Геометрия: классика и современность

Теоремы Лежандра о сумме углов треугольника в абсолютной и гиперболической геометриях

Г. А. Гальперин

Введение. Три выдающихся учебника геометрии

С середины XVIII в. во Франции нарастали настроения, знаменовавшие глубокий переворот во взглядах на все общественные отношения в стране; назревала революция. В области народного образования всё настойчивее становились требования его расширения и придания ему более живого и конкретного характера. Это, естественно, не могло не отразиться и на взглядах на преподавание математики. Как известно, новая идеология того времени в наибольшей мере получила выражение у «энциклопедистов», которые в значительной мере и творили её. «Энциклопедия» стала выходить в 1751 г. под руководством Дидро и Даламбера; в частности, математическим её разделом руководил Даламбер.

В 1757 г. появился VII том «Энциклопедии», в котором была опубликована статья Даламбера «Геометрия». Значительная её часть была посвящена вопросу о том, как надлежит составлять начала науки вообще и геометрии в частности. Не останавливаясь на полной (довольно длинной и сложной) концепции Даламбера, отметим, что он не считал, что начала геометрии должны составляться строго по плану и методу Евклида, «необходимо только сохранять внутреннюю связь понятий». Изложение начал геометрии по плану Даламбера должно быть сообразовано с тем, для какой цели книга предназначается — для начального ли обучения, для более серьёзного изучения геометрии или же для подготовки людей, которые имеют склонность и способности к специальным занятиям этой наукой; каждой из этих трёх основных задач должна соответствовать учебная книга особого типа.

Статьи Даламбера получили широкое распространение в самой Франции и за её пределами; с ними не только считались при составлении новых «Начал» геометрии, но часто основывали на них построение новой книги. Из сочинений конца XVIII – начала XIX века три имели наибольшее значение: «Курс математики» Безу, «Начала геометрии» Лежандра и «Начала геометрии» Лакруа[1)]. Все эти три книги-руководства имели различное назначение и различную структуру, но все три отражали тенденцию Даламбера оторвать преподавание геометрии от традиционной тяжёлой схемы «Начал» Евклида; они знаменовали собой новую эпоху в преподавании геометрии. И не случайно: эти книги — именно те три типа учебной книги, о которых говорил Даламбер.

Книга Безу была предназначена для артиллерийских и морских учебных заведений. Этот курс был явно предназначен для первой категории читателей, он написан очень доступно, и его изложение носит до некоторой степени повествовательный характер и не претендует на выдержанную точность. Содержание курса составляют задачи и правила измерительной геометрии; в нём приведены приложения к морским измерениям и работе с приборами. Учебник Безу был написан для начинающих учащихся, и в качестве начального курса он получил широкое распространение (даже англичане перевели его для своих начальных школ).

Но именно потому, что учебник Безу можно рассматривать как пропедевтическое руководство, была необходима более серьёзная учебная книга, предназначенная для школ повышенного типа — для средних учебных заведений (т. е. для второй категории читателей по Даламберу). И такой книгой стали «Начала» Лежандра (1794).

Эта книга действительно сменила книгу Евклида с тем же названием. Лежандр, следуя за Евклидом, существенно и очень глубоко переработал всё содержание геометрии.

Начал он с замены стиля «Начал» Евклида, заменив формально-«эпический» язык греческого геометра живым французским изложением. Он опустил всё, что не укладывается в рамки первого ознакомления с гео-

[1)] Этьен Безу (1730–1783), Адриен Мари Лежандр (1752–1833), Сильвестр Франсуа де Лакруа (1765–1843).

метрией, а доступно лишь людям с высоким общим развитием, превратив свой курс в курс элементарной геометрии и придав ей *метрический* характер. (Метрический характер геометрии — одна из идей Даламбера.)

Лежандр ввёл в курс элементы алгебры, и вся вторая книга «Начал» Евклида отпала, так как она лишь иллюстрировала общие алгебраические соотношения. Он арифметизировал учение об отношениях и пропорциях — и отпала трудная книга V Евклида. Извлечение квадратного корня и введение радикалов освободили геометрию от совершенно недоступной книги X. (Книга X одновременно была подготовительной к книге XIII, задачи которой Лежандр вовсе не рассматривает.) Лежандр строит учение об измерении по плану Даламбера, специально исследует иррациональные отношения величин (при этом евклидова теория пропорций полностью преобразуется, равно как и теория пределов, слабо развитая Евклидом). Лежандр выдерживает возможную для того времени строгость геометрического рассуждения и лишь изредка впадает в ту «химерическую» точность, от которой предостерегал Даламбер. (В самом начале своей книги Лежандр строго доказывает следующее «химерическое» утверждение: *при совпадении двух точек одной прямой с двумя точками другой совпадут не только определённые этими точками отрезки, но и их продолжения*.) Книга Лежандра часто переиздавалась, была переведена на многие языки.

Наряду с книгой Лежандра, который превратил «Начала» Евклида в современный курс геометрии, появилось математическое руководство, расчитанное на учащихся, которые подготавливаются к углублённому изучению математики. Это — книга Лакруа «Начала геометрии» (третье из серии написанных им руководств по «чистой и прикладной математике», начиная с арифметики и кончая дифференциальным и интегральным исчислением).

Содержание книги не очень глубоко отличалось от «Начал» Лежандра, но сама книга была составлена более компактно и в ней были более тщательно отработаны детали: книга начинается с дополнения к курсу арифметики, необходимого для непосредственного перехода к изучению «Начал геометрии».

Не вдаваясь подробно в различия между тремя упомянутыми курсами геометрии — Безу, Лежандра и Лакруа, — отметим только различие, которое касается учения о параллельных прямых.

У Безу это место изложено поверхностно, и трудность его обойдена совершенно. Доказательства прямых и обратных теорем интуитивны и апеллируют к наглядности, и, как и вся книга, рассчитаны только на то, чтобы начинающий учащийся усвоил фактическую сторону дела.

Лежандр формулирует предложение, играющее роль V постулата, отмечает его связь с суммой углов треугольника и старается его доказать. От издания к изданию своих «Начал» он изменяет доказательства утверждения, что сумма углов треугольника равна 180°, то «уточняя» предыдущее своё доказательство, то заменяя его новым. Эта глава доставляла большие затруднения Лежандру, и после многочисленных «доказательств» V постулата и последующих за ними опровержений Лежандр в конце концов (в 14-м переиздании своей книги) честно признаётся читателю, что единственное утверждение, которое ему удалось доказать про углы треугольника, — что их сумма *не превышает* 180°. Лежандровское доказательство этого фундаментального факта мы приводим ниже в несколько переработанном виде, а также (не совсем в хронологическом порядке) приводим его другие столь же замечательные утверждения, относящиеся к абсолютной геометрии и к геометрии Лобачевского.

