О центрах гомотетий вписанных окружностей и окружностей Тебо

А. К. Львов

§ 1. Введение

На Всероссийской олимпиаде по геометрии им. Шарыгина в 2015 г. Р. Крутовским и А. Якубовым была предложена следующая задача 9.4 (в других обозначениях).

Дан фиксированный треугольник ABD. По описанной около него окружности движется точка C так, что хорды AC и BD пересекаются. Прямая AC разрезает треугольник BCD на два меньших, центры вписанных окружностей которых обозначим через I_{CD} и I_{BC} соответственно. Прямая $I_{CD}I_{BC}$ пересекает прямую BD в точке P. Докажите, что все прямые CP проходят через фиксированную точку.

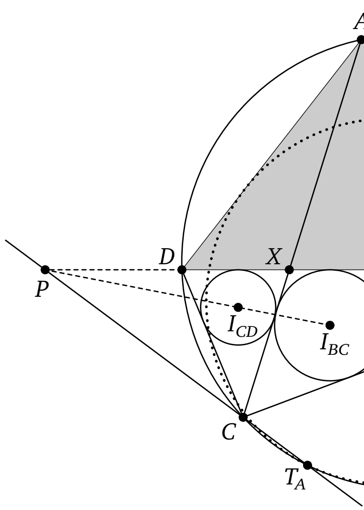

Рис. 1

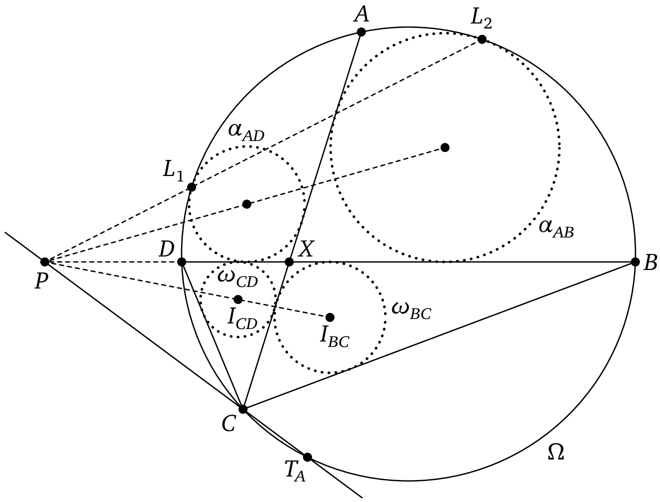

Рис. 2

В замечании к данной задаче указывалось, что эта точка есть точка T_A касания полувписанной окружности треугольника с его описанной окружностью (рис. 1).

В этой заметке мы рассмотрим дальнейшие обобщения этой задачи. Основное внимание при этом будет уделено точке P. А именно, имеет место следующая теорема.

Основная теорема. *Пусть $ABCD$ — вписанный в окружность Ω четырёхугольник, X — точка пересечения его диагоналей. Обозначим через ω_{CD} и ω_{BC} вписанные в треугольники XCD и XBC окружности, а через α_{AD} и α_{AB} — окружности, вписанные в криволинейные треугольники DXA и AXB и касающиеся окружности Ω в точках L_1 и L_2 соответственно* (*так называемой окружности Тебо*). *Пусть также T_A — точка касания окружности Ω и полувписанной окружности треугольника ABD, соответствующей вершине A, и P — точка пересечения прямых BD и T_AC. Тогда*

(1) *точка P является центром гомотетии окружностей ω_{CD} и ω_{BC};*
(2) *точка P является центром гомотетии окружностей α_{AB} и α_{AD};*
(3) *точка P лежит на прямой L_1L_2;*
(4) *внешние центры гомотетии пар окружностей $(\omega_{CD}, \alpha_{AD})$ и $(\omega_{BC}, \alpha_{AB})$ совпадают* (рис. 2).

§ 2. Полувписанная окружность и точка T_A

Мы начнём доказательство основной теоремы с п. 1 и изучения точки T_A касания полувписанной окружности треугольника ABD с описанной

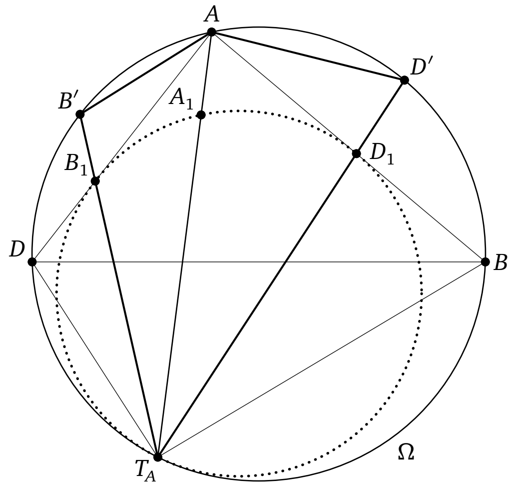

Рис. 3

окружностью Ω. По сути этот пункт повторяет решение указанной выше задачи с олимпиады Шарыгина.

