Решения задач из прошлых выпусков

6.1$'$ (выпуск 23, с. 217). Условие. Каждый вечер некоторые дамы дают приём (всего n дам), а остальные ходят на приём к тем дамам, которые в этот вечер принимают. Каково минимальное число вечеров, чтобы каждая дама попала к каждой? (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: минимальное натуральное число m, для которого $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$.

Решение. Нам потребуется известная

Лемма Холла (теорема о свадьбах). *Предположим, что для любого множества юношей количество девушек, знакомых с кем-либо из них, не меньше, чем количество юношей в этом множестве. Тогда всех юношей можно переженить на знакомых им девушках.*

Для каждой дамы рассмотрим множество вечеров, когда она даёт приём. Легко видеть, что эти множества попарно несравнимы по включению. В самом деле, если множество вечеров приёма дамы A есть подмножество такого множества для дамы B, то дама B не смогла побывать в гостях у дамы A. И наоборот: если множества вечеров приёма несравнимы, то каждая дама может побывать у каждой. Поэтому ответ вытекает из следующего факта.

Теорема. *Максимальное количество подмножеств m-элементного множества M, попарно несравнимых по включению, равно* $\binom{m}{[m/2]}$.

Доказательство. *Пример.* Достаточно рассмотреть все подмножества мощности $[m/2]$.

Оценка. Достаточно разбить подмножества множества M на $\binom{m}{[m/2]}$ таких цепочек подмножеств, что в каждой такой цепочке любые два элемента сравнимы по включению. Это обеспечивает следующая лемма. □

Лемма. а) *Пусть $k < m/2$. Тогда к каждому k-элементному подмножеству можно добавить по одному элементу так, чтобы получились попарно различные $(k+1)$-элементные подмножества.*

б) *Пусть $k > m/2$. Тогда из каждого k-элементного подмножества можно выбросить по одному элементу так, чтобы получились попарно различные $(k-1)$-элементные подмножества.*

Замечание. Пункты а) и б) равносильны, ибо подмножества можно заменить их дополнениями.

Доказательство п. а). Назовём k-элементные подмножества «юношами», а $(k+1)$-элементные «девушками». Будем считать, что юноша знаком с девушкой, если соответствующее k-элементное множество содержится в соответствующем $(k+1)$-элементном.

Каждому k-элементному подмножеству отвечает $m-k$ возможных $(k+1)$-элементных подмножеств, получаемых присоединением одного элемента. С другой стороны, каждому $(k+1)$-элементному подмножеству отвечает $k+1$ подмножество из k элементов, которые получаются выбрасыванием одного элемента. При $k \leqslant m/2$ выполняется неравенство $m-k \geqslant k+1$, поэтому легко проверяется выполнение условия *леммы Холла*, см. выше. □

(*А. Я. Канель-Белов*)

11.4$'''$ (выпуск 24, с. 178, задача на исследование). Условие. В меру стыдливый Вася может соврать не более одного раза. Он задумал натуральное число, меньшее чем n. Петя хочет найти задуманное число или поймать Васю на вранье. Петя может задавать Васе вопросы, требующие ответа «да» или «нет». Каково минимальное необходимое число вопросов? А если Пете надо только определить задуманное число?

Решение (частичное). Положим $m = n-1$. Если Пете надо хотя бы поймать Васю на вранье, то ответ равен k (результат округления $\log_2(m)$ в большую сторону плюс 1). Чтобы этого достичь, Петя действует методом деления пополам, спрашивая про последовательные двоичные цифры задуманного Васей числа, а в конце задаёт контрольный вопрос о чётности суммы двоичных цифр этого числа. То, что за меньшее число вопросов нельзя добиться результата, доказывается стандартным образом. А именно, вначале имеется m возможностей для задуманного числа, каждый ответ делит возможности на две группы — одна отвечает ответу «да», вторая — «нет», одна из этих групп не меньше половины количества возможностей до соответствующего вопроса. Поэтому после $k-1$ вопросов остаётся не менее одной возможности, т. е. Васю невозможно уличить.

Пусть теперь Пете обязательно надо выяснить задуманное число. Мы сможем решить задачу для $m = 2^{2^{\ell}-\ell-l}$. Покажем, что тогда потребуется $k = 2^{\ell}-1$ вопросов.

Рассмотрим двоичный куб $[0;1]^k$. Вершина отвечает последовательности ответов, ей же отвечает (в предположении их правильности) задуманное число, или *кодовая вершина*. Любая вершина либо кодовая, либо отличается от ближайшей кодовой ровно одной координатой. Чтобы восстановить вершину при возможной ложности одного ответа, надо, чтобы две *кодовые вершины* (отвечающие отсутствию вранья) различались хотя бы *тремя координатами*. Задача свелась к такой: показать, что максимальное число m вершин k-мерного куба, попарно отличающихся хотя бы тремя координатами, при $k = 2^\ell - 1$ равно $2^{k-\ell}$.