Что касается Лакруа, то он, следуя Даламберу, аксиом в своей книге не приводит нигде[2]. Однако, сформулировав предложение, что перпендикуляр и наклонная к одной прямой непременно должны встретиться (рис. 1), Лакруа говорит: «В трудности непосредственного доказательства этого предположения заключается несовершенство теории параллельных линий. Многие авторы делали для достижения цели бесплодные усилия; другие, как Безу, маскировали дефектное рассуждение. Мне кажется, это противоречит обязанности точного рассуждения, которую несёт автор каждого элементарного руководства. Я счёл более правильным выявить этот тонкий пункт, допуская его в качестве *постулата*, как это делает Евклид, только в более доступной форме».

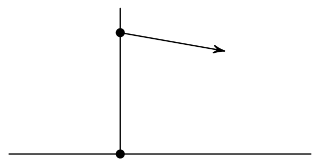


Рис. 1

* * *

Все три упомянутые геометрические книги — Безу, Лежандра и Лакруа — были составлены очень талантливо, они получили широкое распространение по всей Европе и выдержали большое число изданий.

[2] Даламбер считал, что начала геометрии не следует начинать с аксиом, так как построение учебной книги на предпосланных аксиомах есть «претензия на „химерическую точность“», и эта «химерическая точность», оставаясь сомнительной в научном отношении, в учебной книге несомненно вредна и даже часто переходит в софистику. (Одно из таких «химерических» утверждений Лежандра о совпадении прямых приведено выше.) Хорошо известно, что построение геометрии Евклидом не носило строго логического характера. Наглядные представления и «указания глаза» сопутствуют в «Началах» логическим рассуждениям на всём их протяжении, и многие «строгие выводы» из аксиом вовсе не строги.

Не будет преувеличением сказать, что все последующие учебные книги по геометрии в XIX в. в большей или меньшей степени копировали книги Безу, Лежандра и Лакруа или же заимствовали отдельные части то у одного, то у другого автора[3)].

Не пошёл по этому пути только Лобачевский, написавший свой собственный учебник геометрии и создавший новую геометрию. Лежандр был единственным геометром, оказавшим влияние на Лобачевского при построении его теории параллельных линий. Влияние это, несомненно, было велико: учение о сумме углов треугольника в её связи с теорией параллельных линий в работах Лобачевского явно несёт на себе печать рассуждений Лежандра.

В этой статье мы приводим в несколько модернизированном виде утверждения и доказательства Лежандра, справедливые в абсолютной и гиперболической геометриях. Два из этих утверждений, Л1 и Л2, использовались в заметке автора об освещении плоскости прожекторами.

§ 1. Теорема Лежандра о сумме углов треугольника

Все утверждения элементарной геометрии, доказательства которых никак не затрагивают V постулата Евклида о единственности параллельной прямой, проходящей через точку вне данной прямой b («базы») и параллельной b, принадлежат так называемой *абсолютной* (*нейтральной*) *геометрии*. Двухтысячелетняя попытка доказать V постулат, основываясь лишь на «абсолютных» аксиомах, фактически эквивалентна попытке доказать, что вся геометрия и есть «абсолютная». Этого очень желал и сам Евклид, когда вывел свои первые 28 *абсолютных* теорем. Но затем наступил момент, когда Евклиду понадобилось ввести в свои дальнейшие рассуждения сумму углов треугольника и ему желательно было мыслить эту сумму как некую *константу*, а не как переменную величину, зависящую от формы треугольника и, возможно, от расположения этого треугольника на плоскости. Эта константа немедленно связывалась с *прямым углом* на плоскости, образованным двумя перпендикулярными прямыми. Прямой угол служил естественной мерой (единицей измерения), которую затем можно было удваивать, утраивать, дробить на мелкие, более удобные единицы измерения; в конце концов, из практических соображений, была введена новая единица измерения в 1°, равная $1/90$ прямого угла. Таким образом, прямой угол стал по определению содержать 90°,

[3)] Эти книги были переведены и на русский язык: *Безу Е.* Основы геометрии… для назначающих себя к мореплаванию. СПб., 1794; *Лежандр А. М.* Начальные основания геометрии. СПб., 1819; *Лакруа С. Ф.* Основания геометрии. СПб., 1835.

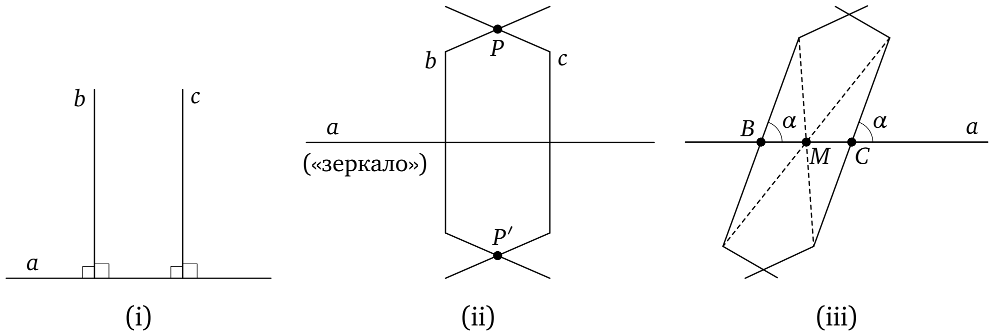


Рис. 2

но для простоты изложения его обозначали (и обозначают до сих пор) буквой d. Развёрнутый угол составил 180°, и это число оказалось именно той константой, которую ввёл Евклид для суммы углов любого треугольника. Исторически всё складывалось не совсем так, но подоплёка была именно такой.