Обозначим через B' и D' середины дуг $\overset{\smile}{AD}$ и $\overset{\smile}{BA}$ окружности Ω.

Лемма 1. *Четырёхугольник $T_AB'AD'$ является гармоническим.*

Доказательство. Пусть B_1 и D_1 — точки касания полувписанной окружности со сторонами AD и AB, а A_1 — вторая точка пересечения AT_A с полувписанной окружностью. Тогда тройки точек (T_A, B_1, B') и (T_A, D_1, D') коллинеарны по лемме Архимеда (рис. 3). Заметим, что четырёхугольник $T_AB_1A_1D_1$ гармонический, т. к. касательные к его описанной окружности, проведённые в вершинах B_1 и D_1, пересекаются на диагонали A_1T_A. С другой стороны, четырёхугольники $T_AB_1A_1D_1$ и $T_AB'AD'$ гомотетичны, поэтому четырёхугольник $T_AB'AD'$ также является гармоническим. □

Проведём теперь

Доказательство п. 1 основной теоремы. Обозначим через I_{BC} и I_{CD} центры окружностей ω_{BC} и ω_{CD} соответственно. Докажем, что прямые $I_{BC}I_{CD}$, BD и T_AC пересекаются в одной точке, откуда будет следовать п. 1.

Пусть прямые $I_{BC}I_{CD}$ и BD пересекаются в точке P'. Ясно, что P' является внешним центром гомотетии окружностей ω_{CD} и ω_{BC}. Обозначим через G точку пересечения прямых $I_{BC}I_{CD}$ и AC, а через T_1 — вторую точку пересечения прямой CP' с окружностью Ω. Тогда G — внутренний центр гомотетии окружностей ω_{CD} и ω_{BC}. Отсюда следует, что четвёрка точек $(P', G; I_{CD}, I_{BC})$ гармоническая. При центральной проекции прямой $P'G$ на окружность Ω из точки C точка G перейдёт в A, точка I_{CD} — в B', точка

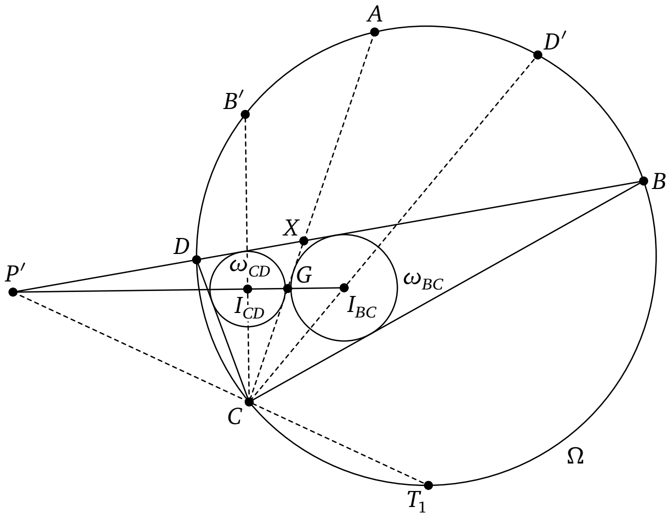

Рис. 4

I_{BC} — в D', а точка P' — в T_1 (рис. 4). Значит, четырёхугольник $T_1B'AD'$ является гармоническим. По лемме 1 получаем, что точка T_1 совпадает с T_A, а значит, точка P' совпадает с P и прямые $I_{BC}I_{CD}$, BD и T_AC пересекаются в одной точке. □

§ 3. Вспомогательные леммы

Для доказательства оставшихся пунктов основной теоремы нам потребуется более серьёзная подготовительная работа. В этом разделе мы докажем ряд лемм, которые связаны с полувписанной окружностью и окружностями Тебо. Большинство из них известны (см., например, [2, с. 125]), однако для полноты изложения мы приведём их доказательства.

Вначале докажем следующий факт, связанный с полувписанной окружностью треугольника ABD. Введём следующие обозначения. Обозначим через B' и D' середины дуг AD и BA окружности Ω соответственно, а через K_A — точку касания вписанной окружности со стороной BD.

Лемма 2. *Пусть прямая, проходящая через вершину A, пересекает прямую BD и окружность Ω в точках E и F соответственно. Тогда точки T_A, K_A, E и F лежат на одной окружности* (рис. 5).