Каждой кодовой вершине можно сопоставить *шар радиуса* 1, т. е. группу из $k+1$ вершины — её саму и её соседей. Эти шары не пересекаются, поэтому $m \leqslant 2^k/(k+1) = 2^{k-\ell}$.

Осталось показать, что можно найти $2^{k-\ell}$ кодовых вершин. Для этого достаточно разбить все вершины k-мерного куба на шары радиуса 1 по 2^ℓ вершин.

Рассмотрим $2^\ell - 1$ столбцов высоты ℓ — все возможные бинарные столбцы, но без нулевого столбца. Они составляют матрицу (a_{ij}). Рассмотрим систему уравнений над $\mathbb{Z}_2$:

$$\sum_{j=1}^{2^\ell-1} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Решениям этой системы будут отвечать искомые вершины. В самом деле, когда все x_j, кроме одного, равны нулю, система не выполняется, ибо каждый столбец ненулевой. Далее, если две переменные равны 1, а остальные нулю, то получается сумма двух столбцов, не равная нулю, ибо все столбцы попарно различны. Если какие-то два решения системы отличаются одной или двумя координатами, то их разность по модулю 2 тоже является решением и имеет лишь одну или две ненулевые координаты, что, как мы только что установили, невозможно.

Множество решений этой системы есть пространство размерности не меньше $2^\ell - \ell - 1$, и число элементов в нём не меньше чем $2^{2^\ell-\ell-1} = 2^{k-\ell}$.

Задача для случая $k = 2^\ell - 1$ решена. Для общего случая решение неизвестно. (*А. Я. Канель-Белов*)

11.9′ (выпуск 23, с. 209). Условие. Существует ли вписанная в решётку нечётнозвенная замкнутая ломаная, все звенья которой имеют одинаковую длину? (*А. К. Ковальджи*)

Ответ: не существует.

Решение. Рассматривая остатки по модулю 4, легко установить следующее:

Пусть $x^2+y^2=C$, причём числа x, y целые. Тогда

а) *если C имеет вид $4k+1$, то одно из чисел x, y нечётное, а другое чётное*;

б) *если C имеет вид $4k+2$, то оба числа x, y нечётны*;

в) *число C не может иметь вид $4k+3$*;

г) *если C имеет вид $4k$, то оба числа x, y чётны.* □

Пусть теперь C — квадрат длины звена ломаной. В случае (а) сумма координат вектора, отвечающего звену ломаной, нечётна. Поскольку число звеньев нечётно, сумма координат суммы векторов звеньев нечётна и, стало быть, не нулевая. Поэтому ломаная не может быть замкнутой.

В случае (б) все координаты векторов звеньев нашей ломаной нечётны. Сумма первых координат этих векторов нечётна и не может равняться нулю (как, впрочем, и вторых координат). Тогда и сумма векторов звеньев ломаной не нуль и ломаная не может быть замкнутой.

Случай (в), как указано выше, невозможен. И, наконец, в случае (г) ломаная с половинными длинами звеньев удовлетворяет условию задачи, так что дело завершает спуск. Задача решена.

В своё время её предложил А. К. Ковальджи на суперконкурсе ВМШ при Московском математическом обществе. (*А. Я. Канель-Белов*)

17.2. Условие. а) Найти 300-ю цифру после запятой числа

$$\sqrt[3]{0{,}\underbrace{99\ldots99}_{100\ \text{штук}}}.$$

б) С помощью калькулятора найти первую цифру числа 2^{10^6}.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. а) Нужно найти трёхсотую цифру после запятой в числе $\sqrt[3]{1-x}$, где $x=10^{-100}$. Разложим в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$(1-x)^{1/3}=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}x^3t^{-8/3},$$

где $t\in(1-x;1)$.

$$(1-x)^{1/3}<1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2=0{,}\underbrace{99\ldots99}_{100\ \text{раз}}\underbrace{66\ldots66}_{100\ \text{раз}}555\ldots$$

Пишем грубую оценку на остаточный член: $\frac{5}{81}x^3t^{-8/3}<\frac{1}{10}x^3$, откуда

$$(1-x)^{1/3}>0{,}\underbrace{99\ldots99}_{100\ \text{раз}}\underbrace{66\ldots66}_{100\ \text{раз}}\underbrace{55\ldots55}_{100\ \text{раз}}4\ldots$$

Ответ: 5.

