Об инверсных образах точки Фейербаха и обобщении теоремы Емельяновых

В. Д. Попов

В данной работе исследуется образ точки Фейербаха при инверсии относительно окружности, построенной на стороне треугольника как на диаметре. Доказаны некоторые свойства этого образа, с их помощью получены более простые доказательства ряда классических результатов о точке Фейербаха. Также получено обобщение теоремы Емельяновых о полюсах треугольника и связанных с ними окружностях, проходящих через точку Фейербаха.

§ 1. Введение

Точка Фейербаха является одной из наиболее известных замечательных точек треугольника. Она определяется как точка касания вписанной окружности и окружности Эйлера. Одно только определение наводит на естественный и, следует признать, весьма непростой вопрос: а почему факт касания этих двух окружностей действительно имеет место быть? Соответствующую теорему доказал Карл Вильгельм Фейербах в 1822 году:

Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и всех трёх вневписанных окружностей этого треугольника.

С тех пор было придумано свыше 300 других доказательств этой теоремы, причём многие из них используют инверсию. Многочисленность таких доказательств свидетельствует о том, что при изучении геометрических свойств точки Фейербаха инверсия является довольно полезным инструментом. В данной работе мы предлагаем новый способ изучения точки Фейербаха, основанный на рассмотрении её инверсных образов относительно некоторых окружностей. Этот подход позволит нам не только получить ряд новых красивых результатов, но и значительно упростить доказательства некоторых уже известных фактов (см. [2, 4, 6]). Доказательства проводятся для остроугольных треугольников (в других случаях рассуждения аналогичны).

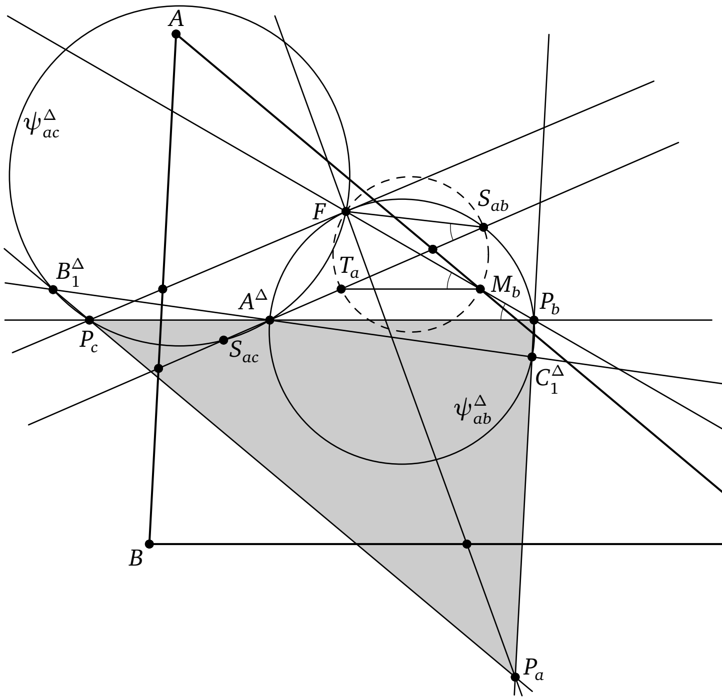

Рис. 1

Наиболее важным и интересным результатом данной работы, полученным с помощью применения такого подхода, следует считать следующую теорему, обобщающую теорему Емельяновых о семействе окружностей, проходящих через точку Фейербаха (см. [2]).

Теорема 1. *Рассмотрим произвольный треугольник ABC, его точку Фейербаха F и его серединный треугольник $M_aM_bM_c$. Обозначим через S_{ab} и S_{ac} точки Шарыгина, соответствующие стороне BC* (см. точные определения в следующем разделе). *Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный серединному треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха F* (рис. 1). *Рассмотрим окружности $\psi_{ab}^{\triangle}$ и $\psi_{ac}^{\triangle}$, проходящие через тройки точек (F, P_b, S_{ab}) и (F, P_c, S_{ac}) соответственно. Тогда точка их пересечения, отличная от F, совпадает с точкой пересечения $A^{\triangle}$ прямых P_bP_c и $S_{ab}S_{ac}$.*

Таким образом, каждый треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха, порождает три пары замечательных окружностей, каждая из которых проходит через точку Фейербаха и одну из точек Шарыгина. Точку $A^{\triangle}$, фигурирующую в теореме 1, и аналогичные ей точки $B^{\triangle}$ и $C^{\triangle}$ на прямых P_cP_a и P_aP_b соответственно, назовём *обобщёнными полюсами треугольника* ABC. Смысл такого названия заключается в том, что если треугольник $P_aP_bP_c$ совпадает с треугольником $K_aK_bK_c$ (см. необходимые обозначения в следующем разделе), то точки $A^{\triangle}$, $B^{\triangle}$ и $C^{\triangle}$ превращаются в точки A_{00}, B_{00} и C_{00}, введённые Емельяновыми в статье [2] и названные ими *полюсами треугольника* ABC.

§ 2. Вспомогательные факты

Зафиксируем обозначения.

- A, B, C — вершины треугольника;
- O — центр описанной окружности;
- M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно;
- ω — вписанная окружность треугольника ABC с центром I;
- ω_a — вневписанная окружность с центром I_a, касающаяся стороны BC;
- G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB;
  G'_a — точка касания вневписанной окружности ω_a со стороной BC;
- λ_a — окружность, построенная на стороне BC как на диаметре;
- S_{ab}, S_{ac} — точки Шарыгина, т. е. точки пересечения окружности λ_a со средними линиями M_aM_b и M_aM_c соответственно;
- ε, ε_a — окружности девяти точек треугольника ABC и треугольника IBC соответственно;
- F — точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек треугольника ABC (точка Фейербаха).

Мы начнём с того, что приведём доказательство теоремы Фейербаха. Это доказательство, найденное П. В. Бибиковым, является модификацией классического доказательства теоремы Фейербаха (см., например, [1]), использующего инверсию, однако более геометрично и менее счётно. Для начала дадим следующее определение.

Определение 1. Точки A, B, C, D, лежащие на одной прямой, образуют *гармоническую четвёрку*, если

$$[AB, CD] = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = 1.$$

Понятие гармонической четвёрки точек тесно связано с инверсией. А именно, четвёрка точек A, B, C, D образует гармоническую четвёрку, если и только если точки A и B симметричны относительно окружности, построенной на отрезке CD как на диаметре (см., например, [3]). Перейдём теперь к доказательству теоремы Фейербаха (с. 48).