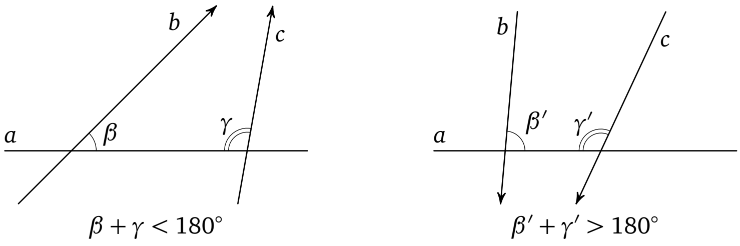
Сначала Евклид заметил, что две прямые b и c, перпендикулярные прямой a, не пересекаются, т. е. параллельны (рис. 2(i)). Действительно, если бы они пересекались в точке P с какой-то стороны от прямой a, то в силу зеркальной симметрии эти же прямые пересекались бы и в симметричной точке P' относительно «зеркала a» (рис. 2(ii)), и тогда прямые b и c пересекались бы в двух точках, P и P', чего не может быть в силу самого первого («первичного») постулата абсолютной геометрии:

(E1) *Через две точки проходит единственная прямая.*

Несколько позже Евклид расширил своё утверждение, заменив перпендикулярность прямых b и c их одинаковым наклоном к прямой a: $\angle(b,a)=\angle(c,a)=\alpha$. Пришлось подправить и доказательство: слова «отражение в зеркале a» следует заменить на «центральное отражение относительно середины M отрезка BC с концами в точках пересечения $B=b\cap a$ и $C=c\cap a$» (рис. 2(iii)). Идея симметрии сохранилась, как и идея получить противоречие с первым постулатом E1.

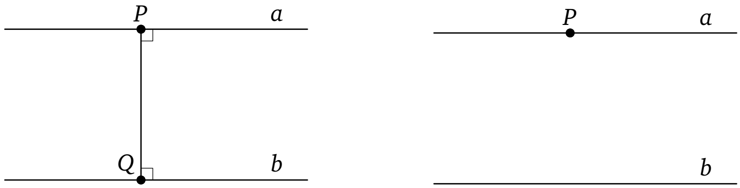
Это навело Евклида на мысль о том, что прямые b и c, наклонённые под *разными* углами к прямой a, *обязаны* пересекаться, причём с той стороны от прямой a, для которой «сумма внутренних углов β и γ меньше 180°» (рис. 3, на котором изображены две возможности пересечения прямых b и c по отношению к прямой a). Это и есть первоначальный неискажённый вариант V постулата Евклида.

После многочисленных попыток его доказательства в течение 20 столетий математики заменили громоздкую формулировку Евклида на две современные формулировки, эквивалентные исходной и друг другу:



(i) (ii)

Рис. 3



(i) (ii)

Рис. 4

(E5) Для пары (b, P), где b — произвольная прямая, а P — произвольная точка не на прямой b ($P \notin b$), существует *единственная* прямая a, параллельная прямой b и проходящая через точку P[4)].

Замечание. «Существование» — это теорема (см. с. 24 и рис. 4(i)); «единственность» — это постулат (E5), см. рис. 4(ii).

(Δ5) Для любого[5)] треугольника Δ сумма его внутренних углов $\sum(\Delta)$ равна 180°.

Лежандр пытался, как и многие другие математики (из наиболее известных — итальянский монах Саккери, англичанин Валлис, немец Ламберт, венгр Фаркаш Бойяи) доказать утверждение (Δ5). В каждом новом издании своего учебника по геометрии, а таких было 14, Лежандр приводил всё новые и новые «доказательства» утверждения (Δ5), придумывая для них всё новые и новые замечательные аргументы и вводя новые по-

---

[4)] Это так называемый «сильный постулат E5»: в формулировке используются два раза кванторы $\forall$ («для любого»). «Сильную» формулировку можно ослаблять, заменяя один или оба квантора $\forall$ на кванторы существования $\exists$. Постулат E5 в его *наислабейшей* формулировке использует квантор существования дважды: «существует прямая b и существует точка $P \notin b$, такие, что…». Все эти формулировки E5 эквивалентны друг другу.

[5)] Постулат (Δ5) сформулирован здесь тоже в «сильном виде». Квантор $\forall$, с которого начинается его формулировка, может быть заменён на квантор $\exists$. Достаточно обнаружить *всего лишь один* треугольник с суммой углов в 180°, чтобы утверждать, что то же свойство выполняется *для всех вообще* треугольников.

нятия, облегчающие доказательства, многими из которых впоследствии воспользовался как Лобачевский, так и (частично) Янош Бойяи. Как уже упоминалось выше во Введении, в последнем издании своего курса Лежандр честно признался, что доказать утверждение ($\Delta 5$) он не может, и что, по-видимому, ($\Delta 5$) следует рассматривать как новую, независимую от предыдущих, аксиому.

Утверждение, сформулированное и доказанное Лагранжем вместо ($\Delta 5$), основывается на предыдущих постулатах Евклида, и, тем самым, является утверждением *абсолютной* геометрии $\mathbb{N}^2$. Как мы знаем сейчас — из трудов Лобачевского и Я. Бойяи — добавление ($\Delta 5$) к утверждениям абсолютной геометрии превращает её в евклидову геометрию $\mathbb{E}^2$, а замещение ($\Delta 5$) на (частичное) отрицание ($\Delta 5$) превращает геометрию $\mathbb{N}^2$ в *гиперболическую* геометрию $\mathbb{H}^2$ (геометрию Лобачевского). Геометрия $\mathbb{N}^2$, таким образом, состоит из всех тех геометрических утверждений, которые справедливы *как в геометрии* $\mathbb{E}^2$, *так и в геометрии* $\mathbb{H}^2$; доказав любое геометрическое утверждение без обращения к постулату (E5) (или к ($\Delta 5$), или же к любому другому утверждению, эквивалентному (E5)), получаем теорему как евклидовой, так и гиперболической геометрии. Поэтому естественно обозначение $\mathbb{N}^2 = \mathbb{E}^2 \cap \mathbb{H}^2$, в том смысле, что «$\mathbb{N}^2$ есть общая часть геометрий $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{H}^2$» (рис. 5[6]).

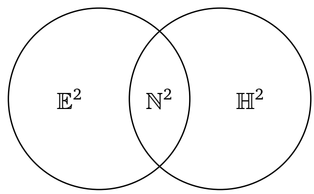


Рис. 5. $\mathbb{N}^2 = \mathbb{E}^2 \cap \mathbb{H}^2$

Приступим к доказательству теоремы Лежандра об углах треугольника, опубликованному им в последнем издании его книги «Начала».

Теорема 1 (Лежандр). *Сумма внутренних углов любого треугольника в геометрии* $\mathbb{N}^2$ *не превышает* $180°$: $\sum(\Delta) \leqslant 180°\ \forall \Delta$.

