Нам пишут

Теорема о семи окружностях и проективные преобразования

Г. С. Минаев

От редакции. В выпуске 23 «Математического просвещения» опубликован перевод параграфа 3 статьи С. Дж. А. Ивлина, Г. Б. Мани-Каутса и Дж. А. Тиррелла «Теорема о семи окружностях и другие новые теоремы». Содержащаяся там теорема о семи окружностях (с. 52–58) доказывается с помощью инверсии и понятия радикальной оси. Ниже публикуется заметка, в которой эквивалентный факт (задача 1) и ряд родственных утверждений доказаны с помощью проективных преобразований. Автор заметки на момент её написания был учеником 10 класса школы № 57 г. Москвы. Редакция признательна С. В. Маркелову и его сыну Юрию, благодаря которым этот материал представлен к публикации.

Задача 1. Пусть даны окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6, которые касаются окружности Ω в различных точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 соответственно и друг друга по циклу (в некотором порядке). Известно, что из условий «A_1 лежит на дуге $(A_2A_3A_4)$» и «A_1 лежит на дуге $(A_6A_5A_4)$» либо оба верны, либо оба не верны. Докажите, что прямые (A_1A_4), (A_2A_5) и (A_3A_6) пересекаются в одной точке (рис. 1).

Ниже приведено решение данной задачи, основанное на проективных преобразованиях и требующее совсем небольшого счёта.

Комментарий. Наша формулировка задачи эквивалентна формулировке из выпуска 23 (с. 54). Действительно, условие «K лежит на дуге (XLY)» равносильно тому, что дуги (XKY) и (XLY) либо обе положительные, либо обе отрицательные. Тем самым вышеприведённая формулировка равносильна чётности количества положительных дуг среди $(A_2A_3A_4)$,

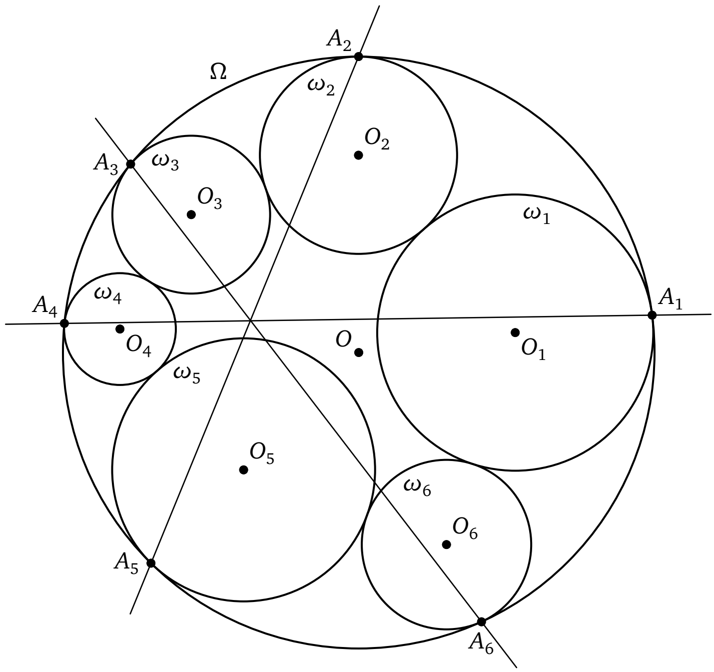

Рис. 1

$(A_2A_1A_4)$, $(A_6A_1A_4)$ и $(A_6A_5A_4)$. Заметим, что если в таком обозначении поменять две точки местами, то дуга поменяет свой «знак». Пусть теперь точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 (далее 1, 2, 3, 4, 5 и 6) — соответственно точки A, B', C, A', B и C' в выпуске 23 (мы можем так сказать, поскольку это точки касания ω с окружностями, идущими в обоих случаях подряд в цепи). Тогда в выпуске 23 мы имеем набор дуг (564), (614), (124) и (234), а в данной статье — (234), (214), (654) и (614). Чётность количеств положительных дуг в этих наборах совпадает, поскольку дуги (234) и (614) у них общие, а в каждой из пар (564) и (654), (124) и (214) одна дуга положительна, другая отрицательна.