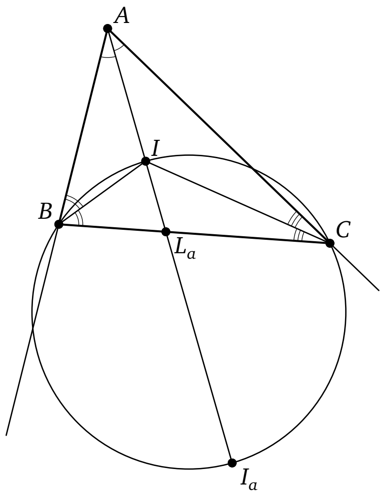

Рис. 2

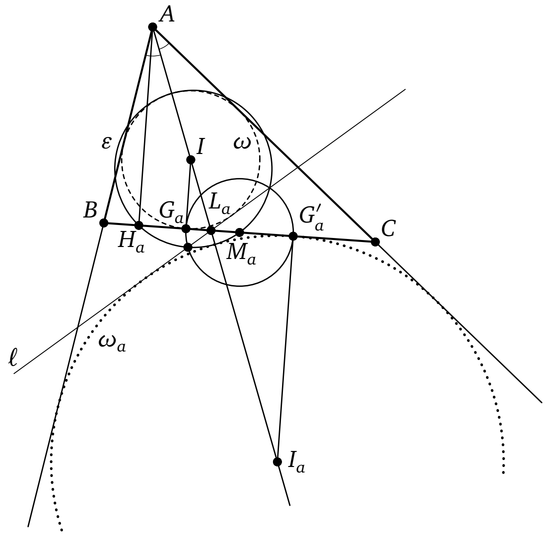

Рис. 3

Доказательство теоремы Фейербаха. Обозначим центр вневписанной окружности треугольника через I_a, а основание биссектрисы, проведённой из вершины A, через L_a. Тогда окружность, построенная на отрезке I_aI как на диаметре, является окружностью Аполлония (см. [3]) для пары точек (A, L_a). Из этого следует, что (A, L_a, I, I_a) — гармоническая четвёрка (рис. 2). Параллельно спроектировав её на прямую BC, мы получим новую гармоническую четвёрку (H_a, L_a, G_a, G'_a). Это означает, что точки H_a и L_a симметричны относительно окружности, построенной на отрезке $G_aG'_a$ как на диаметре (рис. 3). Так как $G_aB = G'_aC$, центр этой окружности совпадает с серединой M_a отрезка BC. Отсюда следует, что при инверсии относительно этой окружности окружность девяти точек ε переходит в прямую ℓ, проходящую через L_a. С другой стороны, эта инверсия оставляет вписанную и вневписанную окружности ω и ω_a на месте, так как обе они ортогональны окружности инверсии (поскольку $IG_a \perp M_aG_a$ и $I_aG'_a \perp M_aG'_a$). Покажем, что прямая ℓ касается окружностей ω и ω_a. Для этого достаточно доказать, что прямая ℓ симметрична прямой BC относительно биссектрисы AI. Докажем это.

Пусть E_a — вторая точка пересечения отрезка AH_a с окружностью ε. Так как инверсия — конформное преобразование, угол между прямыми ℓ и BC равен углу между окружностью ε и BC (угол φ на рис. 4). Далее, этот угол равен углу $H_aE_aM_a$. Четырёхугольник OM_aE_aA является параллелограммом, поэтому $\angle H_aE_aM_a = \angle E_aAO$. Тогда $\angle BAE_a = \angle OAC = 90° - \angle B$. Получаем, что $\varphi = \angle E_aAO = |\angle A - 2 \cdot (90° - \angle B)| = |\angle B - \angle C|$.

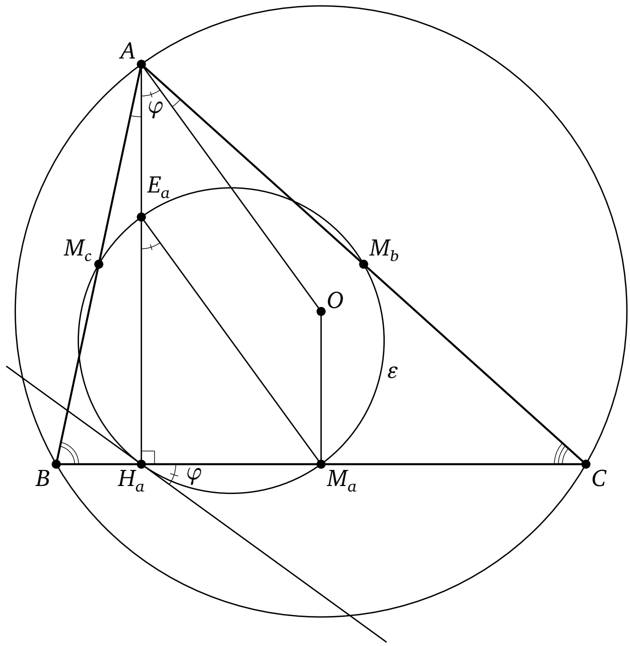

Рис. 4

Теперь рассмотрим прямую $B'L_a$, симметричную прямой BC относительно биссектрисы AL_a. Обозначим угол между $B'L_a$ и BC через φ' (рис. 5). Из треугольника $B'L_aC$ получаем, что $\varphi' = |\angle B - \angle C| = \varphi$. Это означает, что прямые ℓ и $B'L_a$ совпадают, что и требовалось доказать. □

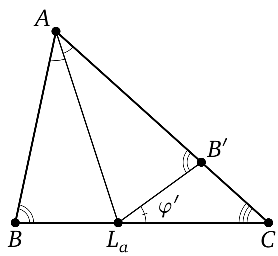

Рис. 5

В дальнейших рассуждениях нам понадобится результат так называемой задачи № 255, получившей широкую известность благодаря предисловию к задачнику И. Ф. Шарыгина [5], в котором она приведена под соответствующим номером.

Лемма 1 (задача № 255). *В точках S_{ab} и S_{ac} пересекаются тройки прямых (G_bG_c, BI, M_aM_b) и (G_bG_c, CI, M_aM_c). Эти точки лежат на окружности λ_a, построенной на стороне BC как на диаметре* (рис. 6).

Замечание. Пусть K_a, K_b и K_c — точки, симметричные точкам G_a, G_b, G_c относительно прямых AI, BI и CI соответственно. Прямая G_aK_b симметрична прямой G_bG_c относительно BI, поэтому точка S_{ab} лежит на G_aK_b. Аналогично точка S_{ac} лежит на G_aK_c (рис. 6).

