вершин.

Лемма 2$'$. *Если количество точек в каждом из неразличимых множеств P и P' совпадает с количеством направлений проектирования, то направления проектирования совпадают с направлениями прямых, соединяющих точки множеств P и P'.*

Доказательство. Рассмотрим точку A из множества P. По лемме 2 на прямой, которая проходит через A в направлении проектирования, должна быть хотя бы одна точка из множества P'. Но количество таких направлений и количество точек в P' совпадают, поэтому каждое направление из A на точки P' является направлением проектирования. □

Лемма 3. *Все $2n$ рассматриваемых точек лежат на их выпуклой оболочке, причём точки двух наборов чередуются*: $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если на прямой лежит хотя бы по одной точке из P и P', то на этой прямой лежит ровно по одной точке из P и P'. Действительно, пусть, например, на прямой лежат точки A_1, A_2 из P и точка B из P'. На каждой из прямых, проходящих через B в направлениях проектирования, должна лежать хотя бы одна точка из множества P. Но тогда количество направлений проектирования строго меньше, чем количество точек в P (ведь для точек A_1 и A_2 направления из B совпадают), что противоречит тому, что тех и других ровно n.

Рассмотрим множество S векторов, соответственно коллинеарных этим прямым (по лемме 2 это векторы, коллинеарные прямым A_1B_i, $i \in [1; n]$). Возьмём любой из них и найдём крайнюю прямую (т. е. такую, с одной стороны от которой нет точек из P и P'). Это возможно, потому что прямых каждого направления конечное число. По лемме 2 эта прямая проходит через хотя бы одну точку набора P и через хотя бы одну точку набора P'. На самом деле, для каждого направления мы найдём две крайние прямые. Пусть a — одна из них, $A_1, B_1 \in a$ (рис. 5). Без ограничения общности, A_1 левее B_1, а все остальные точки лежат ниже прямой a. Возьмём вектор из S, который имеет наименьший угол с направлением от A_1 к B_1 (против часовой стрелки), и проведём через A_1 прямую b, коллинеарную ему. На этой прямой есть некоторая точка, пусть это B_3, набора P' (поскольку выбранный вектор принадлежит множеству S). Напомним, что B_3 ниже прямой a. Докажем, что прямая b тоже крайняя. Если нет,

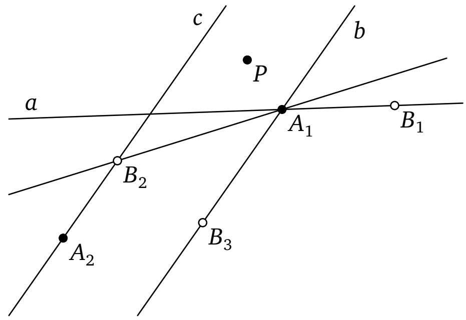

Рис. 5

то рассмотрим крайнюю прямую того же направления, которая лежит левее b. Пусть это c (рис. 5). На ней найдётся некоторая точка B_2 из P'. Она лежит ниже прямой a. Где бы ни лежала точка B_2, прямая A_1B_2 будет иметь меньший угол с прямой a, чем прямая b, что невозможно.

Дальше поступим аналогично и проведём прямую через B_3 так, чтобы она имела наименьший угол с b. И так далее, пока не «зациклимся». При этом мы придём в точку B_1, иначе последняя проведённая прямая не будет крайней. В итоге мы переберём все прямые, составляющие выпуклую оболочку. Их количество равно $2n$, потому что мы пройдём по двум крайним прямым в направлении каждого вектора из S. Поэтому в выпуклой оболочке будет $2n$ точек. Значит, мы прошли все точки, причём в нужном порядке. □

Лемма 3 позволяет нам автоматически преобразовывать выпуклый $2n$-угольник в множества P и P'. Поэтому в дальнейшем нам достаточно рассматривать $2n$-угольники, подразумевая автоматическое разбиение на два множества.