Решение. Пусть O_i $(i=1, \ldots, 6)$ — центр окружности ω_i. Зафиксируем окружности Ω, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Для различных точек A_6 на Ω будем соответственно строить окружность ω_6, по ней — подходящую окружность ω_5, а по ней — A_5 (рис. 2).

Сделаем инверсию с центром в точке A_4. При этом Ω и ω_4 переходят в параллельные прямые, а ω_1, ω_6 и ω_5 — в окружности, касающиеся Ω. Можно заметить, что либо все четыре окружности ω_1, ω_4, ω_5 и ω_6 находились внутри Ω, либо вне её, поэтому сейчас все четыре обобщённые окружности лежат в одной полуплоскости относительно Ω. Также заме-

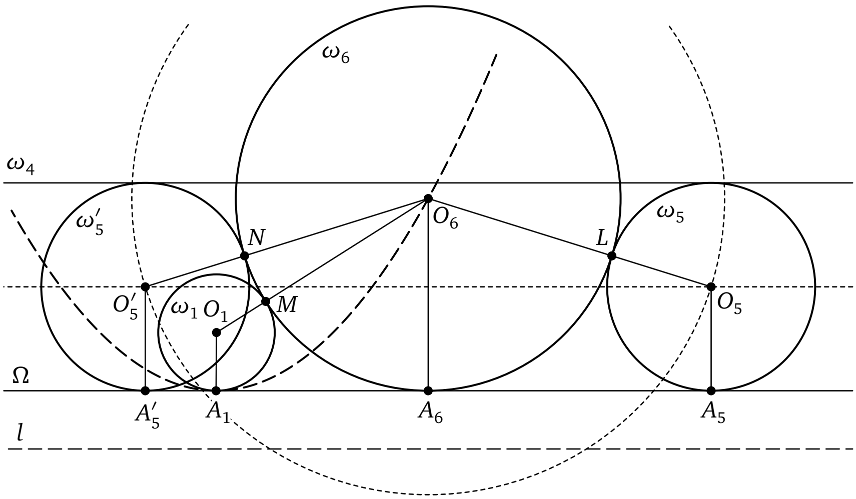

Рис. 2

тим, что ω_1 и ω_6, ω_6 и ω_5 по-прежнему касаются (скажем, в точках M и L соответственно), а окружность ω_5 заключена между параллельными прямыми Ω и ω_4 и потому длина её радиуса фиксирована.

Пусть прямая l гомотетична Ω относительно O_1 с коэффициентом 2, тогда

$$\rho(O_6; l) = |O_6A_6| + |O_1A_1| = |O_6M| + |MO_1| = |O_6O_1|.$$

Значит, O_6 лежит на параболе с фокусом O_1 и директрисой l. Эта парабола проходит через A_1, так как эта точка равноудалена от O_1 и l. Введём систему координат с началом в A_1, осью абсцисс Ω, осью ординат $[A_1O_1)$ и таким масштабом, что данная парабола имеет уравнение $y = x^2$. Пусть координаты точки A_6 равны $(x; 0)$, тогда координаты точки O_6 равны $(x; x^2)$. Также можно заметить, что если r — половина расстояния между Ω и ω_4, то$\rho(O_5; O_6) = |O_6L| + |O_5L| = x^2 + r$. При этом O_5 лежит на прямой, проходящей посередине между Ω и ω_4, и

$$|A_5A_6| = 2\sqrt{x^2 \cdot r} = 2|x|\sqrt{r}.$$

Теперь вспомним, что дуга $(A_6A_5A_4)$ из условия задачи перешла при инверсии в луч $[A_6A_5)$, и, согласно условию задачи, он при любом выборе A_6 (не) проходит через A_1, т. е. разность координат A_5 и A_6 либо всегда $(2x\sqrt{r}; 0)$, либо всегда $(-2x\sqrt{r}; 0)$. Тогда координаты точки A_5 — либо всегда $(x(1 + 2\sqrt{r}); 0)$, либо всегда $(x(1 - 2\sqrt{r}); 0)$. Таким образом, преобразование $\mathscr{P} : A_6 \mapsto A_5$ линейно, а потому и проективно.