С точкой Фейербаха оказывается тесно связанной задача, предложенная в 1998 году в финале Всероссийской олимпиады по математике в 10 клас-

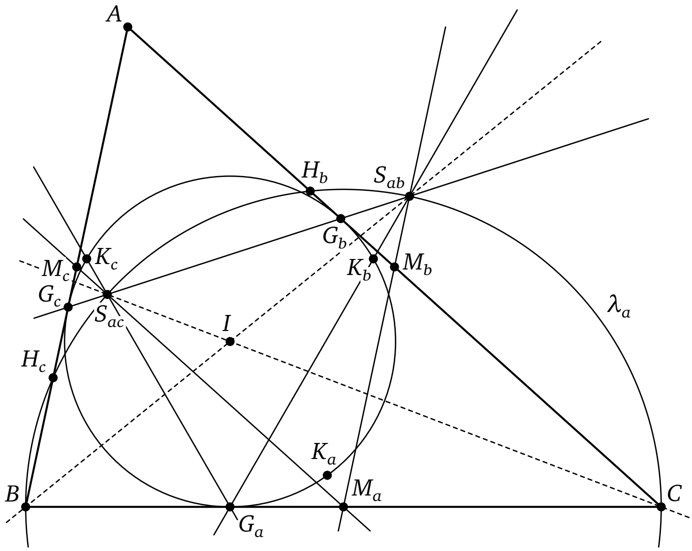

Рис. 6

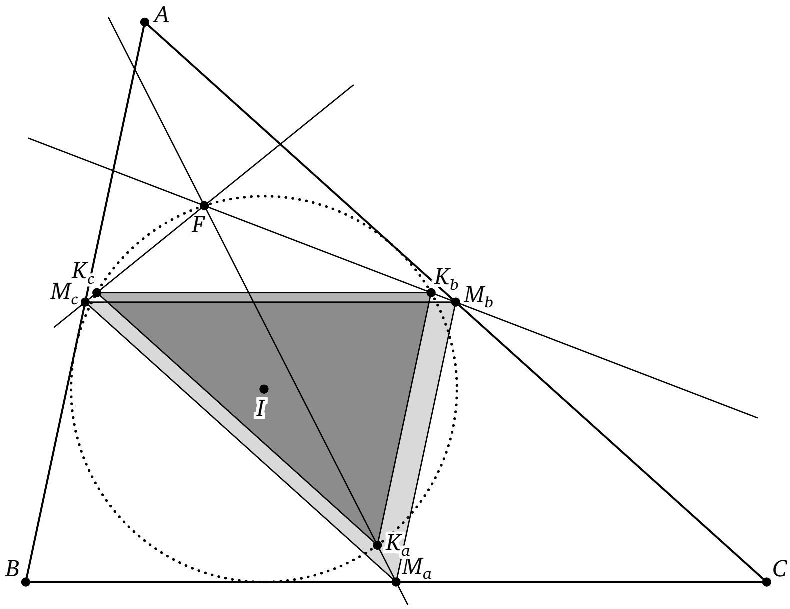

Рис. 7

се под номером 3 (автор И. Шарыгин). В задаче требовалось доказать, что прямые M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c пересекаются в одной точке и что эта точка лежит на вписанной окружности треугольника ABC (рис. 7; отметим, что краткий вариант этой задачи, в котором предлагалось просто доказать,

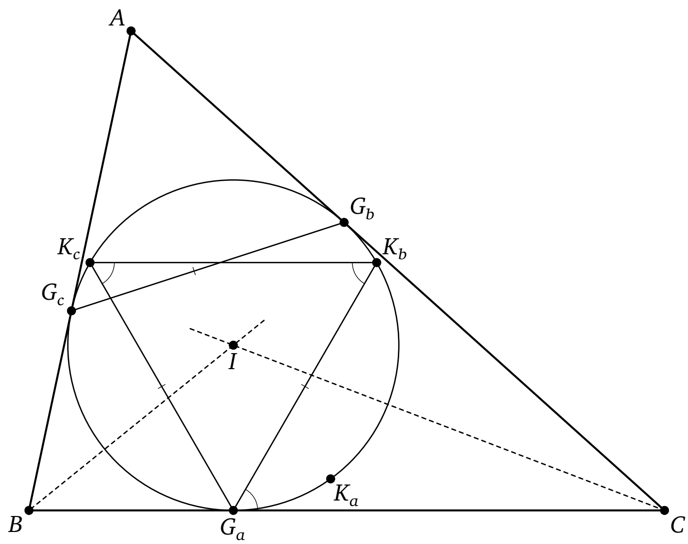

Рис. 8

что прямые M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c пересекаются в одной точке, был предложен на 23 Международной математической олимпиаде в 1982 г. под номером 2).

Для начала докажем, что верна следующая

Лемма 2. *Стороны треугольника $K_aK_bK_c$ соответственно параллельны сторонам треугольников ABC и $M_aM_bM_c$* (рис. 7).

Доказательство. Хорды G_aK_b и G_bG_c симметричны относительно BI, поэтому они равны. Аналогично хорды G_bG_c и G_aK_c симметричны относительно CI и потому также равны. Тогда треугольник $K_cG_aK_b$ равнобедренный, откуда следует, что $\angle G_aK_cK_b = \angle G_aK_bK_c = \angle CG_aK_b$ (рис. 8). Отсюда очевидна параллельность прямых BC и K_bK_c. Для других пар сторон рассуждения аналогичны. □

По лемме 2 и теореме, обратной к теореме Дезарга[1)], треугольники $K_aK_bK_c$ и $M_aM_bM_c$ гомотетичны. Точка пересечения прямых M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c является центром этой гомотетии, а значит и центром гомотетии вписанной окружности и окружности Эйлера, т. е. точкой Фейербаха F.

Нам понадобится ещё одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Точка F лежит на окружности Эйлера ε_a треугольника BIC* (рис. 9).

[1)] Теорема Дезарга. *Если прямые, соединяющие соответственные вершины двух треугольников проходят через одну точку, то три точки, в которых пересекаются продолжения соответственных сторон, лежат на одной прямой.*

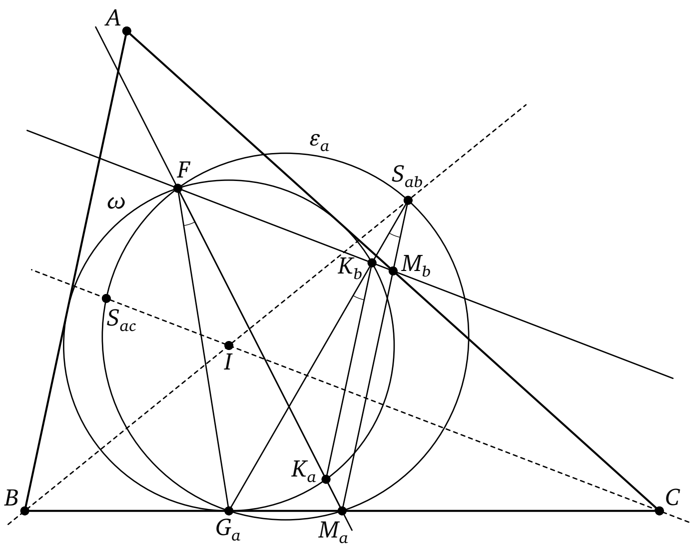

Рис. 9

Доказательство. Заметим, что точки G_a, S_{ac}, S_{ab} и M_a лежат на окружности ε_a, поскольку первая тройка точек — это основания высот треугольника BIC, а точка M_a — середина его стороны BC. Далее, F, G_a, K_a, K_b лежат на вписанной окружности ω треугольника ABC. Значит, $\angle G_aFK_a = \angle G_aK_bK_a$. Так как $K_aK_b \parallel S_{ab}M_a$, имеем $\angle G_aK_bK_a = \angle G_aS_{ab}M_a$ (точки G_a, K_b, S_{ab} лежат на одной прямой по лемме 1). Значит, $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$ и точка F лежит на окружности ε_a. □

Замечание 1. Для любого треугольника и любой точки, не лежащей ни на одной прямой из содержащих стороны треугольника, все окружности Эйлера для треугольников, образованных одной из пар вершин исходного треугольника и этой точкой, имеют общую точку (эта точка P называется точкой Понселе; см. рис. 10). В случае точки I точка Понселе по лемме 3 является точкой Фейербаха.