Доказательство Лежандра. План доказательства состоит в том, что, предположив противное: $\exists\, \Delta_0\ \sum(\Delta_0) > 180°$, Лежандр строит цепочку новых треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *с одной и той же* угловой суммой $\sum(\Delta_0)$, в каждом из которых *наибольший угол* равен сумме двух наибольших углов предыдущего треугольника, а *наименьший* стремится к нулю *экспоненциально*. Поэтому если бы сумма $\sum(\Delta_0)$ превосходила $180°$, то

[6] Некоторые утверждения геометрии $\mathbb{N}^2$ очень трудно (а иногда и невозможно) доказать без добавления аксиомы (E5) или её отрицания $\neg$ (E5). В таких случаях поступают так: доказывают утверждение по отдельности в геометрии $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{H}^2$, после чего делают вывод, что это теорема из $\mathbb{N}^2$. Ярким примером абсолютной теоремы служит такое утверждение: *в любом треугольнике три его медианы пересекаются в одной точке*. Автор знает доказательство по отдельности в геометрии $\mathbb{E}^2$ и в геометрии $\mathbb{H}^2$, но не в самой геометрии $\mathbb{N}^2$.

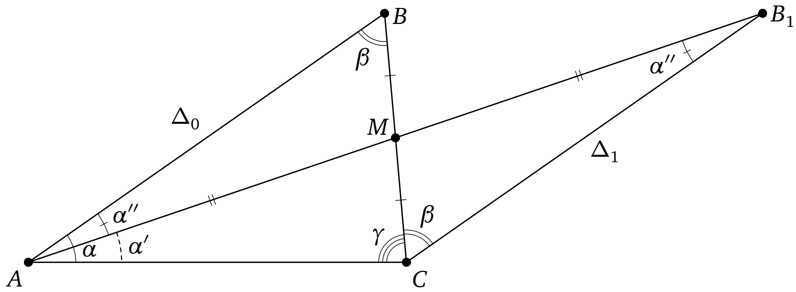


Рис. 6. Построение треугольника Δ_1 $(= AB_1C)$ по Δ_0 $(= ABC)$

наибольший угол последнего треугольника Δ_n превосходил бы $180°$, чего не может быть в силу выпуклости треугольника. (Номер n последнего треугольника в этой процедуре может быть найден конструктивно.)

Приступим к выполнению этого плана. Предположим противное: пусть существует треугольник $\Delta_0 = \triangle ABC$ с $\sum(\Delta_0) > 180°$.

Шаг 1: *построение треугольника* Δ_1.

Пусть $\sum(\Delta_0) = \angle A + \angle B + \angle C = 180° + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и пусть, без ограничения общности, $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$; обозначим также $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Проведём медиану AM наименьшего угла A и продлим её за середину M стороны BC на отрезок MB_1, равный длине этой медианы: $MB_1 = AM$. Соединив точку B_1 с C, получим треугольник $\Delta_1 = \triangle AB_1C$ (рис. 6).

Наблюдение 1. $\sum(\Delta_1) = \sum(\Delta_0)$.

Доказательство. Действительно, $\triangle AMB = \triangle B_1MC$ по двум сторонам и углу между ними: $AM = B_1M$ по построению, $\angle AMB = \angle B_1MC$ как вертикальные углы, $BM = MC$ (поскольку M — середина BC). Отсюда $\angle MCB_1 = \angle B = \beta$ и $\angle MB_1C = \angle BAM = \alpha''$, где $\angle A = \angle BAM + \angle CAM = \alpha'' + \alpha' = \alpha$. Поэтому

$$\sum(\Delta_1) = \angle B_1AC + \angle AB_1C + \angle ACB_1 = \\ = \alpha' + \alpha'' + (\gamma + \beta) = \alpha + \beta + \gamma = \sum(\Delta). \qquad \square$$

Наблюдение 2. Наибольший угол треугольника Δ_1 равен сумме двух наибольших углов треугольника Δ_0, а наименьший угол Δ_1 в 2 раза (или более чем в 2 раза) меньше наименьшего угла треугольника Δ_0.

Доказательство. Поскольку $\alpha' + \alpha'' = \alpha$, имеем $\max\{\alpha', \alpha'', \beta + \gamma\} = \beta + \gamma = \angle B + \angle C$; $\min\{\alpha', \alpha'', \beta + \gamma\} = \min\{\alpha', \alpha''\} \leqslant \alpha/2$. $\square$

Шаг 2: *построение треугольника* Δ_2.

Точно таким же способом строится треугольник Δ_2 из треугольника Δ_1. В треугольнике Δ_1 проводим медиану из вершины его *наименьшего* угла,

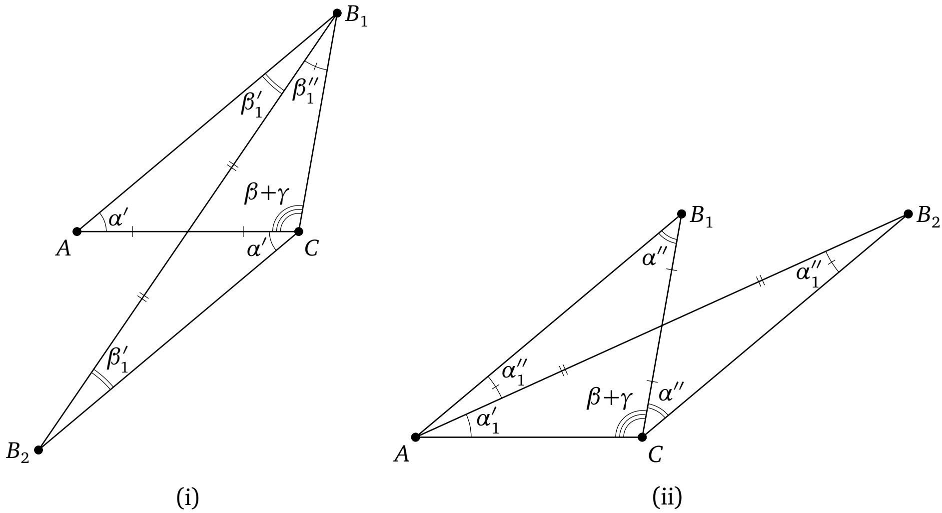


Рис. 7. Построение треугольника Δ_2 по Δ_1
(два возможных случая для $\min\{\angle A, \angle B_1\}$)

продлеваем её за середину стороны на отрезок, равный по длине этой медиане, и конец этого отрезка соединяем с вершиной C *наибольшего* угла треугольника Δ_1 (рис. 7, где изображены два случая удвоения медианы, в зависимости от того, из какой вершины — A или B_1 — эта медиана проведена).