Теперь рассмотрим ещё два проективных преобразования $\mathscr{Q}$ и $\mathscr{R}$ — проекцию Ω на (A_1A_4) из A_2 и проекцию (A_1A_4) на Ω из A_3. Заметим, что утверждение задачи равносильно тому, что преобразование $\mathscr{R} \circ \mathscr{Q} \circ \mathscr{P}$ тождественно. Действительно, если оно тождественно, то

$$(A_2A_5) \cap (A_1A_4) = \mathscr{Q}(A_5) = \mathscr{Q}(\mathscr{P}(A_6)) = \mathscr{R}^{-1}(A_6) = (A_3A_6) \cap (A_1A_4),$$

что и требуется в задаче. Если же утверждение задачи верно, то аналогично $\mathscr{Q}(\mathscr{P}(A_6)) = \mathscr{R}^{-1}(A_6)$, и, так как точка A_6 произвольна, $\mathscr{R} \circ \mathscr{Q} \circ \mathscr{P}(A_6) = \mathrm{Id}(A_6)$.

Проективное преобразование определяется по трём точкам, а значит, достаточно проверить утверждение задачи для трёх точек. Первый случай прост:

$$A_6 = A_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_6 = \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_5 = \omega_3 \quad \Rightarrow \quad A_5 = A_3 \quad \Rightarrow \quad (A_2A_5) = (A_3A_6),$$

поэтому утверждение верно. Во втором случае $A_6 = A_1$, поэтому ω_6 вырождается в точку, тогда ω_5 касается Ω там же и все три прямые проходят через A_1. Третий случай аналогичен: A_6 и A_5 совпадают с A_4, поэтому все три прямые там пересекаются.

Таким образом, задача решена.

Дополнение

Здесь я приведу ещё некоторые соображения по теме задачи, оформленные в виде лемм.

Лемма 1. *При фиксированных по-прежнему Ω и ω_1 геометрическое место точек O_6 есть гипербола или эллипс с фокусами в O и O_1, причём содержит A_1* (рис. 3).

Доказательство. Нужно показать, что сумма (или разность) расстояний от O_6 и A_1 до O и O_1 одинакова. Возможны три случая: Ω и ω_1 касаются внешним образом, ω_1 лежит внутри Ω и Ω лежит внутри ω_1. Разберём второй случай (остальные аналогичны).

Пусть ω_1 и ω_6 касаются в точке X. Тогда

$$|OO_6| + |O_6O_1| = |OO_6| + |O_6X| + |XO_1| = \\ = |OO_6| + |O_6A_6| + |A_1O_1| = |OA_6| + |A_1O_1| = |OA_1| + |A_1O_1|,$$

что и требовалось. □

Лемма 2. *Отображение из Ω в указанную конику* (*эллипс или гиперболу*), *переводящее A_6 в O_6, является проективным преобразованием* (рис. 4).

Доказательство. Проведём в A_1 к Ω, ω_1 и данной конике общую касательную l_1, а в A_6 к Ω и ω_6 — общую касательную l_6. Рассмотрим тот же случай, что и в лемме 1. Тогда

$$|XO_6| + |O_6O| = |A_6O| = |A_1O| = |XO_1| + |O_1O| = \frac{P(\triangle OO_1O_6)}{2}$$