Замечание 2. Если продлить отрезки BS_{ac} и CS_{ab} до пересечения в точке A_1, то окружность ε_a станет окружностью Эйлера треугольника A_1BC (рис. 11). Действительно, точки S_{ab} и S_{ac} являются основаниями высот, а точка M_a — середина стороны BC.

§ 3. Инверсный образ точки F

Теперь перейдём к основной части программы, где, наконец, будем использовать инверсию. Рассмотрим уже знакомую нам окружность λ_a, по-

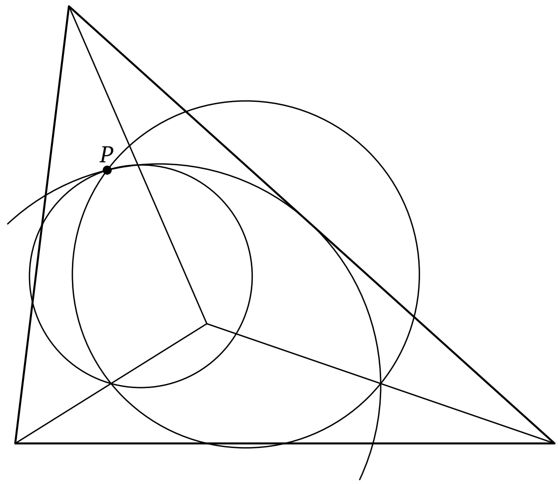

Рис. 10. Точка Понселе

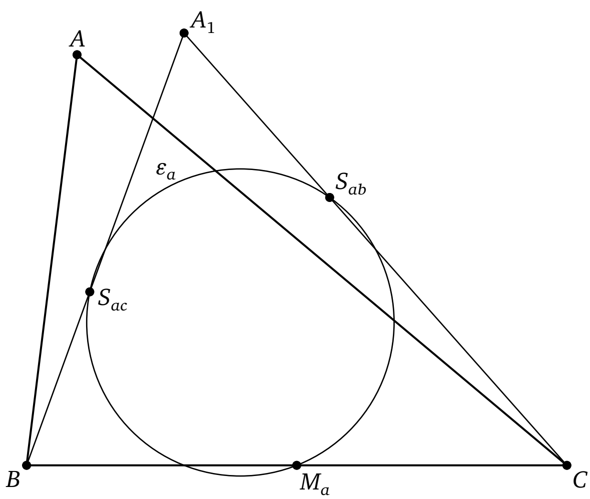

Рис. 11

строенную на отрезке BC как на диаметре. Рассмотрим также точку F_a' — образ точки F при инверсии относительно окружности λ_a. Точка F_a' будет основным объектом наших дальнейших рассуждений.

Для начала посмотрим, куда переходят некоторые точки и окружности при инверсии относительно λ_a. Окружность Эйлера ε перейдёт в прямую H_bH_c, окружность ε_a перейдёт в прямую $S_{ab}S_{ac}$. Кроме того, поскольку точка F является точкой пересечения окружностей ε и ε_a по лемме 3, то точка F_a' является точкой пересечения прямых H_bH_c и $S_{ab}S_{ac}$. В итоге мы получаем следующее красивое

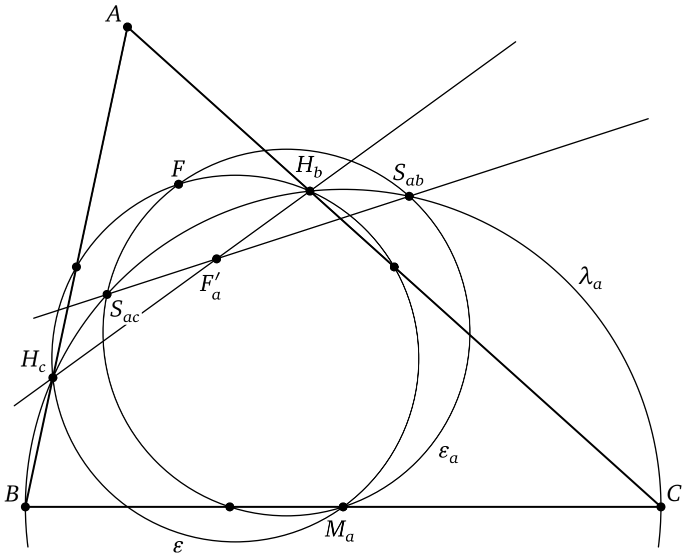

Рис. 12

Предложение 1. *Точка F'_a является радикальным центром окружностей λ_a, ε и ε_a* (рис. 12).

Замечание. В статье [2] точка F'_a называлась *полюсом* треугольника ABC и обозначалась через A_{00}.

Следующий факт в дальнейшем будет играть основную роль, поэтому уделим ему особое внимание.

Теорема 2. *Если K'_b и K'_c — точки пересечения лучей K_aK_b и K_aK_c с прямой H_bH_c, то пятёрки точек $(F, F'_a, K_b, K'_b, S_{ab})$ и $(F, F'_a, K_c, K'_c, S_{ac})$ лежат на окружностях ψ_{ab} и ψ_{ac}* (рис. 13).

Доказательство. Сначала докажем, что четыре точки F, F'_a, K_b, K'_b лежат на одной окружности (рассуждения для четвёрки точек F, F'_a, K_c, K'_c аналогичны). Рассмотрим инверсию Inv_{K_a} с центром в точке K_a, переводящую точку F'_a в точку F, и инверсию Inv_{λ_a} относительно окружности λ_a с диаметром BC. Тогда композиция инверсий $\mathrm{Inv}_{K_a} \circ \mathrm{Inv}_{\lambda_a}$ переводит окружность Эйлера ε в некоторую окружность ω', проходящую через точки F и K_a. В силу того, что инверсия — конформное преобразование, эта композиция сохраняет углы между прямыми и окружностями. Раз центры обеих инверсий лежат на прямой FF'_a, то окружности ε и ω' образуют с прямой FF'_a равные углы. Но это означает, что окружности ε и ω' касаются в точке F. Отсюда следует, что окружности ω и ω' совпадают, поскольку существует единственная окружность, проходящая через точку K_a и касающаяся окружности ε в точке F.

