О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова»

А. А. Заславский

Эта заметка посвящена решению задач 23.4 и 23.4′ «Задачника МП». Начнём с задачи 23.4′ (выпуск 24, с. 180), посвящённой вписанно-описанному четырёхугольнику[1)].

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности (рис. 1).

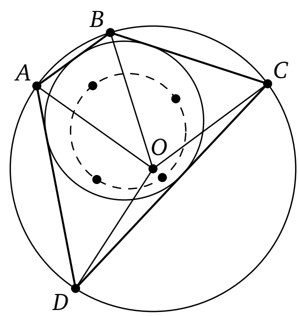

Рис. 1

Примечание. Заметим, что искомая окружность не является одной и той же для всех четырёхугольников с данными описанной и вписанной окружностями.

Интересна история этой задачи. В 2014 г. она была найдена в интернете (см. [1]) и предложена на матбой между школьниками и преподавателями в Кировской летней математической школе. Однако ни одна из команд решить её не смогла. Решение было найдено лишь спустя несколько месяцев и, несмотря на элементарную формулировку задачи, оказалось весьма сложным и использующим ряд нетривиальных идей. Прежде всего сформулируем следующее

1) Такие четырёхугольники также называют бицентрическими. — *Прим. ред.*

Предложение 1. *Пусть точки A и B лежат на окружности ω с центром O, а I — центр вписанной окружности треугольника OAB. Тогда описанная окружность треугольника IAB ортогональна ω.*

Доказательство. По теореме о трезубце центр K окружности IAB лежит на описанной окружности треугольника OAB. Поскольку $OA = OB$, то по симметрии углы OAK и OBK прямые, поэтому OK — диаметр этой окружности. Следовательно, $KA \perp OA$, т. е. окружности ω и IAB ортогональны (рис. 2). □

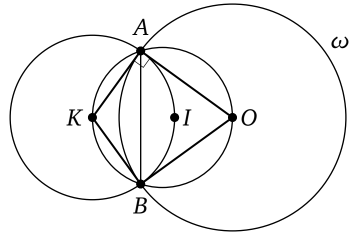

Рис. 2

Будем теперь считать окружность ω абсолютом модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. По предложению 1 окружность AIB будет в этой модели прямой. Очевидно, что $OI \perp AB$. Поэтому если перейти от модели Пуанкаре к модели Клейна с тем же абсолютом, то I станет серединой евклидова отрезка AB. Циклам геометрии Лобачевского соответствуют евклидовы окружности в модели Пуанкаре и эллипсы, касающиеся абсолюта в двух (вещественных или мнимых) точках, в модели Клейна. Поэтому утверждение задачи можно переформулировать так:

Середины сторон вписанно-описанного четырёхугольника лежат на эллипсе, касающемся описанной окружности в двух точках.

Для доказательства используем следующее

Предложение 2. *Пусть прямая ℓ пересекает окружность ω в точках P и Q (вещественных или мнимых). Для произвольной точки X обозначим степень X относительно ω через $D_\omega(X)$, а расстояние от X до ℓ через $d_\ell(X)$. Тогда геометрическим местом точек X, удовлетворяющих условию $D_\omega(X) : d_\ell^2(X) = \mathrm{const}$, будет коника, касающаяся ω в точках P и Q.*

Это предложение было доказано в [2]. В [3] Ф. Нилов независимо доказал, что ГМТ в случае $D_\omega(X) = d_l^2(X)$ является параболой. Приведём ещё одно доказательство.

Доказательство. Так как $D_\omega(X)$ и $d_l^2(X)$ являются квадратичными функциями координат X, искомое ГМТ является коникой. Ясно, что эта коника проходит через P и Q. Поскольку D_ω не меняет знак, коника не может пересекать ω. Следовательно, P и Q — точки касания. □

Верно и обратное: произвольная коника κ, касающаяся ω в P и Q, является таким ГМТ. Действительно, пусть X — произвольная точка на κ. Тогда ГМТ таких точек X', что $D_\omega(X') : d_l^2(X') = D_\omega(X) : d_l^2(X)$, будет

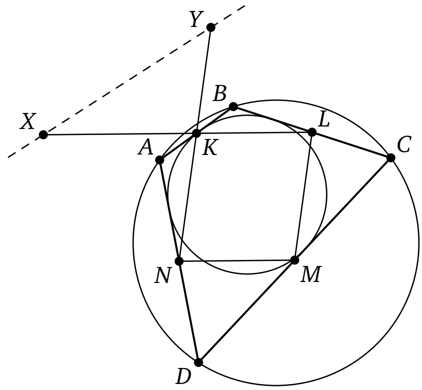

Рис. 3

коникой, касающейся ω в точках P, Q и проходящей через X. Но такая коника единственна.