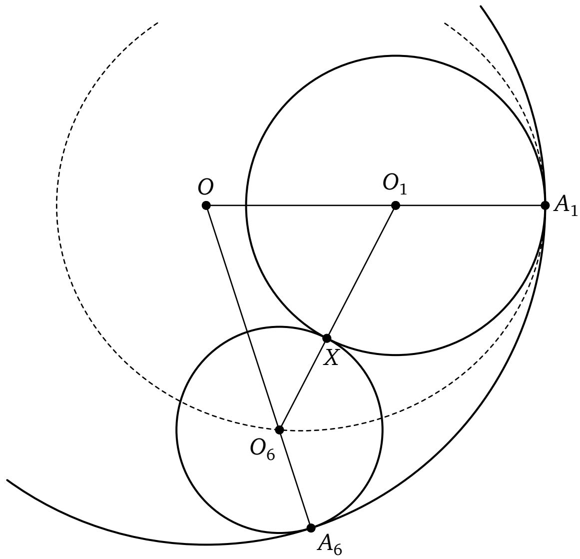

Рис. 3

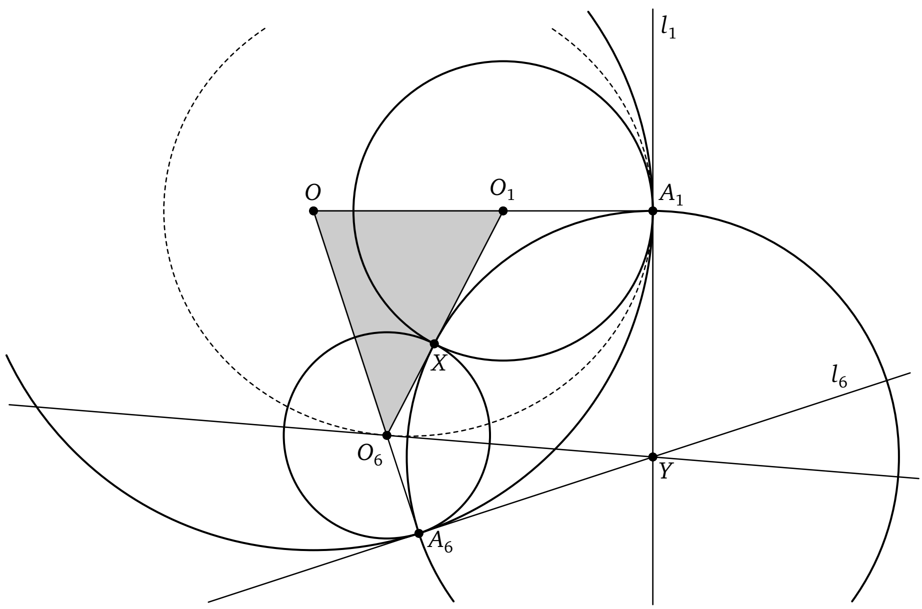

Рис. 4

и $OA_1 \perp l_1$, $OA_6 \perp l_6$. Значит, $Y := l_1 \cap l_6$ — центр вневписанной окружности треугольника OO_1O_6. При этом m — касательная к эллипсу в точке O_6 — является внешней биссектрисой треугольника OO_1O_6 по оптическому свойству эллипса, значит, $Y \in m$. В силу леммы 3 (см. ниже) преобразования, переводящие A_6 в Y и Y в O_6, проективны. Действительно, в первом случае возьмём в лемме Ω в качестве α, A_1Y в качестве ℓ, A_1 в качестве T и A_6 в качестве X'. Во втором случае α — это эллипс, X' — это O_6, ℓ и T прежние, а затем нужно взять обратное преобразование. Следовательно, преобразование, переводящее A_6 в O_6, тоже проективно. Два других случая аналогичны (только окружность может оказаться не вневписанной, а вписанной, а внешняя биссектриса — внутренней). □

Лемма 3. *Пусть прямая ℓ касается коники α в точке T, а некоторое отображение переводит T в себя, а случайную точку $X \neq T$ на α в такую точку $Y \neq T$ на ℓ, что (XY) касается α. Тогда это отображение проективно* (рис. 5).