Доказательство. Вначале докажем, что

$$\angle DT_AK_A = \angle ADB \quad \text{и} \quad \angle BT_AK_A = \angle ABD.$$

Пусть K'_A — точка касания стороны BD с вневписанной окружностью Ω_A треугольника ABD, соответствующей вершине A, а S — вторая точка пере-

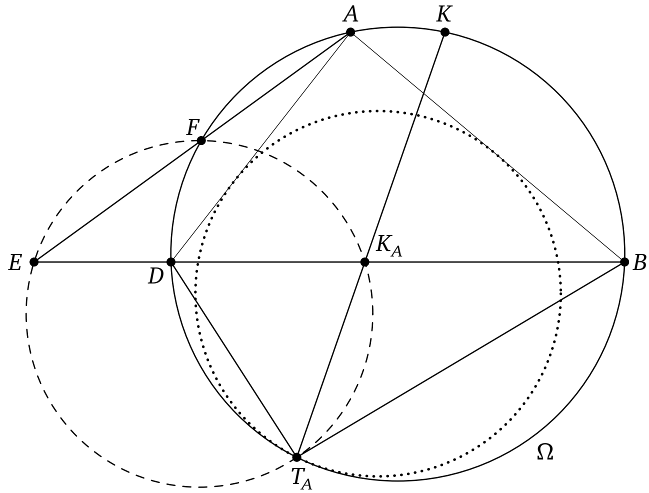

Рис. 5

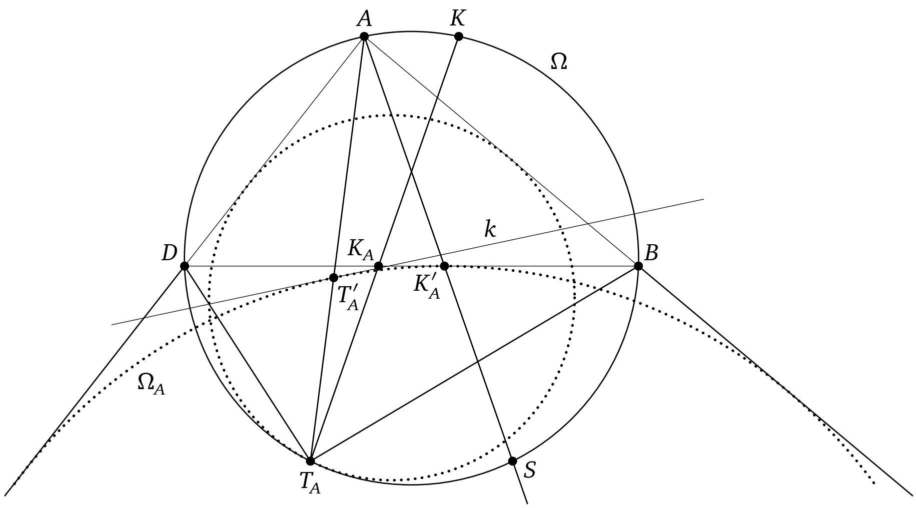

Рис. 6

сечения прямой AK'_A с окружностью Ω. Докажем, что пары точек (K_A, K'_A) и (T_A, S) симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку BD (рис. 6).

В самом деле, симметричность точек K_A и K'_A следует из равенства отрезков касательных BK_A и DK'_A. Для доказательства симметричности точек T_A и S рассмотрим инверсию с центром в точке A и радиусом $\sqrt{AD \cdot AB}$. Такая инверсия переведёт окружность Ω в прямую k, симметричную BD относительно биссектрисы угла BAD. В силу этой симметрии образ окружности Ω будет касаться вневписанной окружности Ω_A, а значит, полувписанная окружность при этой инверсии перейдёт в Ω_A. Поэтому данная инверсия переводит точку касания T_A полувписанной окружности с окружностью Ω в точку T_A' касания их образов Ω_A и k, которая симметрична K_A' относительно биссектрисы угла BAD.