б) Прологарифмируем данное выражение по основанию 10.

$$\lg 2^{1\,000\,000} = 1\,000\,000 \lg 2 =_{(\text{с точностью калькулятора})} = 301\,029{,}9956.$$

Значит, исходное число меньше чем $10 \cdot 10^{301\,029}$. Но оно больше чем $9 \cdot 10^{301\,029}$, так как $\lg 9 < 0{,}9956$.

Ответ: 9. (*И. В. Митрофанов*)

17.4. Условие. $\mathscr{A}$ — отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояние (т. е. $|XY| = |\mathscr{A}(X)\mathscr{A}(Y)|$ для любых точек X, Y плоскости). Доказать, что $\mathscr{A}$ — отображение плоскости на себя (т. е. каждая точка имеет прообраз при этом отображении).

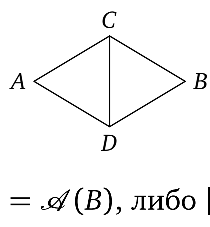
Решение. Пусть A_1, A_2, A_3 — вершины равностороннего треугольника со стороной 1. Образы этих трёх точек при $\mathscr{A}$ тоже являются вершинами равностороннего треугольника со стороной 1. Рассмотрим движение h, переводящее $\mathscr{A}(A_1)$ в A_1, $\mathscr{A}(A_2)$ в A_2 и $\mathscr{A}(A_3)$ в A_3. Обозначим через $\mathscr{B}$ композицию $\mathscr{A}$ и h, она тоже сохраняет расстояния. Достаточно доказать, что $\mathscr{B}$ — тождественное преобразование. Очевидно, точки A_1, A_2, A_3 под действием $\mathscr{B}$ остаются на месте. Пусть для некоторой точки X плоскости $X \neq \mathscr{B}(X)$. Тогда

$$|\mathscr{B}(X)A_1| = |\mathscr{B}(X)\mathscr{B}(A_1)| = |XA_1|,$$

а значит, A_1 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $X\mathscr{B}(X)$. Аналогично на этом серединном перпендикуляре лежат A_2 и A_3, но этого быть не может. Противоречие. (*И. Митрофанов*)

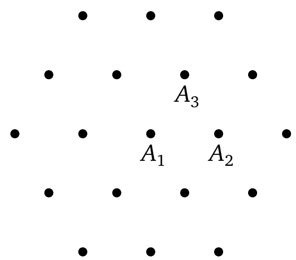
17.4′ (выпуск 23, с. 220). Условие. $\mathscr{A}$ — отображение плоскости в себя, сохраняющее единичные расстояния (если $|XY| = 1$, то $|\mathscr{A}(X)\mathscr{A}(Y)| = |XY|$). Доказать, что $\mathscr{A}$ сохраняет *все* расстояния. (*Фольклор*)

Решение. Рассмотрим такую конструкцию (отрезки имеют длину 1):

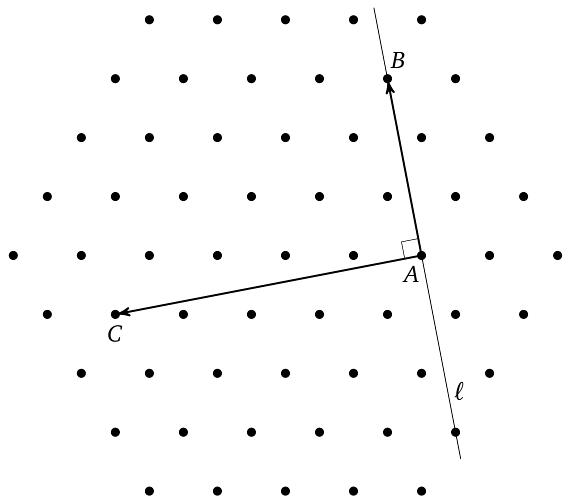


Понятно, что либо $\mathscr{A}(A) = \mathscr{A}(B)$, либо $|\mathscr{A}(A)\mathscr{A}(B)| = \sqrt{3}$. Таким образом, отображение $\mathscr{A}$ любые две точки на расстоянии $\sqrt{3}$ либо склеивает, либо оставляет на прежнем расстоянии. Рассмотрим треугольник со сторонами $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$. Так как троек точек с попарными расстояниями $(\sqrt{3}, 0, 1)$ или $(0, 0, 1)$ не существует, оба отрезка длины $\sqrt{3}$ должны сохраниться.

Итак, отображение $\mathscr{A}$ сохраняет длины 1 и $\sqrt{3}$. Можно считать, что $\mathscr{A}$ оставляет на месте вершины A_1, A_2, A_3 некоторого треугольника со сторонами $(1, 1, 1)$. Тогда последовательно получаем, что все точки показанной ниже треугольной решётки — неподвижные точки отображения $\mathscr{A}$.