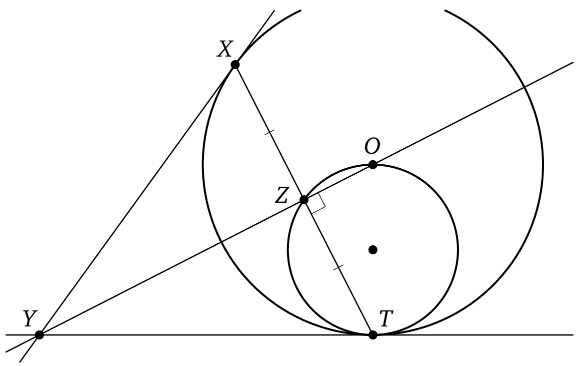

Рис. 5

Доказательство. Переведём α в окружность с центром O. Пусть Z — середина $[XT]$, тогда $(OY) \ni Z$ и $(OY) \perp (XT)$. Значит, Z лежит на окружности β, построенной на $[OT]$ как на диаметре. Поэтому Z получается из X проецированием α на β из T, а Y из Z проецированием β на ℓ из O. Оба преобразования проективны, значит, их композиция тоже. □

Теперь я покажу, что на самом деле задача о двух параллельных прямых и шести окружностях решается примерно так же.

Задача 2. Пусть даны окружности ω_1, ω_3 и ω_5, которые касаются прямой L_1 в различных точках A_1, A_3 и A_5, и ω_2, ω_4 и ω_6, которые касаются прямой L_2 в различных точках A_2, A_4 и A_6 соответственно. Кроме того, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6 касаются друг друга по циклу в данном порядке. Докажите, что (A_1A_4), (A_2A_5) и (A_3A_6) конкурентны (рис. 6).

Решение. Как и в задаче 1, зафиксируем ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 и для каждой точки $A_6 \in L_2$ определим ω_6, для неё — ω_5, а для неё — $A_5 \in L_1$. Как и в предыдущей задаче, попытаемся понять, почему преобразование $\mathscr{P} : L_2 \to L_1, A_6 \mapsto A_5$ проективно.

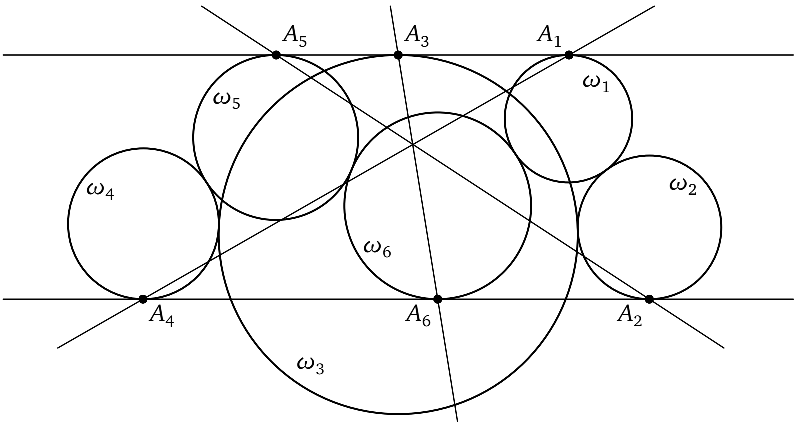

Рис. 6

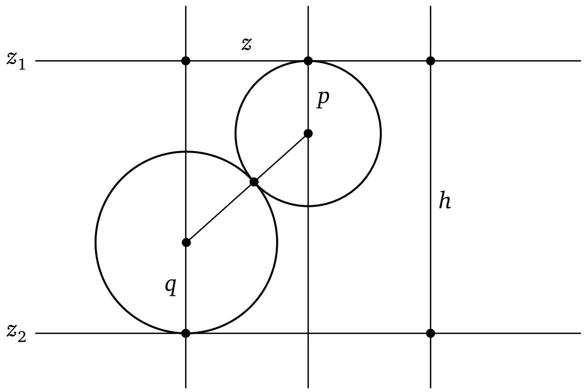

Рис. 7

Рассмотрим две касающиеся окружности, одна из которых касается L_1 и имеет радиус p, а другая касается L_2 и имеет радиус q (рис. 7). Пусть расстояние между L_1 и L_2 равно h, а расстояние между проекциями центров окружностей на L_1 равно z. Тогда по теореме Пифагора