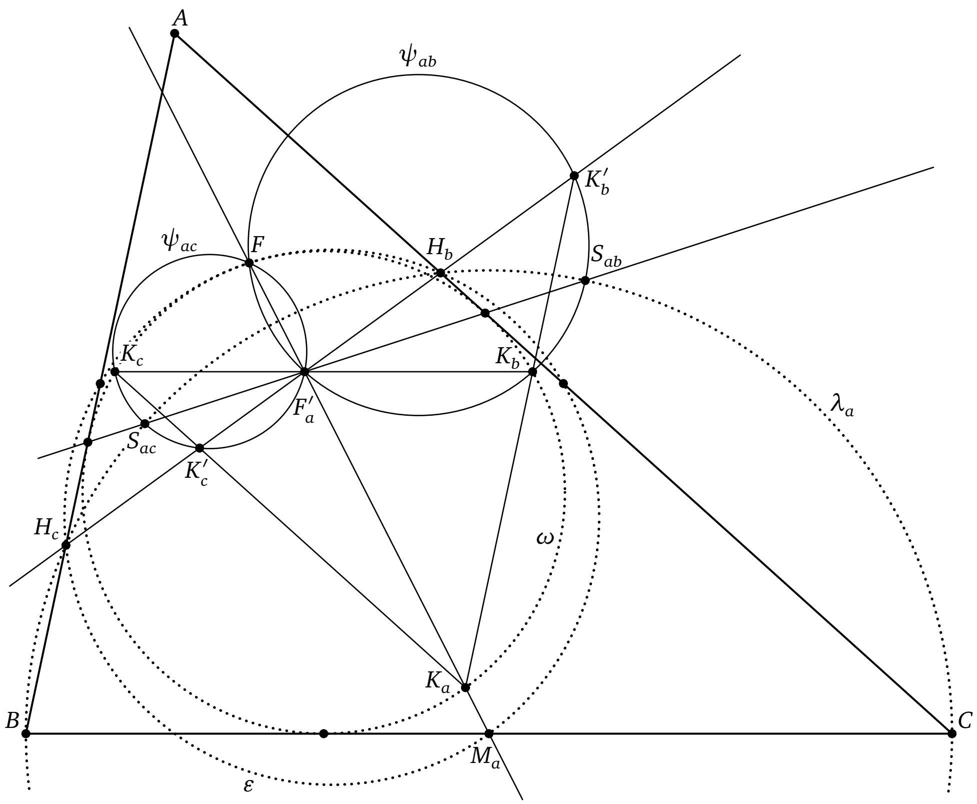

Рис. 13

Далее, заметим, что точка K_b' пересечения луча K_aK_b с прямой H_bH_c — это образ точки K_b при инверсии Inv_{K_a}. Значит, по лемме о подобных треугольниках (см., например, [3]) точки F, F_a', K_b и K_b' лежат на одной окружности.

Осталось загнать на окружности точки S_{ab} и S_{ac}. Для этого используем вписанные углы. Во-первых, $\angle K_aFK_b = \angle K_aK_cK_b$ (рис. 14). Во-вторых, пусть прямая FK_b вторично пересекает окружность ε_a в точке R. Тогда $\angle M_aS_{ac}R = \angle M_aFR$. Прямые M_aS_{ac} и K_aK_c параллельны (см. лемму 2), поэтому вторые лучи равных углов $\angle M_aS_{ac}R$ и $\angle M_aFR$ также параллельны, т. е. $S_{ac}R \parallel K_bK_c \parallel BC$. Отсюда сразу следует равенство углов $\angle M_aFR$ и $\angle S_{ac}S_{ab}G_a$. Значит, точки F, F_a', K_b, K_b' и S_{ab} лежат на одной окружности. Для точки S_{ac} рассуждения аналогичны. Итак, теорема доказана. □

Замечание 3. Прямая M_aS_{ab} касается окружности ψ_{ab}. Это следствие ортогональности окружностей ψ_{ab} и λ_a (см. [3]).

Предложение 2. *Точка F_a' лежит на прямой K_bK_c* (рис. 15).

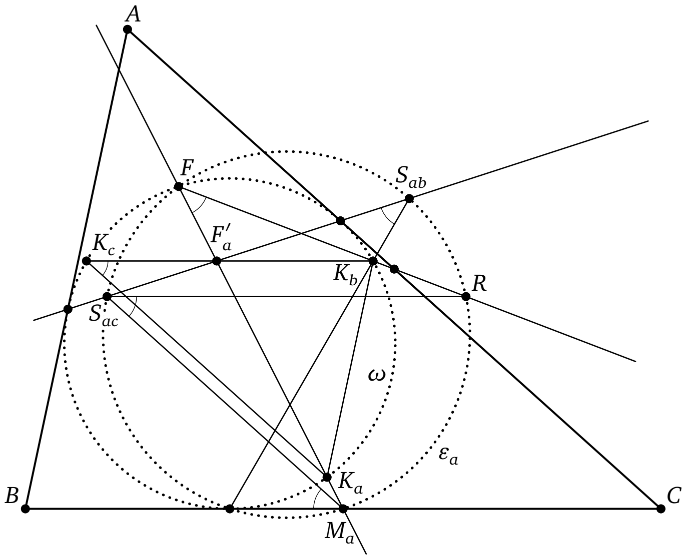

Рис. 14

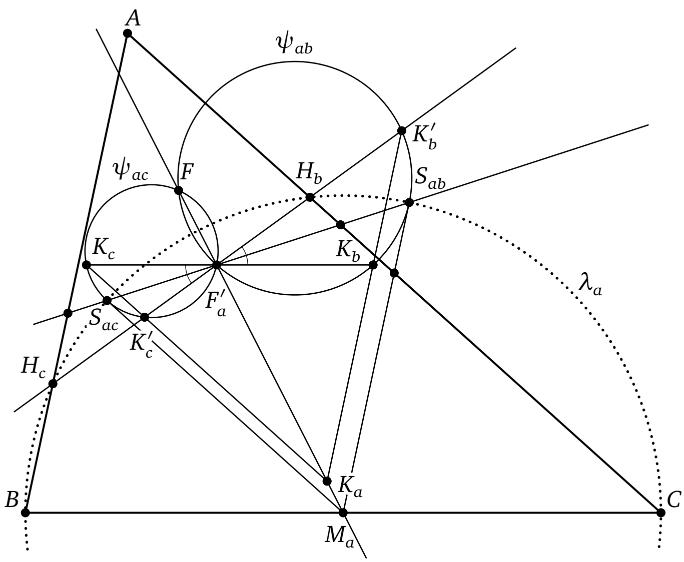

Рис. 15

Доказательство. Заметим, что окружности ψ_{ab} и ψ_{ac} ортогональны λ_a, так как они обе проходят через точки F, F'_a, симметричные относительно λ_a. Тогда по свойству ортогональных окружностей прямые M_aS_{ab} и M_aS_{ac} касаются окружностей ψ_{ab} и ψ_{ac} соответственно. Пары прямых (M_aS_{ab}, K_aK_b) и (M_aS_{ac}, K_aK_c) параллельны, следовательно, $K_bS_{ab} = K'_bS_{ab}$ и $K_cS_{ac} = K'_cS_{ac}$