Итак, при осевой симметрии относительно серединного перпендикуляра к BD прямая SK_A' перейдёт в прямую T_AK_A. Отсюда следует, что

$$\angle DT_AK_A = \frac{\breve{AB}}{2} = \angle ADB \quad \text{и} \quad \angle BT_AK_A = \frac{\breve{AD}}{2} = \angle ABD,$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к доказательству леммы. Пусть K — вторая точка пересечения прямой K_AT_A с окружностью Ω (рис. 5). Тогда, по доказанному выше,

$$\angle FT_AK_A = \frac{1}{2}(\breve{KD} - \breve{FD}) = \frac{1}{2}(\breve{BA} - \breve{FD}) = \angle FEK_A,$$

откуда следует, что точки T_A, K_A, E и F лежат на одной окружности. □

Теперь рассмотрим некоторые факты, связанные с окружностями Тебо α_{AD} и α_{AB} (рис. 7). Напомним, что эти окружности вписаны в криволинейные треугольники DXA и AXB, где X — точка пересечения диагоналей вписанного в окружность Ω четырёхугольника $ABCD$. Обозначим центры этих окружностей через J_{AD}, J_{AB}, а также проведём к ним вторую общую внешнюю касательную ℓ, отличную от BD. Прямая ℓ пересекает окружность Ω в точках M и N. Пусть J — центр вписанной окружности треугольника NMC.

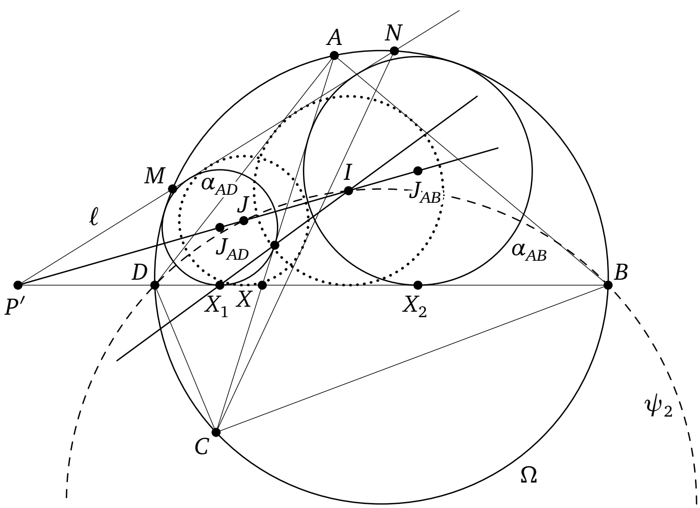

Рис. 7

Хорошо известны следующие теоремы.

Теорема 1 (лемма Саваямы). *Центр I вписанной окружности треугольника ABD лежит на прямой, проходящей через точки касания окружности α_{AD} с прямыми XA и XD.*

Теорема 2 (теорема Тебо). *Точки I, J, J_{AD} и J_{AB} лежат на одной прямой.*

Доказательства теорем 1 и 2 можно найти, например, в [4].

Теперь докажем важную лемму, которая следует из леммы Саваямы и теоремы Тебо. Эта лемма понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 3. *Обозначим точки касания окружностей α_{AD} и α_{AB} с прямой BD через X_1 и X_2. Тогда*

1) *точки I, J, X_1 и X_2 лежат на одной окружности ψ_1;*
2) *точки I, J, B и D лежат на одной окружности ψ_2;*
3) *точки I, J, X и K_A лежат на одной окружности ψ_3.*

Доказательство. Обозначим точку пересечения прямых AX и NM через Y, точки касания окружностей α_{AD} и α_{AB} с прямыми MN и XY — через (Y_1, Y_2) и (Z_1, Z_2) соответственно. Пусть также P' — точка пересечения прямых X_1X_2, Y_1Y_2 и $J_{AD}J_{AB}$ (впоследствии мы докажем, что на самом деле точка P' совпадает с точкой P пересечения прямых BD и $I_{CD}I_{BC}$).

1. По лемме Саваямы точка пересечения прямых X_2Z_2 и X_1Z_1 совпадает с I, а точка пересечения прямых Y_2Z_2 и Y_1Z_1 — с J. При этом

$$\angle Y_2JY_1 = \angle X_2JX_1 = 90^\circ = \angle X_2IX_1,$$

поэтому точки I, J, X_1, X_2 лежат на одной окружности ψ_1 (рис. 8).