Докажем, что и все остальные точки плоскости остаются на месте. Предположим, что для какой-то точки X её образ $\mathscr{A}(X) \neq X$, тогда существует прямая ℓ, проходящая через некоторые две точки A и B решётки и разделяющая $\mathscr{A}(X)$ и X.



Поворотная гомотетия с центром в точке A, углом 90° и коэффициентом $\sqrt{3}$ переводит точки решётки в точки решётки (достаточно проверить для двух). Точку B она переводит в некоторую точку C. Не умаляя общности, считаем, что X и C по одну сторону от ℓ.

Существует круг, касающийся прямой ℓ в точке A и содержащий точку X. Без ограничения общности, центр D этого круга — точка решётки и $D = A + k\overrightarrow{AC}$, где k — натуральное число, большее чем 1. Тогда $|DX| < k|AC|$. Поэтому из отрезков с длинами $|AC|$ в количестве k штук и одного отрезка длины $|DX|$ можно сложить многоугольник. А значит, точки D и X можно соединить k-звенной ломаной с длинами звеньев, равными $|AC|$:

$$|DY_1| = |Y_1Y_2| = \ldots = |Y_{k-1}X| = |AC|.$$

Заметим, что $\mathscr{A}$ сохраняет расстояния, равные любому из расстояний между точками решётки, в частности $|AC|$. При отображении $\mathscr{A}$ тогда получим по неравенству многоугольника, что

$$|D\mathscr{A}(X)| \leqslant |D\mathscr{A}(Y_1)| + |\mathscr{A}(Y_1)\mathscr{A}(Y_2)| + \ldots + |\mathscr{A}(Y_{k-1})\mathscr{A}(X)| = k|AC|.$$

Это значит, что $\mathscr{A}(X)$ лежит внутри круга с центром D и радиусом $k|AC| = |AD|$. А тогда мы получаем противоречие с тем, что X и $\mathscr{A}(X)$ находятся по разные стороны от прямой ℓ. (*И. Митрофанов*)

17.9. Условие. Имеется $2^n - 1$ коробок. В коробке первой величины[1)] содержатся две коробки второй величины. В каждой из 2^{k-1} коробок k-й величины содержатся по две коробки $(k+1)$-й величины. В коробках последней n-й величины лежит по одной монете. За один ход разрешается в одной из коробок любой величины перевернуть все монеты. Доказать, что за $[n/2]+1$ ходов можно уравнять число монет, лежащих орлом вверх и орлом вниз. Можно ли улучшить эту оценку? (*А. Я. Белов*)

Решение. Будем считать, что «орёл вверх» — это 1, а «орёл вниз» — это -1. За одну операцию разрешается поменять все знаки внутри одной из коробок. Нужно доказать, что за $[n/2]+1$ операций можно сделать сумму всех 2^{n-1} чисел равной нулю.

Понятно, что при любых действиях сумма остаётся чётной. Пусть общая сумма в какой-то момент времени равна S, а сумма в какой-то коробке равна S_1. Если $|S_1| \geqslant |S|$ и $S_1 \cdot S \geqslant 0$, то назовём эту коробку *значимой*. Например, единственная коробка первой величины значима всегда. Коробка n-й величины значима только если общая сумма монет равна 0.

Лемма. *Пусть коробка A — значимая, A содержит коробки следующего размера B_1 и B_2, B_1 содержит C_1 и C_2, B_2 содержит C_3 и C_4. Тогда за не более чем одно действие можно сделать так, чтобы одна из коробок C_i стала значимой.*

Доказательство. Не умаляя общности, считаем общую сумму S положительной. Обозначим через c_i сумму чисел в коробке C_i. Рассмотрим возможные варианты.

1. Пусть все c_i неотрицательны, $0 < S \leqslant c_1 + c_2 + c_3 + c_4$. Не умаляя общности считаем, что c_1 — наибольшее из c_i (или одно из наибольших, если

[1)] Она единственна.

их больше одного), а $c_3 \geqslant c_4$. Если $S < c_1$, то коробка C_1 уже значимая. Далее рассмотрим подслучаи:

(а) Пусть $c_2 \geqslant c_3 + c_4$. Тогда поменяем знаки в C_2. Общая сумма станет равна $S - 2c_2$. С одной стороны, $S - 2c_2 \leqslant c_1 + (c_3 + c_4 - c_2) \leqslant c_1$. С другой стороны, $S - 2c_2 \geqslant -c_2 + (c_1 - c_2) \geqslant -c_2$. А значит, либо коробка C_1, либо коробка C_2 станет значимой (какая из них — зависит от знака получившейся суммы).