Получаем треугольник Δ_2 (это $\triangle B_1CB_2$ в случае (i) и $\triangle AB_2C$ в случае (ii), рис. 7), у которого *наибольший* угол равен сумме двух *наибольших* углов треугольника Δ_1 ($((\beta+\gamma)+\alpha'$ в случае (i) и $(\beta+\gamma)+\alpha''$ в случае (ii), рис. 7), а наименьший не больше половины угла в Δ_1, т. е. $\alpha/2^2$.

Продолжаем этот процесс и далее: по треугольнику Δ_2 строим треугольник Δ_3, по треугольнику Δ_3 — треугольник Δ_4, и т. д., пока наконец не доходим до треугольника Δ_{n+1} (номер $n+1$ которого определим чуть позже).

В треугольнике Δ_{n+1} *наибольший* угол (при вершине C) равен сумме *наибольших* углов всех предыдущих треугольников $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, *наименьший* угол не превосходит $\alpha/2^{n+1}$. Но, что важнее, *сумма двух наименьших углов треугольника* Δ_{n+1} *не превосходит* $\alpha/2^n$.

Действительно, наименьший угол в треугольнике Δ_n «раздваивается» при проведении медианы и её удвоении в шаге $\Delta_n \to \Delta_{n+1}$: часть его остаётся в той же вершине в Δ_{n+1}, а вторая часть попадает во второй конец удвоенной медианы. На рис. 8 имеем $\angle B_{n+1}A_nC = \alpha_n'$, $\angle B_{n+1} = \alpha_n''$, откуда сумма двух минимальных углов $\angle B_{n+1}A_nC + \angle B_{n+1} = \alpha_n' + \alpha_n'' = \angle A_n$ равна минимальному углу треугольника Δ_n.

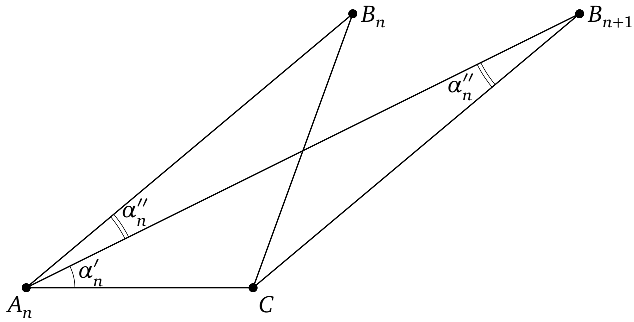


Рис. 8. Сумма двух наименьших углов в Δ_{n+1} не превосходит $\alpha/2^n$

Чтобы получить противоречие, остаётся только подобрать подходящий номер n.

Выберем такое большое натуральное число n, чтобы оценка сверху на сумму двух наименьших углов в треугольнике Δ_{n+1} была меньше числа $\varepsilon/2$, где $\varepsilon = \sum(\Delta) - 180°$. Итак, $\alpha/2^n < \varepsilon/2$, откуда $n > \log_2(\alpha/\varepsilon) + 1$. Мы нашли длину цепочки $\Delta_0 \to \Delta_1 \to \ldots \to \Delta_n \to \Delta_{n+1}$, она равна $n + 2 > > \log_2(\alpha/\varepsilon) + 3$ (и равна $[\log_2(\alpha/\varepsilon)] + 4$). В треугольнике Δ_{n+1} сумма углов $\sum(\Delta_{n+1}) = 180° + \varepsilon$, а сумма двух наименьших углов меньше $\varepsilon/2$; следовательно, наибольший угол в Δ_{n+1} превосходит $180° + \varepsilon/2$, и мы получаем противоречие с неравенством (строгим!) $\angle C_n < 180°$. Теорема 1 доказана. □

§ 2. Может ли геометрия быть одновременно полуевклидовой и полугиперболической?

Теорема 1 Лежандра не позволяет ответить на поставленный в заголовке вопрос. Нужны дополнительные идеи и/или геометрические «эксперименты», которые позволили бы обнаружить два треугольника, один с суммой углов в *точности* 180°, а другой с суммой углов *меньше* 180°.

Другой похожий, но несколько отличный от поставленного в заголовке, вопрос такой: *а могут ли в абсолютной геометрии найтись два треугольника* с *разными* угловыми суммами $\sum_1$ и $\sum_2$? (При этом как $\sum_1$, так и $\sum_2$ могут быть одновременно меньше 180°.)

Лежандр нашёл ответы на оба поставленных вопроса, причём оба раза отрицательные. Ответив на первый вопрос, Лежандр заодно доказал эквивалентность утверждений (E5) и (Δ5) о единственности параллельной прямой и о постоянстве угловой суммы во всех треугольниках. В ходе своих рассуждений он также рассматривал возможность *неединственности* параллельной прямой.

Теорема 2 (Лежандр). *Если в одном треугольнике Δ_0 сумма углов равна $180°$, то и в любом другом треугольнике Δ сумма углов тоже равна* $180°$: $(\exists\, \Delta_0\ \sum(\Delta_0) = 180°) \ \Rightarrow\ (\forall \Delta\ \sum(\Delta) = 180°)$.

Доказательство Лежандра состоит из нескольких шагов.

Шаг 1. *Если* $\sum(\Delta_0) = 180°$, *то существует прямоугольный треугольник* Δ_1 *с тем же свойством*: $\sum(\Delta_1) = 180°$.

Для доказательства этого и многих дальнейших утверждений очень удобно рассматривать наряду с суммой углов треугольника $\sum(\Delta)$ разность $180° - \sum(\Delta)$. Лежандр вводит обозначение[7] для этой разницы: $\delta(\Delta) = 180° - \sum(\Delta)$ и называет её *дефектом треугольника* Δ.

Имеем $\delta(\Delta) \geqslant 0$ по теореме 1. Если $\delta(\Delta) > 0$, то треугольник Δ называется *дефектным*, а если $\delta(\Delta) = 0$, то *недефектным*. Итак, теорема 2 утверждает, что если какой-то треугольник недефектный, то и все вообще треугольники недефектные, а шаг 1 — что существует *прямоугольный* недефектный треугольник.

Упражнение. Докажите, что не наибольший угол в любом треугольнике острый. (Подсказка: это следует из теоремы 1 Лежандра.)

В недефектном треугольнике $\Delta_0 = \triangle ABC$ опустим перпендикуляр CH так, чтобы его основание H попало на сторону AB, а не на её продолжение. Для этого вершины треугольника Δ надо обозначить буквами A, B, C так, чтобы угол C был наибольшим в треугольнике (рис. 9(а)).