Лемма 4. *Пусть $A_1A_2\ldots A_{2n}$ — выпуклый многоугольник, образованный* (*по лемме* 3) *рассматриваемыми точками. Тогда*

$$A_1A_{2n} \parallel A_2A_{2n-1} \parallel \ldots \parallel A_iA_{2n+1-i}.$$

Доказательство. Пусть наш многоугольник ограничен ломаной T. По лемме 3 она выпуклая. Пусть i — наименьшее натуральное число, для которого отрезок A_iA_{2n+1-i} не параллелен A_1A_{2n}. Проведём через A_i прямую, параллельную A_1A_{2n}. По лемме $2'$ эта прямая должна проходить ещё через некоторую вершину A_k многоугольника T. Теперь проведём прямую через A_{2n+1-i}, также параллельную A_1A_{2n}. Посмотрим, где она пересечёт T второй раз. Очевидно, что она находится между прямыми A_iA_k и $A_{i-1}A_{2n+2-i}$, а значит, пересечёт T на отрезке A_iA_{i-1}. Но по лемме $2'$

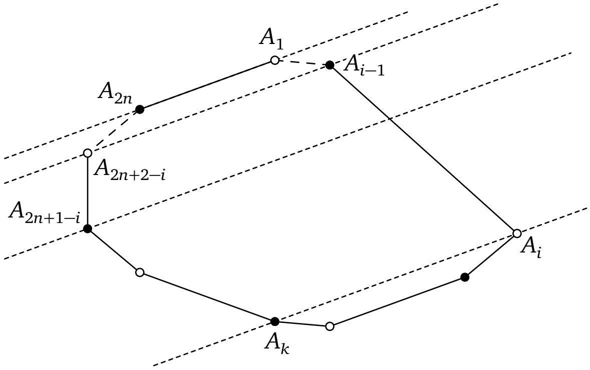

Рис. 6

точка пересечения тоже должна быть вершиной T. Это невозможно, поскольку A_i и A_{i-1} — две последовательные вершины.

Мы пришли к противоречию, лемма доказана. □

Заметим, что утверждение леммы 4 верно, с какой бы вершины мы ни начинали нумерацию.

Лемма 5. *Все точки наборов P и P' лежат на эллипсе.*

Доказательство. Вначале докажем, что пяти последовательных точек достаточно для того, чтобы точно узнать расположение шестой. Пусть известны первые 5 вершин нашего многоугольника $A_1B_1A_2 \ldots B_n$. Проведём прямую, параллельную A_2B_2, через A_1 и прямую, параллельную A_3B_2, через A_2. По лемме 4 их точка пересечения и будет B_3 (рис. 7).

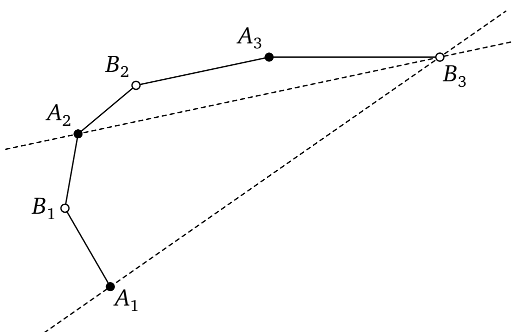

Рис. 7

Теперь докажем, что все рассматриваемые точки лежат на конике. Для этого докажем, что шесть последовательных точек лежат на одной конике.

При помощи аффинного преобразования сделаем $B_1A_2B_2A_3$ равнобедренной трапецией (очевидно, что если все точки лежали на конике, то

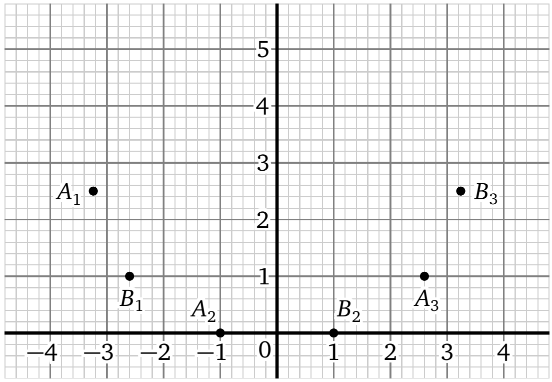

Рис. 8

они и останутся на конике) и выберем систему координат так, чтобы наши точки имели координаты вида $A_1(x;y)$, $B_1(-z;1)$, $A_2(-1;0)$, $B_2(1;0)$, $A_3(z;1)$, см. рис. 8.