(б) Пусть $c_2 < c_3 + c_4$ и $S \geqslant c_1 + c_3 + c_4$. Поменяем знаки в B_2, сумма станет равна $S - 2(c_3 + c_4)$. С одной стороны, получившаяся сумма не превосходит $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 - 2(c_3 + c_4) < c_1$, а с другой стороны, она не меньше чем $c_1 - (c_3 + c_4) \geqslant -c_3$. Значит, либо C_1, либо C_3 станет значимой коробкой.

(в) Пусть $c_2 < c_3 + c_4$ и $c_1 \leqslant S < c_1 + c_3 + c_4$. Поменяем знаки в C_3, полученная сумма $S - 2c_3$ будет меньше чем c_1, но больше чем $-c_3$, опять одна из коробок C_1, C_3 будет значимой.

2. Пусть ровно одно из c_i отрицательное, например c_4. Тогда $0 < S < c_1 + c_2 + c_3$. Пусть $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3$. Если $S < c_1$, то коробка C_1 уже значимая. В противном случае перевернём C_2, новая сумма $S - 2c_2$ будет не больше чем c_1 и не меньше чем $-c_2$, одна из соответствующих коробок — значимая. Случаи, когда c_1, c_2, c_3 упорядочены иначе, рассматриваются аналогично.
3. Пусть $0 \leqslant c_i \leqslant c_j$, а другие два числа отрицательные. Тогда $0 < S < c_i + c_j$. Если $S < c_i$, то можно ничего не менять, в противном случае поменяем знаки в C_i и придём к случаю 4.
4. Если только одно из чисел c_i неотрицательное, то соответствующая коробка уже значимая.

   Лемма доказана. □

Если $n = 2a$, то, применяя много раз лемму, получим после первого хода значимую коробку 3-го размера, после второго хода 5-го размера и так далее, после $a - 1$ ходов получим значимую коробку $(n - 1)$-го размера. После этого сумма всех чисел будет или 0, или ± 2, и за ещё не более чем один ход придём к нужному результату.

Аналогично если $n = 2a + 1$, то не более чем за a ходов получаем значимую коробку уровня n, т. е. нулевую сумму всех чисел.

Так мы доказали оценку даже чуть лучше чем требовалось, а именно $[n/2]$.

Укажем теперь для $n = 2a + 2$ конструкцию, которую нельзя привести к нужному виду менее чем за $a + 1$ операцию. Каждой из 2^{n-1} самых маленьких коробок соответствует двоичный номер, который записывается как последовательность нулей и единиц $b_1 b_2 \ldots b_{2a} b_{2a+1}$. Если нет таких i, что $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$, то напишем в коробке $+1$, иначе напишем $+1$ или -1 в зависимости от значения последнего бита b_{2a+1}.

Какая может при такой расстановке быть сумма чисел в коробке k-го размера? Коробке k-го размера K соответствует бинарная последовательность $b(K)$ длины $k-1$. Если $k = 2a+1$, то сумма чисел в коробке либо 2, либо 0 — это зависит от того, встречается ли в последовательности кусок $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$. Иначе сумма чисел в K — это удвоенное число коробок $(2a+1)$-го размера с суммой 2, содержащихся в K. Очевидно, число таких коробок равно числу способов дополнить $b(K)$ до бинарной последовательности $b_1 \ldots b_{2a}$ так, чтобы ни для какого i не было $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$. Если такая пара подряд идущих единиц уже встречается в $b(K)$, то число способов, очевидно, равно 0. Пусть k нечётное, тогда нужно заполнить битами $2a-k+1$ позиций, которые разбиваются на пары, и каждую пару можно заполнить тремя способами (00, 01 и 10). В итоге общее число способов $3^{(2a-k+1)/2}$ и сумма чисел в коробке равна $2 \cdot 3^{(2a-k+1)/2}$. Разбор случая чётного размера коробки аналогичен и оставляется читателю, приведём готовый ответ.

Сумма чисел в коробке $(2a-2k+1)$-го размера может быть равна либо 0, либо $2 \cdot 3^k$. Сумма чисел в коробке $(2a-2k)$-го размера равна либо 0, либо $2 \cdot 3^k$, либо $4 \cdot 3^k$. Сумма всех чисел равна $2 \cdot 3^a$.