$$z^2 = (p+q)^2 - (h-p-q)^2 = 2(p+q)h - h^2.$$

Пусть теперь расстояние между A_1 и проекцией A_4 на L_1 равно ℓ, расстояние между A_6 и проекцией A_1 на L_2 равно x, а расстояние между A_5 и проекцией A_4 на L_1 равно y (рис. 8). Пусть также радиусы окружностей ω_4, ω_5, ω_6 и ω_1 равны p, q, r и s. Тогда $x^2 = 2(r+s)h - h^2$, $y^2 = 2(p+q)h - h^2$ и $(\ell - x - y)^2 = 2(q+r)h - h^2$, значит,

$$(\ell - x - y)^2 - x^2 - y^2 = (2(q+r)h - h^2) - (2(r+s)h - h^2) - \\ - (2(p+q)h - h^2) = -2(p+s)h + h^2.$$

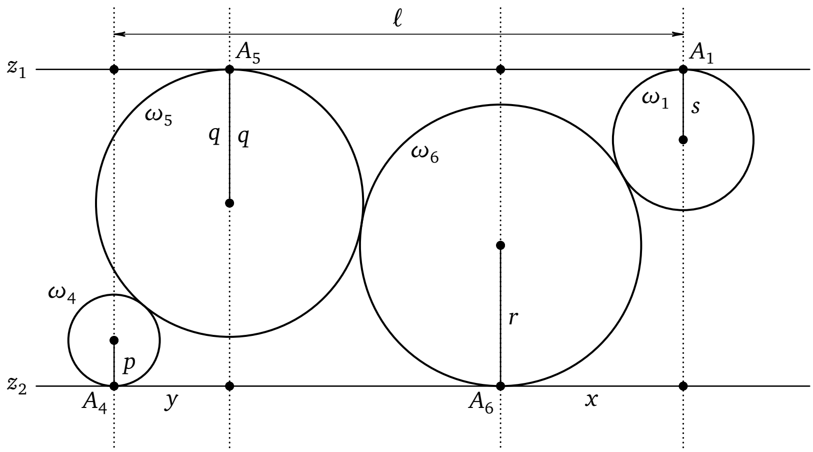

Рис. 8

Но

$$(\ell-x-y)^2-x^2-y^2=\ell^2-2\ell(x+y)+(x+y)^2-x^2-y^2=$$
$$=\ell^2-2\ell(x+y)+2xy=2(x-\ell)(y-\ell)-\ell^2,$$

поэтому $2(x-l)(y-l)=l^2+h^2-2(p+s)h$. Отсюда видно, что (поскольку p, s, ℓ и h — константы) x и y зависят друг от друга дробно-линейно (и не являются константными функциями друг от друга), поэтому преобразование проективно. Заодно это показывает единственность ω_5 и A_5.

Прямая (A_1A_4) и точки A_2, A_3 фиксированы. Рассмотрим ещё два проективных преобразования $\mathscr{Q}$ и $\mathscr{R}$: проекцию L_1 на (A_1A_4) из A_2 и проекцию (A_1A_4) на L_2 из A_3. Здесь снова тождественность преобразования $\mathscr{R}\circ\mathscr{Q}\circ\mathscr{P}$ равносильна утверждению задачи. Поэтому нужно найти три неподвижные точки.

Здесь работают столь же простые примеры, как и в задаче 1.

Пусть A_6 совпадает с A_2, тогда A_5 совпадает с A_3 и прямые (A_2A_5) и (A_3A_6) также совпадают. Поэтому здесь отображение будет тождественным.

Теперь пусть A_6 совпадает с A_4, тогда A_5 перейдёт в бесконечно удалённую точку направления L_1 и L_2. Теперь все три прямые проходят через A_4. Аналогично, если отправить A_6 на бесконечность, то все три прямые пройдут через A_1.

Три неподвижные точки найдены, тем самым задача решена.

Глеб Сергеевич Минаев, ученик школы № 57 (г. Москва)
minaevgleb@yandex.ru