Действительно, пусть $H \notin AB$. Тогда без ограничения общности H справа от B (рис. 9(б)) и угол CBH острый (так как угол BHC прямой, а сумма углов треугольника BCH не больше $180°$ по теореме 1 Лежандра). Угол CBA не наибольший в треугольнике ABC и, согласно упражнению, тоже острый. Но тогда сумма смежных углов ABC и CBH меньше $180°$ — противоречие.

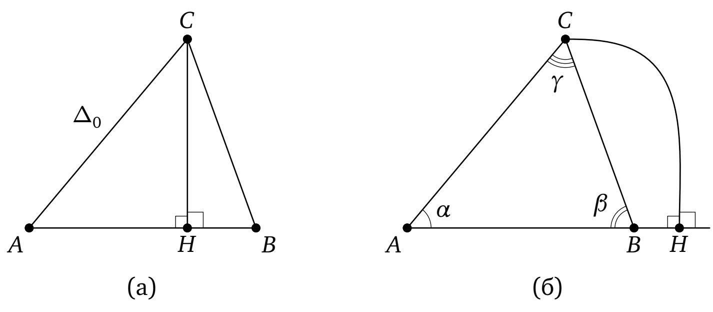


Рис. 9

[7] В радианной мере будем писать $\delta(\Delta) = \pi - \sum(\Delta)$.

Итак, треугольник Δ_0 разбит на два прямоугольных треугольника: $\triangle ABC = \triangle ACH \cup \triangle BCH$. Заметим, что (см. рис. 9(а), где $\angle CHA = \angle CHB = 90°$)

$$\delta(\triangle ACH) = 180° - (\angle A + \angle ACH + \angle CHA) = 90° - (\angle A + \angle ACH),$$
$$\delta(\triangle BCH) = 180° - (\angle B + \angle BCH + \angle CHB) = 90° - (\angle B + \angle BCH).$$

Складывая, имеем

$$\delta(\triangle ACH) + \delta(\triangle BCH) = 180° - (\angle A + \angle B + (\angle ACH + \angle BCH)) =$$
$$= 180° - (\angle A + \angle B + \angle C) = \delta(\triangle ABC),$$

т. е. дефект треугольника $\Delta_0 = \triangle ABC$ равен сумме дефектов треугольников $\triangle ACH$ и $\triangle BCH$. Но $\delta(\Delta_0) = \delta(\triangle ABC) = 0$ по условию, а дефекты двух прямоугольных треугольников неотрицательны, поэтому

$$0 = \delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ACH) + \delta(\triangle BCH) \geqslant 0,$$

откуда $\delta(\triangle ACH) = \delta(\triangle BCH) = 0$. Значит, оба прямоугольных треугольника с вершиной H — недефектные, что и требовалось обнаружить в шаге 1.

Шаг 2. *Если существует недефектный прямоугольный треугольник* Δ_1, *то существует прямоугольник* (*четырёхугольник с четырьмя прямыми углами*).

Приложим вторую копию *недефектного* прямоугольного $\triangle ABC$ так, как показано на рис. 10. Получим четырёхугольник $ABCD$, у которого $\angle C = \angle D = 90°$, а $\angle A = \angle B = \alpha + \beta$. Поскольку $\delta(\triangle ABC) = 0$, имеем $\alpha + \beta = 90°$, поэтому $\angle A = \angle B = 90°$. Итак, $ABCD$ — прямоугольник.

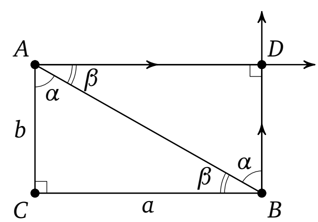


Рис. 10

Шаг 3. *Если существует прямоугольник, то существует прямоугольник со сколь угодно большими сторонами.*

Отражая прямоугольник $ABCD$ относительно его сторон бесконечное число раз, получаем сетку из одинаковых прямоугольников, равных $ABCD$ (рис. 11). В силу того, что все углы $ABCD$ прямые, получаем, что четырёхугольник $XYZT$, стороны которого идут по линиям сетки, тоже прямоугольник; и этот прямоугольник может быть сделан сколь угодно большим.

Понятие дефекта можно распространить на произвольный многоугольник $\mathscr{P}$. Пусть его углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, тогда примем[8] по определению

$$\delta(\mathscr{P}) \overset{\text{def}}{=} 180°(n-2) - \sum(\mathscr{P}),$$

[8] Если углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выражены в радианной мере, то $\delta(\mathscr{P}) = \pi(n-2) - \sum(\mathscr{P})$.

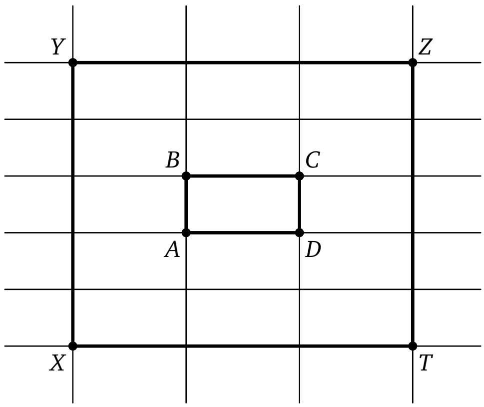


Рис. 11

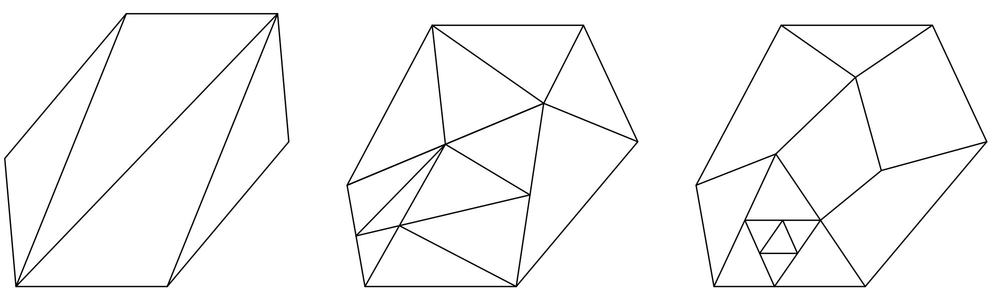
где $\sum(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Разрежем $\mathscr{P}$ его диагоналями на $(n-2)$ непересекающихся треугольников: $\mathscr{P} = \bigcup_{i=1}^{n-2} \Delta_i$ (рис. 12(а)).