Заметим, что от порядка операций конечный результат не зависит, так как для каждой монетки важна лишь чётность числа переворачиваний. Поэтому можно считать, что операции выполняются вначале с крупными коробками, а потом с маленькими. Операции с более крупными коробками не меняют абсолютные величины сумм чисел в меньших коробках, а меняют только их знаки. Поэтому можно считать, что при каждой операции сумма чисел меняется на число вида $4 \cdot 3^k$, $8 \cdot c^k$, 2 или 0. Если сумма изначально была $2 \cdot 3^a$ и стала 0 за m операций, то получаем, что

$$3^a = \pm t_1 \pm t_2 \pm \ldots \pm t_m,$$

где каждое из t_i равно 1, 0, $2 \cdot 3^k$ или $4 \cdot 3^k$ для некоторого целого неотрицательного k. Числа такого вида будем называть *базовыми*.

Покажем, что $m \geqslant a+1$, индукцией по a. База $a = 1$ очевидна. Переход индукции: $3^a = \pm t_1 \pm t_2 \pm \ldots \pm t_m$; слева нечётное число, значит, среди $\{t_i\}$ должна быть хотя бы одна единица.

В сумме $\pm t_1 \pm t_2 \pm \ldots \pm t_m$ выделим слагаемые, равные ± 1, ± 2 и ± 4. Пусть это $s > 1$ чисел и их сумма равна $3c$. Покажем, что число c можно представить в виде суммы не более чем $s-1$ базовых чисел. В самом деле, несложно показать, что набор из целых чисел с суммой, делящейся на 3, можно разбить на группы с суммой, делящейся на 3, так, чтобы в каждой группе было не более чем 3 числа. В данном случае группа содержит не менее двух чисел, так как слагаемые не делятся на 3. А далее несложный перебор: в каждой из групп сумма может быть от -12 до 12. Если сумма была ± 9, то было использовано минимум 3 числа, но $\pm 3 = \pm 1 + \pm 2$, т. е. использовано лишь 2 базовых числа. В противном случае сумма чисел в группе — утроенное базовое число. При вычислении c нужно группу (содержащую более одного слагаемого) заменить на это число.

Все оставшиеся t_i делятся на 3, и при делении на 3 снова получаем базовые числа. Значит, число 3^{a-1} представимо в виде суммы $m' < m$ базовых числа. По предположению индукции $m' \geqslant a$, а значит, $m \geqslant a + 1$.

(*И. Митрофанов*)

24.1. Условие. Дан единичный вектор. Разрешается выбрать прямую и заменить вектор его проекцией на эту прямую. С новым вектором можно провести ту же процедуру, и т. д. Прямая каждый раз выбирается заново. Можно ли таким образом развернуть вектор на $180°$, потеряв при этом не более 1 % от его длины? (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что если при достаточно большом n осуществить последовательно n проекций с углом π/n, то длина получившегося вектора будет сколь угодно близка к длине исходного вектора. При проекции вектора длины L на прямую, образующую угол α с его направлением, получается вектор длины $L\cos\alpha$. Поэтому достаточно установить, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n = 1, \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) = 0.$$

Но $\cos x - 1 \sim x^2/2$, $\ln(1+t) \sim t$ при малых x, t. Поэтому

$$n\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \sim -\frac{n(\pi/n)^2}{2} = -\frac{\pi^2}{2n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Задача решена.

Замечание. Это полезный наглядный факт. В частности, данная идея используется в мореплавании. Направление ветра проецируется на нормаль к парусу. Получившийся вектор силы проецируется на направление киля. Поэтому корабль может идти даже под малым углом к направлению против ветра. Выбирая этот угол поочерёдно по обе стороны от направления ветра (делая галсы), корабль может идти и против ветра.

(*А. Я. Канель-Белов*)

24.6. Условие. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$, $k < n$, а) с комплексными, б) с действительными коэффициентами.

Возможно ли равенство многочленов:

$$P_1^2 + \ldots + P_k^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2? \qquad (\textit{Фольклор})$$

а) Ответ: возможно.

Решение. Воспользуемся равенством

$$P_1^2 + P_2^2 = (P_1 + iP_2)(P_1 - iP_2).$$

Подберём P_1, P_2 так, что

$$P_1 + iP_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \quad \text{и} \quad P_1 - iP_2 = 1,$$

т. е. положим

$$P_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1}{2}, \quad P_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1}{2i}.$$

При желании можно добавить $P_3 = \ldots = 0$.

б) Ответ: невозможно.

Решение. Прежде всего отметим, что многочлены P_i должны иметь первую степень. Действительно, если степень P_i равна нулю и $P_i \not\equiv 0$, то P_i — ненулевая константа и сумма $\sum P_i^2$ не обращается в нуль, в то время как $\sum x_i^2$ в нуль обращается. Если же $\deg(P_i) > 1$ при некотором i, то $\sum P_i^2$ есть многочлен степени > 2 (в вещественном случае коэффициенты при старших членах квадратов всегда положительны) и потому

$$\sum P_i^2 \neq \sum x_i^2.$$

Итак, степени всех многочленов P_i равны 1 и, поскольку

$$\sum_{i=1}^{k} P_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

свободные члены всех P_i нулевые (иначе при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ указанная сумма в нуль не обращается).