(параллельные прямые высекают на окружности равные хорды). Тогда $\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab}$ и $\angle K_cF'_aS_{ac} = \angle K'_cF'_aS_{ac}$. Поскольку точка F'_a лежит на прямых H_bH_c и $S_{ab}S_{ac}$, углы $\angle K'_bF'_aS_{ab}$ и $\angle K'_cF'_aS_{ac}$ равны. Значит,

$$\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab} = \angle K'_cF'_aS_{ac} = \angle K_cF'_aS_{ac},$$

откуда следует предложение 2. □

Замечание 4. Из доказательства также следует, что прямая $S_{ab}S_{ac}$ является биссектрисой угла $K_bF'_aH_b$.

Суммируя утверждения 1 и 2, мы получаем, что через точку F'_a проходят четыре замечательные прямые: K_aM_a, H_bH_c, $S_{ab}S_{ac}$ и K_bK_c.

Замечание 5. Можно доказать (см., например, [2]), что через точку F'_a проходят ещё две замечательные прямые: L_bL_c (где L_b и L_c — основания биссектрис BI и CI соответственно) и $G'_bG'_c$ (где G'_b и G'_c — точки касания соответствующих вневписанных окружностей со сторонами AC и AB).

§ 4. Следствия

Теперь мы приведём несколько результатов, доказательства которых можно получить с помощью нашего подхода, связанного с рассмотрением образа F'_a точки Фейербаха F при инверсии относительно окружности λ_a. Начнём с задачи 41-й Международной математической олимпиады (2000 г.), предложенной под номером 6, решение которой мы получаем совершенно «бесплатно». Её условие можно сформулировать следующим образом.

Пусть ABC — остроугольный треугольник. Основания высот треугольника по-прежнему будем обозначать через H_a, H_b, H_c, а точки касания вписанной окружности со сторонами — через G_a, G_b, G_c. Отразим прямую H_aH_b относительно прямой G_aG_b. Аналогично отразим H_bH_c относительно G_bG_c и H_cH_a относительно G_cG_a (рис. 16). *Докажите, что три отражённые прямые при пересечении образуют треугольник с вершинами на вписанной окружности.* (*Т. Емельянова*)

Из предложения 2 следует, что, например, прямые H_bH_c и K_bK_c симметричны относительно прямой G_bG_c. Тогда прямые H_aH_b, H_bH_c, H_cH_a при отражении соответственно относительно G_aG_b, G_bG_c, G_cG_a перейдут в прямые, содержащие стороны треугольника $K_aK_bK_c$, что и требовалось доказать.

Более важным и интересным для нас будет следующий результат, анонсированный Л. и Т. Емельяновыми [2] и обобщённый в работе Гринберга [6] (см. также статью Ф. Ивлева [4]). Формулируется он следующим образом.