Лемма. $\delta(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n-2} \delta(\Delta_i)$ (*аддитивность дефекта* δ).

Оставляем эту лемму читателю. Из неё вытекает следующее утверждение, которое тоже оставляем читателю в виде упражнения.

Упражнение. Разрежем многоугольник $\mathscr{P}$ на непересекающиеся треугольники (рис. 12(б)) или, в общем случае, на непересекающиеся многоугольники $\mathscr{P}_i$: $\mathscr{P} = \bigcup \mathscr{P}_i$ (рис. 12(в)). Докажите, что $\delta(\mathscr{P}) = \sum \delta(\Delta_i)$.

Из леммы и теоремы 1 Лежандра, а также из упражнения получаем неравенство $\delta(\mathscr{P}) \geqslant 0$. В случае равенства $\delta(\mathscr{P}) = 0$ многоугольник $\mathscr{P}$ называется *недефектным*; если же $\delta(\mathscr{P}) > 0$, то *дефектным*. (Пока что мы не можем сказать, являются ли многоугольники $\mathscr{P}_i$ разбиения дефектными или нет.)



(а) (б) (в)

Рис. 12

Шаг 4 (конец доказательства теоремы 2). *Если существует прямоугольник, то любой треугольник недефектный.*

Из предыдущего шага нам известно, что существует сколь угодно большой прямоугольник. Пусть теперь Δ — произвольный треугольник. Расположив его произвольно на плоскости, а тем самым на сетке (рис. 11), возьмём произвольный прямоугольник $XYZT$ со сторонами вдоль линий сетки, содержащий внутри себя треугольник Δ (рис. 13). Подразбив $XYZT$ на многоугольники, один из которых — наш треугольник Δ, и учитывая, что дефекты всех частей разбиения неотрицательны, получаем неравенство $\delta(XYZT) \geqslant \delta(\Delta)$. Заметим теперь, что $\delta(XYZT) = 180°(4-2) - 4 \cdot 90° = 0$ и что $\delta(\Delta) \geqslant 0$. Отсюда имеем $0 = \delta(XYZT) \geqslant \delta(\Delta) \geqslant 0$, т. е. $\delta(\Delta) = 0$, что и требовалось доказать.

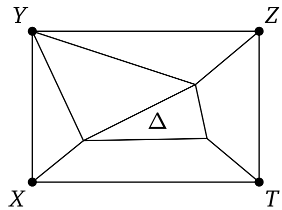


Рис. 13

Итак, начиная с одного недефектного треугольника Δ_0 ($\delta(\Delta_0) = 0$), мы за четыре шага получаем $\delta(\Delta) = 0$, т. е. недефектность любого другого треугольника. Теорема 2 доказана. □

Следствие 1. *Если какой-то один треугольник Δ_0* дефектный, *то и все остальные треугольники тоже* дефектные.

Следствие 2. *Либо все многоугольники одновременно* недефектные, *либо все* дефектные.

Доказательство. Следует из свойства аддитивности дефекта δ (лемма и упражнение на с. 32). □

Следствие 3. *Из двух дефектных треугольников, один из которых расположен внутри другого,* бóльшую *сумму углов имеет* меньший (*расположенный внутри*).

Доказательство. Если $\Delta_1 \supset \Delta_2$, то $\delta(\Delta_1) > \delta(\Delta_2) > 0$ (следует из вышеприведённого упражнения). Следовательно,

$$\sum(\Delta_1) = 180° - \delta(\Delta_1) < 180° - \delta(\Delta_2) = \sum(\Delta_2) < 180°. \qquad \square$$

Выводы

Итак, теперь мы можем ответить на все вопросы, поставленные в начале этого параграфа.

• В $\mathbb{N}^2$ *не могут* существовать два треугольника с угловой суммой, равной 180° и меньшей 180°.

• Если обнаружен треугольник с угловой суммой 180°, то геометрия $\mathbb{N}^2$ на самом деле $\mathbb{E}^2$, т. е. евклидова. При этом угловая сумма любого n-угольника равна $180°(n-2)$.

• Если обнаружен треугольник с суммой углов меньше 180°, то у всех треугольников сумма углов меньше 180°. При этом из вложенных друг в друга треугольников угловая сумма внутреннего треугольника строго больше угловой суммы внешнего. Геометрия в этом случае гиперболическая $\mathbb{H}^2$.

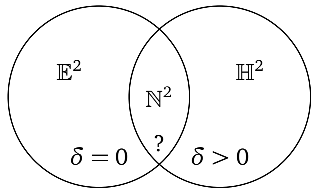


Рис. 14

• Если у двух треугольников разная угловая сумма, то каждая из них строго меньше 180° и геометрия гиперболическая $\mathbb{H}^2$.

Важное отступление: *дефект δ пропорционален площади S.*

Заметим, что в гиперболической геометрии $\mathbb{H}^2$ дефект δ и площадь S многоугольника $\mathcal{P}$ обладают одинаковыми свойствами, а именно, свойствами *положительности* и *аддитивности*:

$$\begin{array}{c|c} (1)\ S(\mathcal{P}) > 0 & (1)\ \delta(\mathcal{P}) > 0 \\ (2)\ \mathcal{P} = \cup \mathcal{P}_i \Rightarrow S(\mathcal{P}) = \sum S(\mathcal{P}_i) & (2)\ \mathcal{P} = \cup \mathcal{P}_i \Rightarrow \delta(\mathcal{P}) = \sum \delta(\mathcal{P}_i) \\ (\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \varnothing) & (\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \varnothing) \end{array}$$

Справедлива теорема, что если две произвольные функции f и g, заданные на множестве всех многоугольников, обладают свойствами (1) и (2), то эти функции пропорциональны:

$$\frac{f}{g} = k = \mathrm{const} \in \mathbb{R}.$$

Поэтому дефект δ и площадь S пропорциональны как функции. Это означает, что если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — два многоугольника, то

$$\frac{S(\mathcal{P})}{\delta(\mathcal{P})} = \frac{S(\mathcal{Q})}{\delta(\mathcal{Q})} = k \in \mathbb{R}.$$

Положив, без ограничения общности, $k = 1$ (поскольку единица площади выбирается произвольно), можем сделать ещё несколько выводов.

• Дефект δ, выраженный в *радианах*, есть *площадь* (многоугольника).