Множество нулей суммы

$$\sum_{i=1}^{k} P_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

совпадает с множеством M нулей системы однородных уравнений

$$P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Данное множество есть линейное пространство размерности не меньше $n - k$ и при $n > k$ содержит более одной точки, в отличие от множества нулей квадратичной формы $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Замечание. Есть такая олимпиадная задача: если многочлен от одной переменной всюду неотрицателен, то он есть сумма квадратов двух многочленов. В то же время всюду положительный многочлен от нескольких переменных может не быть суммой квадратов многочленов от нескольких переменных (построение контрпримера — поучительная задача). Тем не менее, он является суммой квадратов *рациональных функций* (что составляет содержание *семнадцатой проблемы Гильберта*). См. также задачу 1.6 (выпуск 1, с. 194) и её решение в выпуске 5, с. 221–223, а также решение п. (б) в выпуске 10, с. 274. (*А. Я. Канель-Белов*)

24.8. Условие. а) Какое максимальное число точек можно отметить в единичном трёхмерном кубе так, чтобы все попарные расстояния были строго больше 1? Больше или равны 1? б) Аналогичные вопросы для четырёхмерного куба. (*Фольклор*)

Ответ: а) Соответственно 7 и 8 точек. б) Соответственно 15 и 17 точек.

Решение. *Примеры.* а) Ясно, что если отметить 8 вершин куба, то все попарные расстояния будут не меньше 1. Покажем, как отметить 7 точек на расстояниях больше 1. Вначале отмечаем 8 вершин куба, затем выбираем одну вершину P и снимаем с неё метку. Вершины куба разбиваются на 4 слоя — точка P, её соседи, соседи её соседей и противоположная вершина Q. Если точки второго слоя сдвинуть по рёбрам на 10^{-2} в сторону точки P, точки третьего слоя сдвинуть на 10^{-4} в сторону ближайших точек второго слоя, а точку Q сдвинуть на 10^{-6} в сторону одной из вершин третьего слоя, то получится искомый пример.

б) Расстановка 15 точек с попарными расстояниями больше 1 строится аналогично, а если расположить 17 точек в вершинах и центре четырёхмерного куба, то попарные расстояния будут не меньше 1.

Оценки. а) Покажем, что в единичном трёхмерном кубе нельзя расположить больше 8 точек так, чтобы попарные расстояния были не меньше 1. Разобьём куб на 8 равных кубиков. Тогда в каждом будет не более одной отмеченной точки, ибо диагональ кубика равна $\sqrt{3}/2 < 1$ и две точки в него не поместятся.

Пусть в кубе отмечено 8 точек с попарными расстояниями не меньше 1. Рассмотрим отмеченные точки A, B в соседних кубиках. Эти кубики примыкают к ребру E, которое разделяет две грани куба, содержащие грани этих кубиков. Будем считать ребро E вертикальным. Пусть нижняя грань нижнего из кубиков лежит в плоскости XOY. Тогда проекция $|A''B''|$ отрезка AB на плоскость XOY не больше $\sqrt{2}/2$ — диагонали грани кубика. Значит, проекция отрезка AB на ребро E не меньше $\sqrt{2}/2$, ибо

$1=|AB|^2=\sqrt{|A'B'|^2+|A''B''|^2}$. Следовательно, расстояния от точек A, B до ближайших граней не больше $a_1=1-\sqrt{2}/2$. Рассматривая всевозможные пары соседних кубиков, получим, что отмеченные точки живут в кубиках с ребром a_1 при вершинах исходного куба.

Рассматривая эти кубики и рассуждая аналогично, получим, что

$$|A''B''|\leqslant\sqrt{2}a_1 \quad \text{и} \quad |A'B'|\geqslant\sqrt{1-2a_1^2}.$$

Из этого следует, что наши точки живут в кубиках с ребром

$$a_2=1-\sqrt{1-2a_1^2}$$

при вершинах исходного куба, и т. д. Иными словами, зададим последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ рекуррентно. Положим

$$a_0=\frac{1}{2}, \quad a_{i+1}=1-\sqrt{1-2a_i^2} \quad (i=1,2,\ldots).$$

По индукции получаем, что при всех i все отмеченные точки живут в кубиках с ребром a_i при вершинах исходного куба.