Примечание. Рассматривая бесконечно удалённые точки искомого ГМТ, легко определить его эксцентриситет.

Теперь для решения задачи достаточно найти такую прямую ℓ, что расстояния от ℓ до середин K, L, M, N сторон AB, BC, CD, DA соответственно пропорциональны длинам этих сторон. Пусть AB — самая короткая сторона $ABCD$ (рис. 3). Возьмём такие точки X, Y, что $|BC|\cdot\overrightarrow{XK}=|AB|\cdot\overrightarrow{XL}$, $|AD|\cdot\overrightarrow{YK}=|AB|\cdot\overrightarrow{YN}$. Тогда $|XK|<|XL|$, $|YK|<|YN|$, т. е. X и Y лежат на продолжениях сторон параллелограмма $KLMN$ за одну и ту же вершину K. Поэтому прямая XY не пересекает параллелограмм. При этом $d_{XY}(L):|BC|=$ $=d_{XY}(K):|AB|=d_{XY}(N):|AD|$. Поскольку $AB+CD=AD+BC$, отношение $d_{XY}(M):CD$ будет таким же. Таким образом, в качестве ℓ можно взять XY.

Примечание. На самом деле мы доказали и обратное утверждение: если четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности, то $ABCD$ — описанный.

Теперь, с помощью предложения 2 («леммы Нилова») решим задачу 23.4:

Докажите, что середины сторон произвольного описанного четырёхугольника, отличного от квадрата, лежат на эллипсе, касающемся вписанной окружности в двух точках (*возможно, мнимых*, рис. 4).

Действительно, доказательство того, что середины сторон лежат на конике, полностью аналогично приведённому выше. Осталось показать, что эта коника будет эллипсом. Предположим, что для некоторого четырёхугольника эта коника будет гиперболой, и будем непрерывно деформировать его в четырёхугольник, изображённый на рис. 4. Очевидно, что в процессе деформации коника также меняется непрерывно, значит, в какой-то момент она должна стать либо параболой, либо парой параллельных прямых. Но парабола не может проходить через вершины параллелограмма, а паре параллельных прямых соответствуют дельтоиды, в которых угол между неравными сторонами однозначно определяется их отношением. Очевидно, что деформацию можно провести так, чтобы такие дельтоиды не возникали.

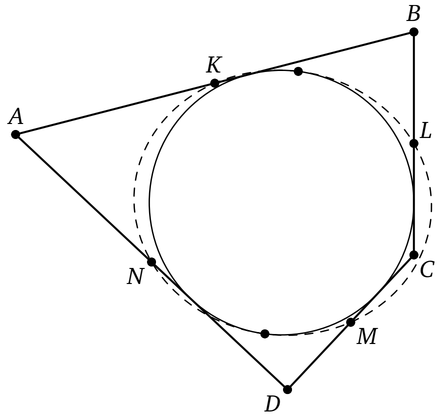

Рис. 4

Примечание. В некоторых случаях существует несколько коник, удовлетворяющих условию. Например, для ромба такими кониками будут окружность, концентричная вписанной, и ещё две. Какие-то из этих коник могут быть гиперболами, но одна из них обязательно будет эллипсом.

Автор благодарен Ф. Ивлеву, сообщившему ему задачу 23.4′.

Список литературы

[1] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h572848

[2] *Apostol T. M., Mnatsakanian M. A.* New Descriptions of Conics via Twisted Cylinders, Focal Disks, and Directors // Amer. Math. Monthly. 2008. Vol. 115, № 9. P. 795–812.

[3] *Нилов Ф. К.* Параболические многоугольники // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 12. М.: МЦНМО, 2008. С. 195–204.

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН, МЭИ

zaslavsky@mccme.ru