• Треугольник с *меньшей* площадью имеет *большую* угловую сумму.

• Площадь любого треугольника ограничена сверху числом π (площадь строго меньше π и стремится к π при увеличении размеров треугольника до бесконечности и одновременном уменьшении всех углов до 0°).

• Произвольный многоугольник с n сторонами имеет площадь, строго меньшую $\pi(n-2)$.

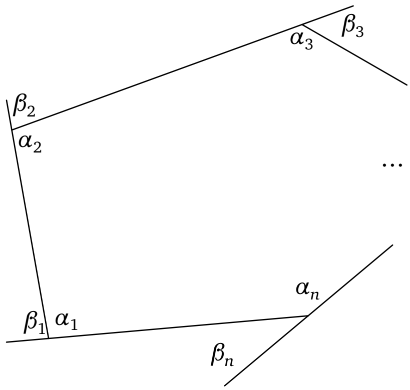


Рис. 15

(На ограниченность площади любого многоугольника в $\mathbb{H}^2$ обратил внимание ещё Гаусс, получая «доказательства» V постулата от разных любителей геометрии, в частности от Фаркаша Бойяи, отца одного из создателей неевклидовой геометрии Яноша Бойяи.)

• В евклидовой геометрии сумма всех *внешних* углов любого многоугольника *всегда* равна 2π, независимо от числа его сторон и его размеров (в частности, от его площади). Иногда, начав с этого факта, доказывают, что сумма *внутренних* углов равна $\pi(n-2)$. Однако в этот момент происходит подмена — заменяют V постулат на эквивалентный постулат постоянства суммы внешних углов. Но в гиперболической геометрии сумма углов не постоянна! Пусть $\{\alpha_i\}$ — внутренние углы, $\{\beta_i = \pi - \alpha_i\}$ — внешние углы, S — площадь многоугольника. Подсчитаем дефект δ:

$$\delta(\mathscr{P}) = \pi(n-2) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) - 2\pi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \delta(\mathscr{P}) + 2\pi.$$

Из этой формулы видно, что, поскольку $\delta(\mathscr{P}) = 0$ в $\mathbb{E}^2$, то $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi$, а в $\mathbb{H}^2$ получаем $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi + S$, т. е. к 2π добавляется площадь многоугольника.

§ 3. Заключительные утверждения и замечания

Теорема Лежандра о сумме углов треугольника (см. § 1) иногда называется первой теоремой Лежандра. Совсем другим способом её доказал и Саккери[9)], поэтому чаще можно встретить название «*теорема Лежандра — Саккери*» (оно появилось в XX в.)

Второй теоремой Лежандра называется теорема о том, что если один треугольник имеет сумму углов 180°, то и все треугольники имеют ту же сумму углов: либо *все треугольники недефектные*, либо *все дефектные*. Она заняла в нашем очерке весь § 2. Иногда эту теорему называют теоремой о трёх мушкетёрах (вспомним здесь девиз: один [треугольник] — за всех, а все [треугольники] — за одного!).

Но и в этой второй теореме Лежандра оказалось, что Саккери опять[10)] опередил его (второй раз!). Тем не менее, доказательство Лежандра (воспроизведённое нами в § 3) настолько элегантно, что, например, его целиком использовал Лобачевский в своих трудах по геометрии.

Популярность книги Лежандра «Начала геометрии» была в своё время настолько велика, что некоторые особо элегантные моменты в его доказательствах даже получили специальные названия. Так, шаг 1 в доказательстве его теоремы 1 (§ 1) — о превращении любого треугольника в новый с той же суммой углов через удвоение медианы — носит название «*конструкция-сифон*» (рис. 16), потому что одна треугольная часть с границей «медиана» ($\triangle ABM$) перетекает, как в сифоне, в равную ей треугольную часть нового треугольника ($\triangle A'CM$).

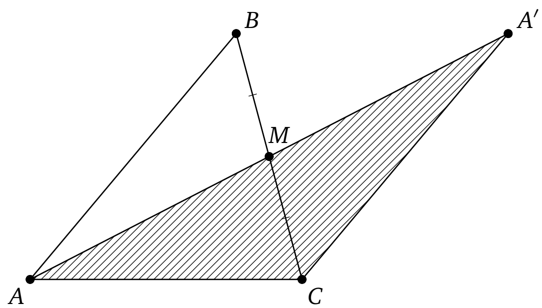


Рис. 16. «Конструкция-сифон» Лежандра

А всё доказательство второй теоремы Лежандра получило название «*домино-доказательство*» — из-за тех четырёх шагов в нём, которые, как падающие костяшки домино, в итоге приводят к нужному результату.

[9)] Джованни Джироламо Саккери (1667–1733), итальянский математик.

[10)] Нужно сказать, что Лежандру, работавшему во многих областях математики, не везло не один раз: он на три года раньше Гаусса опубликовал придуманный им «метод наименьших квадратов», но оказалось, что Гаусс придумал его на несколько лет раньше, и поэтому этот метод приписывается Гауссу.

Список литературы

[1] Статьи Даламбера в «Энциклопедии»: *D'Alembert J.* Éléments des Sciences // Encyclopédie v. V. Paris. 1755. P. 491-498; *D'Alembert J.* Géométrie // Encyclopédie v. VII. Paris. 1757. P. 629-638.

[2] *Legendre A. M.* Éléments de géométrie. Paris, 1794[11)].

[3] *Осиповский Т.* Курс математики, изданный от Главного управления училищ. СПб., 1814 (второе издание)[12)].

[4] *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. М.: Физматлит, 2004[13)].

[5] *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии. М.: МГУ, 1963.

[6] *Bonola R.* Non-Euclidean geometry. New York: Dover Publications Inc., 1958.

[7] *Braver S.* Lobachevsky illuminated. Washington: MAA, 2011[14)].

[8] *Greenberg M. J.* Euclidean and non-Euclidean geometries (Development and History). New York: W. H. Freeman and Company, 2008[15)].

[11)] В последнем издании 1823 года Лежандр дал своё последнее «доказательство» V постулата Евклида.

[12)] Фактически перевод с французского учебника Лежандра.

[13)] Лежандру посвящены с. 21–30.

[14)] Лежандру посвящены главы The Saccheri–Legendre Theorem и The Three Musketeers Theorem.

[15)] Лежандру и другим математикам посвящена глава 4, с. 161–190.

Григорий Александрович Гальперин, Восточно-Иллинойсский университет, Чарлстон, США

ggalperin@eiu.edu