При этом a_i убывают и положительны, поэтому они стремятся к некоторому пределу a, для которого

$$a=1-\sqrt{1-2a^2}.$$

Этому равенству удовлетворяют 0 и $2/3$, но $2/3>1/2$, поэтому предел a_i равен нулю и все отмеченные точки лежат в вершинах большого куба — пересечениях семейств кубиков. Следовательно, расположить в кубе 8 точек с попарными расстояниями строго больше 1 нельзя.

б) Разобьём единичный четырёхмерный куб на 16 кубиков с ребром $1/2$. Пусть в кубе отмечено более 16 точек с попарными расстояниями не меньше 1. Если отмеченная точка принадлежит $n>1$ кубикам, то дадим ей вес $1/n$ в каждом из них. Сумма всех весов равна количеству отмеченных точек. Тогда некоторому кубику отвечает сумма весов больше 1. Значит, в кубике отмечено более одной точки, но это могут быть лишь две противоположные вершины. Если их веса меньше 1, то они не больше $1/2$ и их сумма не больше 1. Следовательно, вес хотя бы одной из вершин равен 1. Но тогда она является вершиной единичного куба, а противоположная вершина кубика — центром куба. В других кубиках можно будет отметить лишь вершины, противоположные центру куба, и всего отмеченных точек будет 17.

Теперь предположим, что в единичном кубе отмечены 16 точек на попарных расстояниях больше 1. Тогда в каждом из подкубиков может быть не более одной отмеченной точки. Если точка принадлежит границе двух кубиков, то ни в одном из них не может быть другой отмеченной точки, поэтому количество отмеченных точек будет меньше 16. Значит, можно считать, что в каждом кубике выбрано по точке и эта точка не попадает в другие кубики. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что в ε-окрестности общих границ кубиков нет отмеченных точек, т. е. точки отмечены в кубиках с ребром $1/2-\varepsilon$, примыкающих к вершинам большого куба.

Теперь мы готовы рассуждать, как в п. а). Положим

$$a_1 = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad a_2 = 1 - \sqrt{1-3a_1^2}, \quad \ldots, \quad a_{i+1} = 1 - \sqrt{1-3a_i^2}, \quad \ldots$$

Тогда $a_i \to 0$ при $i \to \infty$. Рассуждая как в пункте а), получим, что каждая отмеченная точка совпадает с вершиной куба. Но тогда некоторые из их попарных расстояний равны 1 — противоречие.

Для плоскости ситуация аналогична трёхмерному случаю, а для размерностей больше 4 — например, пятимерья — ситуация неизвестна.

(*А. Я. Канель-Белов*)

24.10. Условие. В k-мерном пространстве отмечены n точек. Разрешается взять прямую, на которой уже лежит не менее t отмеченных точек, отметить любую другую точку на этой прямой и далее повторять эту процедуру. Оказалось, что любую точку пространства можно отметить. При каком наименьшем числе n изначально отмеченных точек это могло случиться? (Число t изначально фиксировано, ответ зависит от t.)

(*И. В. Митрофанов, Ф. В. Петров*)

Ответ: при $n = C_{k+t-1}^k$.

Решение. Покажем индукцией по k, что если взять $k+t-1$ гиперплоскостей общего положения и отметить все C_{k+t-1}^k точек их пересечения по k, то любая точка пространства сможет быть отмечена. База $k=1$ очевидна: это t точек на прямой. Проведём переход к $k>1$ от $k-1$. Рассмотрим в k-мерном пространстве любую из проведённых гиперплоскостей. Тогда остальные гиперплоскости высекают на ней $k+t-2$ гиперплоскостей общего положения размерности $k-2$, и все их точки пересечения по $k-1$ отмечены. По предположению индукции можно отметить каждую из точек этих гиперплоскостей. Проведём любую прямую общего положения относительно гиперплоскостей. Они высекают на прямой $k+t-1$ точек, которые можно отметить, а значит, можно отметить любую точку на этой прямой. Поэтому можно отметить и любую точку всего пространства.

Допустим, что условие задачи выполнено при некотором $n < C_{k+t-1}^k$. Пространство многочленов от k переменных степени не выше $t-1$ имеет размерность C_{k+t-1}^k (доказывается индукцией по $k+t$). Значит, найдётся такой ненулевой многочлен P степени не выше $t-1$, который равен нулю в этих n точках (его коэффициенты определяются из системы однородных линейных уравнений, в которой количество уравнений меньше количества неизвестных). Если P равен нулю в t точках некоторой прямой, то он равен нулю и во всех точках этой прямой (линейным преобразованием переменных можно превратить P в многочлен степени меньше t от одной переменной, меняющейся вдоль этой прямой). Значит, отмечены могут быть лишь нули многочлена P. Противоречие. (*И. В. Митрофанов*)