По лемме 4 имеем $A_1B_2 \parallel A_2B_1$ и $A_2B_3 \parallel A_3B_2$, поэтому прямые A_1B_2 и A_2B_3 симметричны относительно оси ординат. По той же лемме прямая A_1B_3 параллельна оси абсцисс. Значит, точка B_3 симметрична A_1 относительно оси ординат и имеет координаты $(-x;y)$.

Покажем, что коника, проходящая через $A_1B_1A_2B_2A_3$, будет проходить и через B_3. Для этого достаточно показать, что коника симметрична относительно оси ординат. В уравнение коники $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ подставим наши точки. Подставив координаты точек A_2 и B_2, получим $d=0$, а подставив B_1 и A_3, получим $c=0$. Легко видеть, что тогда коника симметрична относительно оси ординат, что и требовалось доказать.

Если $n=2$, то у нас есть выпуклый четырёхугольник и мы можем провести эллипс через его вершины. При $n>2$ осталось доказать, что наша коника не может быть параболой или гиперболой. Допустим, вершины наборов P и P' лежат на параболе. Одна из ветвей параболы содержит как минимум три вершины многоугольника. Рассмотрим три точки, самые дальние от вершины параболы (A_1, B_1, A_2). По лемме 4, если мы проведём через точку A_2 прямую, параллельную A_1B_1, то она пересечёт параболу второй раз в вершине нашего многоугольника. Эта точка будет лежать на одной ветви параболы с A_1, причём дальше от вершины параболы. Значит, точка A_1 была не крайней. Аналогично доказывается для гиперболы, только нужно заметить, что поскольку наш многоугольник выпуклый и $n>2$, то все его вершины должны находиться на одной и той же ветви гиперболы. □

Теорема 3. *Если есть набор P из n точек, которую можно перепутать с набором P', то существует аффинное преобразование, которое* *переводит P и P' в правильные многоугольники, вписанные в одну и ту же окружность.*

Доказательство. Согласно лемме 5 все вершины многоугольников P и P' лежат на эллипсе. Переведём этот эллипс в окружность при помощи аффинного преобразования. Теперь мы можем восстановить все вершины по трём последовательным точкам: A_1, B_1, A_2. Действительно, проведём через A_1 прямую, параллельную B_1A_2, она пересекает окружность в точке B_2 (рис. 9). По лемме 4 точка B_2 является вершиной многоугольника P'. Проведём через B_1 прямую, параллельную A_2B_2. Получим вершину A_3 многоугольника P, и т. д. Так мы можем восстановить все вершины обоих многоугольников.

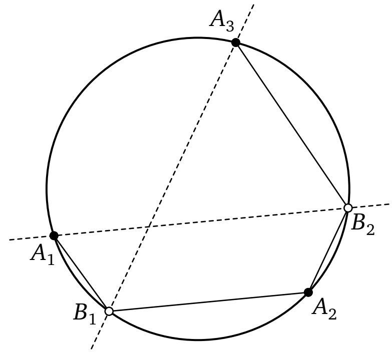

Рис. 9

Заметим, что дуга A_1B_1 равна A_2B_2. Аналогично B_1A_2 и B_2A_3 равны. Тогда равны и дуги A_1A_2 и A_2A_3. Это значит, что многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ правильный. Аналогично и многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ правильный. Теорема доказана. □

Замечание. Если мы впишем в окружность два правильных n-угольника, то их всегда можно будет спутать при проекции на прямые, перпендикулярные сторонам получившегося $2n$-угольника. Таким образом, теорема описывает все возможные неразличимые конфигурации.

§ 4. Случай целых координат

В этом параграфе мы решим задачу § 3 на целочисленной решётке.

Теорема 4. *На целочисленной решётке существует n точек, которые можно спутать по проекциям на n прямых, тогда и только тогда, когда n принадлежит множеству* $\{1; 2; 3; 4; 6\}$.

Доказательство. Случай $n=1$ тривиален. Для $n=2, 3, 4$ примеры были в § 2. На рис. 10 показан пример для $n = 6$.