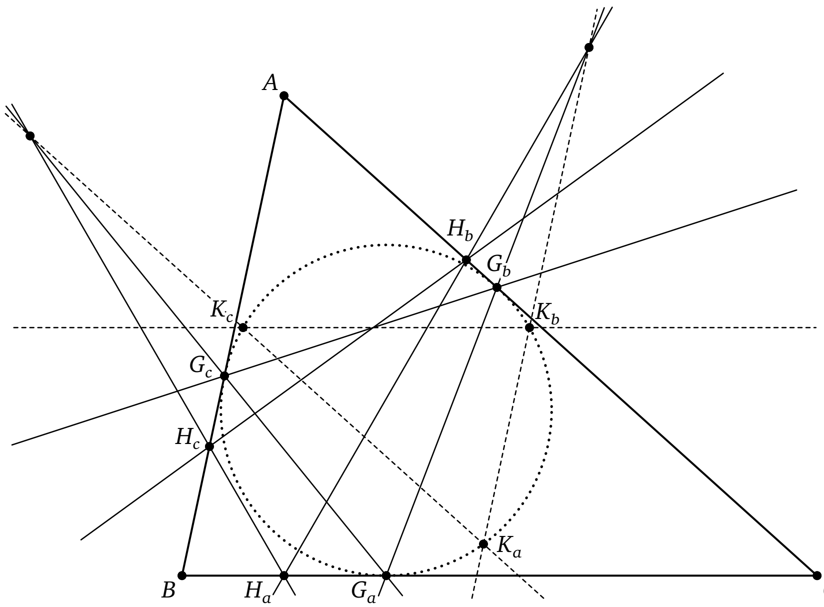

Рис. 16

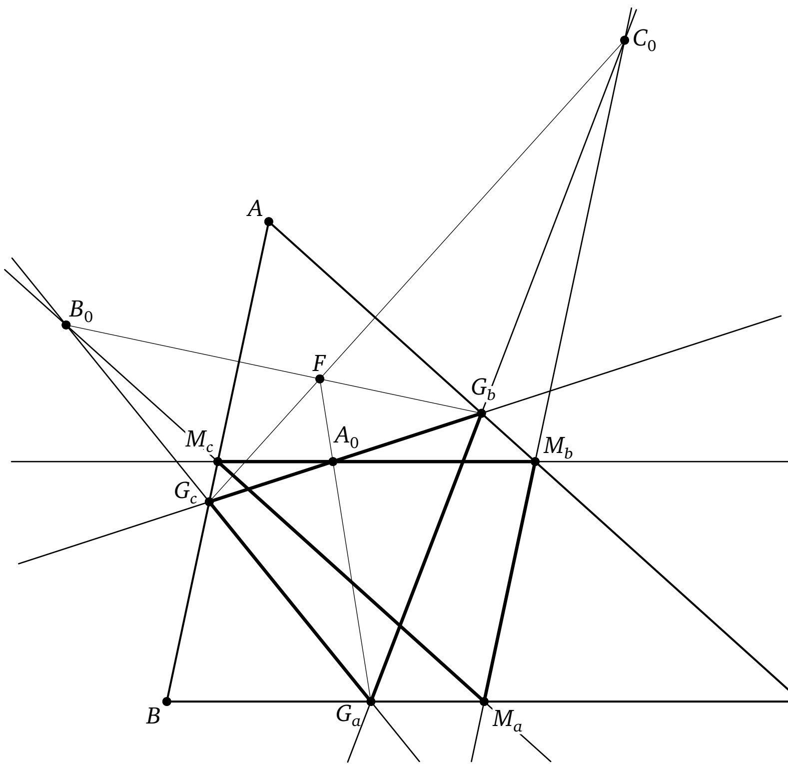

Рис. 17

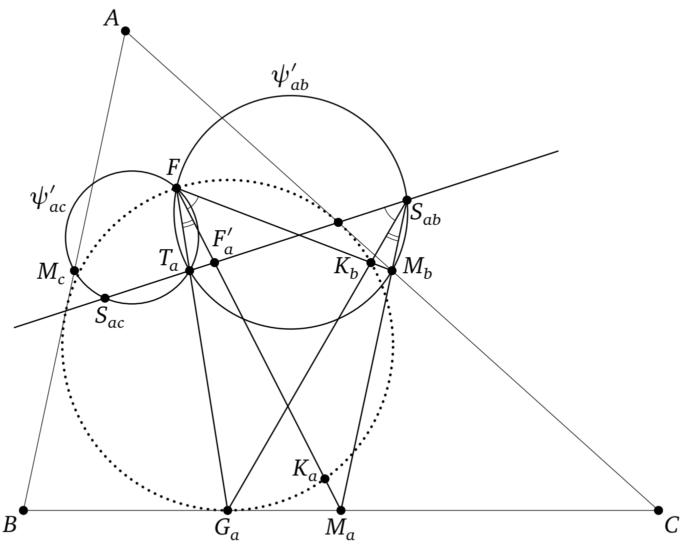

Рис. 18

Теорема 3. *Обозначим через A_0, B_0 и C_0 точки пересечения прямых, содержащих соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и $G_aG_bG_c$. Тогда прямые A_0G_a, B_0G_b и C_0G_c пересекаются в точке F* (рис. 17).

Для доказательства нам понадобится следующее

Предложение 3. *Пусть T_a — точка пересечения прямых FG_a и $S_{ab}S_{ac}$. Тогда четвёрки точек (F, T_a, M_b, S_{ab}) и (F, T_a, M_c, S_{ac}) лежат на окружностях ψ'_{ab} и ψ'_{ac}* (рис. 18).

Доказательство. Приведём доказательство для окружности ψ'_{ab}, поскольку для окружности ψ'_{ac} рассуждения аналогичны. По теореме 2 $\angle M_aFM_b = \angle G_aS_{ab}T_a$. По лемме 2 $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$. Тогда

$$\angle T_aFM_b = \angle M_aFM_b + \angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}T_a + \angle G_aS_{ab}M_a = \angle T_aS_{ab}M_b,$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 3 мы дадим в следующем разделе.

§ 5. Точка Фейербаха как точка Микеля и обобщение теоремы Емельяновых

Приглядевшись к рис. 13 и 18, иллюстрирующим теорему 2 и предложение 3, нельзя не заметить некоторое их сходство: на обоих рисунках присутствуют окружности, проходящие через четвёрки точек, среди которых точка Фейербаха. Оказывается, это неслучайно, и оба этих результата

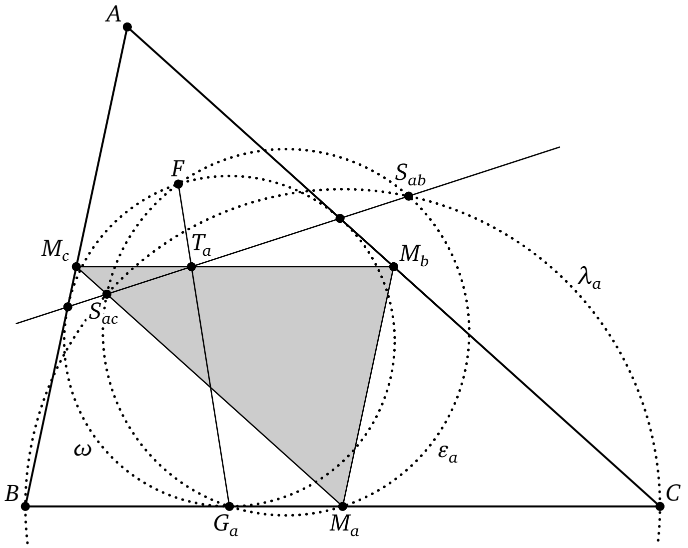

Рис. 19

являются частными случаями некоторой общей конфигурации. В этом разделе мы изучим эту конфигурацию и продемонстрируем её связь с ещё одним классическим геометрическим результатом — теоремой Микеля[2)].

Для начала заметим, что F является точкой Микеля для треугольника $M_aM_bM_c$ и прямой $S_{ab}S_{ac}$ (рис. 19). Отсюда следует, что точка T_a лежит на прямой M_bM_c. Тогда точка T_a есть точка A_0 из теоремы 3, по построению лежащая на FG_a. Аналогичное утверждение справедливо для двух оставшихся точек B_0 и C_0. Тем самым теорема 3 доказана.

Рассмотрение точки F в качестве точки Микеля оказывается не просто вспомогательным шагом к доказательству теоремы 3. На самом деле именно этот ход элегантно обобщает предыдущие результаты и вскрывает причину явления. Реализуем эту конструкцию в общем случае. Для этого докажем теорему 1, сформулированную в начале статьи.

Доказательство теоремы 1. Доказательство этой теоремы похоже на доказательство предложения 2. А именно, рассмотрим окружность ψ'_{ab}, проходящую через точку T_a (см. предложение 3 и рис. 18). Тогда запишем цепочку равенств углов: $\angle A^{\triangle}P_bF = \angle T_aM_bF = \angle T_aS_{ab}F = \angle A^{\triangle}S_{ab}F$, откуда следует, что точка $A^{\triangle}$ лежит на окружности $\psi^{\triangle}_{ab}$. Аналогично доказывается, что точка $A^{\triangle}$ лежит на окружности $\psi^{\triangle}_{ac}$. □

[2)] Если четыре прямых образуют четыре треугольника, то их описанные окружности пересекаются в одной точке, которая называется точкой Микеля этой конфигурации прямых.

