Задачник

(составитель А. Я. Канель-Белов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. *Индекс Хирша* исследователя — это максимальное такое n, что учёный имеет не менее n работ, на каждую из которых приходится не менее n ссылок. Хирш утверждает, что учёный с индексом не менее 50 имеет нобелевский уровень. Профессор имеет 10 аспирантов, которых он хочет вывести на нобелевский уровень. Каждый из них раз в месяц публикует статью, ссылаться можно только на ранее опубликованные работы других аспирантов. Какое минимальное число месяцев требуется профессору? (*А. Я. Канель-Белов*)

2. Известно, что числа $x_1, \ldots, x_N$ удовлетворяют неравенствам:

$$x_1 + x_2 \geqslant 1, \quad x_2 + x_3 \geqslant 2, \quad \ldots, \quad x_N + x_1 \geqslant N.$$

Найдите минимум суммы $S = x_1 + \ldots + x_N$, если а) $N = 2019$; б) $N = 2020$. (*Фольклор*)

3. а) Единичный квадрат разбит на квадратики. Может ли сумма длин сторон квадратиков, пересечённых главной диагональю, быть больше 100?

   б) Единичный квадрат разбит на квадратики в количестве не более 10^{12}. Может ли сумма длин сторон квадратиков, пересечённых главной диагональю, быть больше 100? (*А. Я. Канель-Белов*)

4. Даны такие симметрические матрицы $A_1, \ldots, A_k$ размера $n \times n$ с вещественными коэффициентами, что $\det\bigl(\sum_{i=1}^{k} A_i^2\bigr) = 0$. Докажите, что $\det\bigl(\sum_{i=1}^{k} A_i B_i\bigr) = 0$ для любых матриц $B_1, \ldots, B_k$ размера $n \times n$.

   (*П. Гурбанов*)

5. В треугольнике ABC рассматриваются две изогонально сопряжённые точки P и Q. Проведём через точки P и Q прямые, перпендикулярные биссектрисе угла BAC и пересекающие прямые AB и AC в точках B_P, C_P, B_Q, C_Q соответственно. Пусть также W — середина дуги BCA описанной окружности треугольника ABC. Прямые WP и WQ вторично пересекают описанную окружность в точках P_1 и Q_1. Докажите, что точки P_1 и Q_1 лежат на описанной окружности ω трапеции $B_P B_Q C_Q C_P$.

   (*П. В. Бибиков*)

6. а) Пусть $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — такие вещественные числа, что при любых целых x и y по крайней мере одно из чисел $a_1x+b_1y+c_1$, $a_2x+b_2y+c_2$ целое и чётное. Докажите, что по крайней мере в одной из троек коэффициентов a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 все числа целые. Что получится, если требовать только целочисленность значений одной из линейных форм? (*С. Л. Крупецкий*)

   б) Пусть a_{ij}, c_i; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

   $$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i$$

   рационально. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа рациональные?

   (*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

   в) Пусть a_{ij}, c_i; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$ — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

   $$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i$$

целое и делится на $n!$. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа целые?

(*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

7. Докажите, что для всех достаточно больших n справедливо следующее утверждение. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Тогда количество целых чисел m, удовлетворяющих неравенству $|P(m)| < 2019$, не превосходит n. (*А. А. Колчев*)

8. Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Для каждого $I \subset \{1, \ldots, n\}$ положим $s(I) = \sum_{i \in I} x_i$. Предположим, что количество значений $s(I)$ при всевозможных I не меньше $1{,}8^n$. Докажите, что количество таких подмножеств $I \subset \{1, \ldots, n\}$, что $s(I) = 2019$, меньше чем $1{,}7^n$.

(*Ф. В. Петров*)

9. Одновременно бросается несколько игральных кубиков. Кубики могут быть несимметричны, и они не обязательно одинаковы. Докажите, что случайная величина «*остаток от общей суммы очков по модулю* 11» не распределена равномерно на числах от 0 до 11.

(*И. В. Митрофанов*)

10. Докажите, что если функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(0; 2\pi)$, то для любого натурального n выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\, d\theta \geqslant 0.$$

(*Г. Х. Харди — В. В. Рогозинский, предложил С. Н. Асхабов*)

11. Числа $m_1, \ldots, m_k$ свободны от n-х степеней (т. е. не делятся на n-ю степень натурального числа, большего 1). Докажите, что $\sqrt[n]{m_1}, \ldots, \sqrt[n]{m_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Вначале рассмотрите случай $n = 2$.

(*Фольклор*)

12. Докажите, что уравнение $\operatorname{tg}(x) - x = a$ не имеет решений в элементарных функциях. (*А. Я. Канель-Белов*)

Поправка к задаче 17.6

В условии задачи 17.6 (выпуск 17, с. 196) пропущено слово «ненулевые». Приводим правильное условие:

Задача 17.6. Если целые m и n взаимно просты, а числа $x^n + x^{-n}$, $x^m + x^{-m}$ — ненулевые целые, то $x + 1/x$ — тоже целое число ($x \in \mathbb{C}$).