Для остальных n воспользуемся теоремой 3. Пусть найдётся n-угольник с вершинами из таких точек. С помощью аффинного преобразования сделаем его правильным. Целочисленная решётка перейдёт при этом преобразовании в какую-то другую решётку. Мы получили правильный n-угольник, все вершины которого принадлежат решётке. Доказательство невозможности этой ситуации для $n = 5$ и $n > 6$ было опубликовано в работе И. Шёнберга [1] 1937 года, см. также [2, с. 30–33]. □

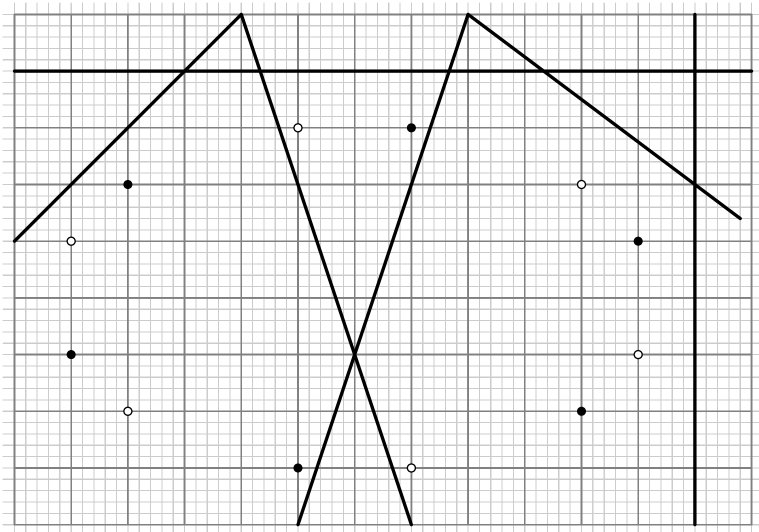

Рис. 10

§ 5. Пространственный случай

Теперь решим ту же задачу в пространстве. Будем проектировать точки на некоторые плоскости. Сразу же можно сказать, что для восстановления n точек всегда достаточно $n+1$ плоскости (доказывается аналогично теореме 2).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда у нас есть n точек, которые невозможно восстановить по проекциям на n плоскостей. Докажем, что мы можем параллельно спроектировать эти точки на какую-то плоскость так, что полученные при проектировании n точек на плоскости невозможно будет восстановить по проекциям на какие-то n прямых.

Выберем произвольную плоскость α, которая не параллельна ни одной из данных n плоскостей (и, значит, не перпендикулярна ни одной из n прямых, перпендикулярных этим плоскостям), причём при проекции на плоскость α не сливаются никакие две точки каждого из двух неразличимых наборов и никакие две из n указанных прямых не проектируются в параллельные.

Пусть l — одна из этих n прямых. Проведём прямые, параллельные l, через точки одного из двух наборов (по обобщению леммы 2 для пространства другие n точек тоже будут лежать на этих прямых). Спроектируем проведённые прямые на плоскость α. Они, очевидно, перейдут в набор параллельных прямых, проходящих через проекции точек каждого из двух наборов. Итак, на плоскости α есть два набора из n точек каждый и n семейств параллельных прямых, содержащие все точки обоих исходных наборов.

Докажем, что $2n$ точек исходных наборов лежат в одной плоскости. Если это не так, то возьмём четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Согласно теореме Польке — Шварца их можно параллельно спроектировать в любой четырёхугольник. Направления, при которых проекция является невыпуклым четырёхугольником, образуют на проективной плоскости направлений область с непустой внутренностью. Выберем направление, принадлежащее этой внутренности. Мы получим $2n$ точек, не все из которых лежат на их выпуклой оболочке, причём некоторые n из этих точек можно спутать с остальными n точками по проекциям на n прямых. Но это невозможно по теореме 3.

Итак, доказана

Теорема 5. *Если в пространстве выбраны два набора из n точек и эти наборы невозможно различить по проекциям на n плоскостей, то все $2n$ точек лежат в одной плоскости.* □

Список литературы

[1] *Schoenberg I. J.* Regular simplices and quadratic forms // J. London Math. Soc. 1937. Vol. s1–12, iss. 1. P. 48–55.

[2] *Вавилов В. В., Устинов А. В.* Многоугольники на решётках. М.: МЦНМО, 2006.

Олесь Игоревич Голембовский, студент Киевского национального университета им. Тараса Шевченко

olesgolembovskiy@gmail.com