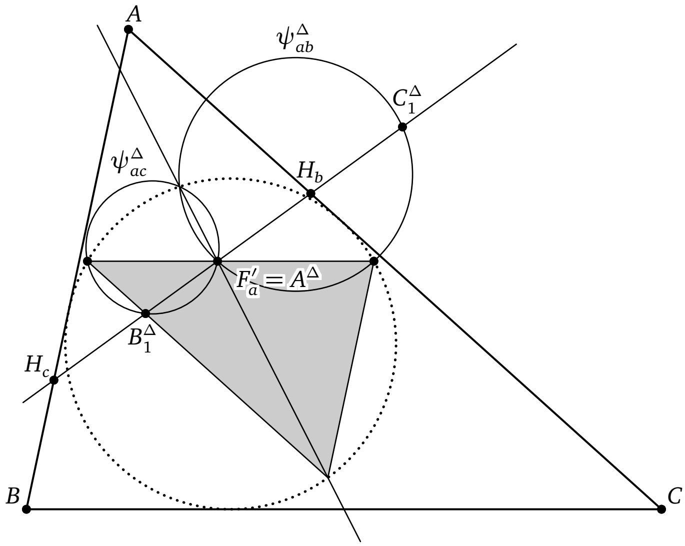

Рис. 20. Прямая H_bH_c

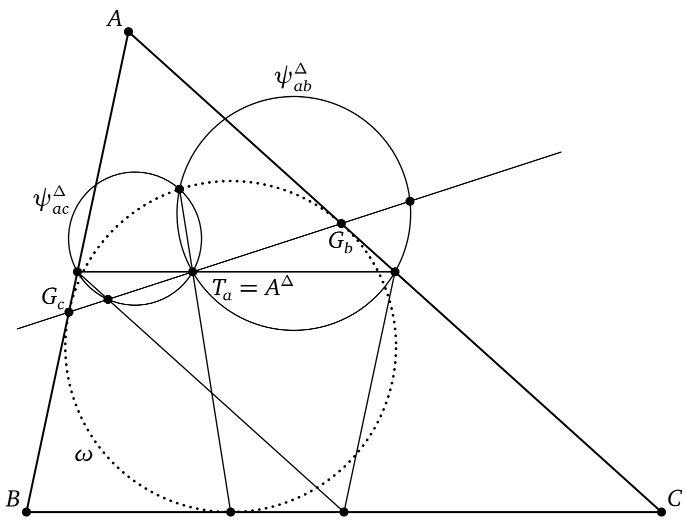

Рис. 21. Прямая G_bG_c

Поясним, почему теорема 1 действительно является обобщением приведённых выше задачи с Международной олимпиады и теоремы Ивлева (см. [4]). Для этого рассмотрим вторые точки $C_1^{\triangle}$ и $B_1^{\triangle}$ пересечения окружности $\psi^{\triangle}_{ab}$ с прямой P_aP_b и пересечения окружности $\psi^{\triangle}_{ac}$ с прямой P_aP_c. Тогда точки $A^{\triangle}$, $B_1^{\triangle}$ и $C_1^{\triangle}$ лежат на одной прямой в силу свойств точки Микеля. В случае задачи с Международной олимпиады эта прямая совпа-

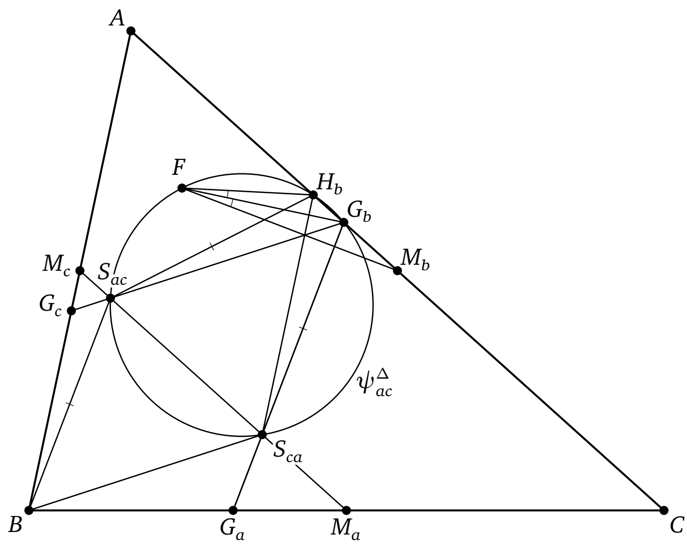

Рис. 22. Прямая G_bG_c

дает с H_bH_c, а точка $A^{\triangle}$ совпадает с F_a' (рис. 20). В случае теоремы Ивлева эта прямая совпадает с G_bG_c (или, что то же самое, с $S_{ab}S_{ac}$), а точка $A^{\triangle}$ совпадает с точкой T_a (рис. 21).

В заключение отметим одну важную окружность из семейства $\psi_{ac}^{\triangle}$.

Предложение 4. *В случае когда точка $A^{\triangle}$ совпадает с точкой G_b, окружность $\psi_{ac}^{\triangle}$ проходит через точки F, H_b, G_b, S_{ac} и S_{ca}* (рис. 22).

Доказательство. Достаточно доказать, что точки F, H_b, G_b, S_{ac} и S_{ca} лежат на одной окружности. Докажем, что четвёрка точек $(H_b, G_b, S_{ac}, S_{ca})$ лежит на одной окружности. Заметим, что прямые BS_{ca} и H_bS_{ac} параллельны, так как обе они перпендикулярны биссектрисе угла BAC. Аналогично прямые BS_{ac} и G_bS_{ca} параллельны, так как обе они перпендикулярны биссектрисе угла ACB. Поэтому четырёхугольник $BS_{ac}H_bS_{ca}$ является параллелограммом и $H_bS_{ac}=BS_{ca}=G_bS_{ca}$. Значит, $S_{ac}H_bG_bS_{ca}$ — равнобокая трапеция, и потому вокруг неё можно описать окружность (рис. 22).

Теперь докажем, что точка Фейербаха также лежит на этой окружности. По лемме Архимеда[3)] следует, что

$$\angle H_bFG_b = \frac{1}{2}\angle H_bFM_b = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C|.$$

[3)] Лемма Архимеда. *Если окружность вписана в сегмент другой окружности, то прямая, соединяющая точки её касания с дугой и хордой, является биссектрисой вписанного угла.*

Далее,

$$\angle H_bS_{ac}S_{ca} = \angle S_{ca}G_bC = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2} \quad \text{и} \quad \angle G_bS_{ac}S_{ca} = \angle AG_bS_{ac} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2},$$

поэтому

$$\angle H_bS_{ac}G_b = |\angle H_bS_{ac}S_{ca} - \angle G_bS_{ac}S_{ca}| = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C| = \angle H_bFG_b,$$

откуда следует, что точка F лежит на описанной окружности трапеции $H_bG_bS_{ca}S_{ac}$, что и требовалось доказать. □

Благодарности

Автор благодарит П. В. Бибикова за внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] *Кокстер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.

[2] *Емельянов Л. А., Емельянова Т. Л.* Семейство Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 78–92.

[3] *Жижилкин И. Д.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

[4] *Ивлев Ф. А.* Несколько прямых, проходящих через точку Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 219–228.

[5] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия: планиметрия. Задачник. 9–11 классы. М.: Дрофа, 2001.

[6] *Grinberg D.* Generalization of the Feuerbach point http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html

Вадим Дмитриевич Попов, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
popov.l2sh@gmail.com