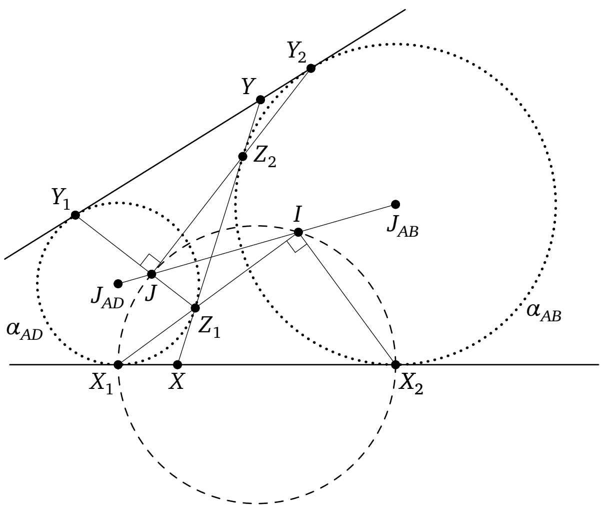

Рис. 8

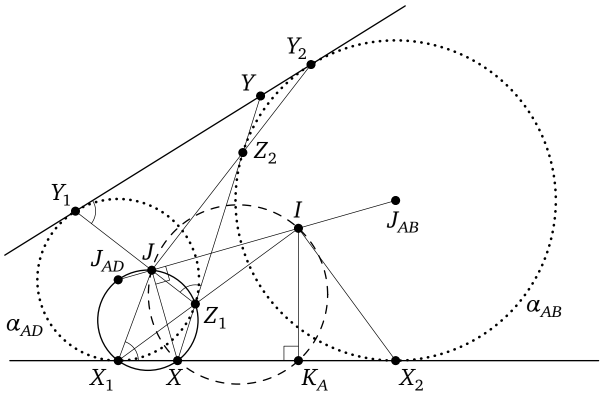

Рис. 9

2. Сделаем инверсию Inv с центром в P', которая переведёт окружность Ω в себя. Так как при такой инверсии прямые BD и MN также переходят в себя, то $\mathrm{Inv}(\alpha_{AD}) = \alpha_{AB}$ и $\mathrm{Inv}(X_1) = X_2$. Отсюда следует, что окружность ψ_1 при инверсии Inv переходит в себя и $\mathrm{Inv}(I) = J$. Таким образом, пара точек (B, I) переходит при инверсии Inv в пару точек (D, J). Значит, эти четыре точки лежат на одной окружности ψ_2.

3. Заметим, что $\angle JX_1X = \angle JY_1Y = \angle Y_1Z_1Y$. Поэтому точки J, Z_1, X и X_1 лежат на одной окружности. Так как $\angle J_{AD}X_1X = \angle J_{AD}Z_1X = 90^\circ$, точка J_{AD} также лежит на этой окружности (рис. 9). Отсюда следует, что

$$\angle XJI = \angle J_{AD}X_1X = 90^\circ = \angle IK_AX,$$

поэтому точки I, J, X и K_A лежат на одной окружности, что и требовалось доказать. □

§ 4. Доказательство основной теоремы

Теперь мы готовы завершить доказательство основной теоремы. Напомним основные обозначения, которые нам понадобятся. Пусть J_{AD}, J_{AB} — центры α_{AD} и α_{AB}, а I_{BC}, I_{CD} — центры ω_{BC}, ω_{CD}. Точки T_A, K_A, I и J определим так же, как в § 2.

Доказательство пп. 2, 3 и 4 основной теоремы. Вначале докажем п. 2. Пусть прямые $J_{AB}J_{AD}$ и BD пересекаются в точке P'. Ясно, что P' — внешний центр гомотетии окружностей α_{AB} и α_{AD}. Обозначим через F и T_2 вторые точки пересечений прямых AP' и CP' с окружностью Ω.

Сделаем уже знакомую нам по лемме 3 инверсию Inv с центром в P', которая переведёт окружность Ω в себя. Тогда из существования окружности ψ_3 (см. лемму 3) следует, что $\mathrm{Inv}(X) = K_A$ (рис. 10).

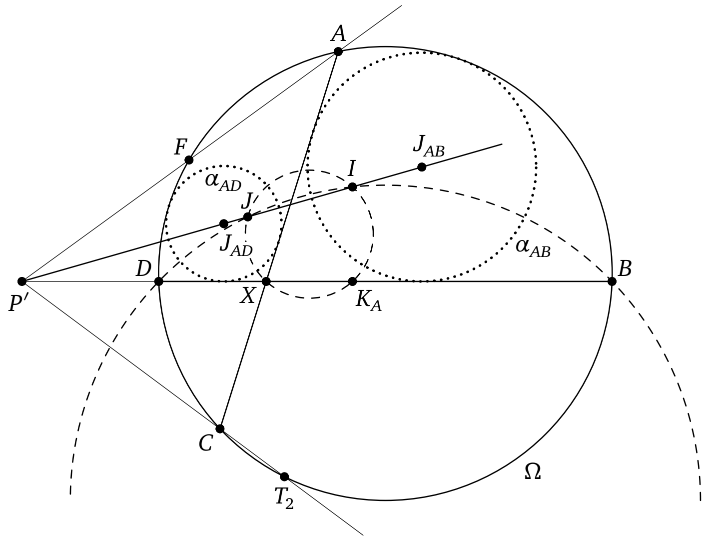

Рис. 10

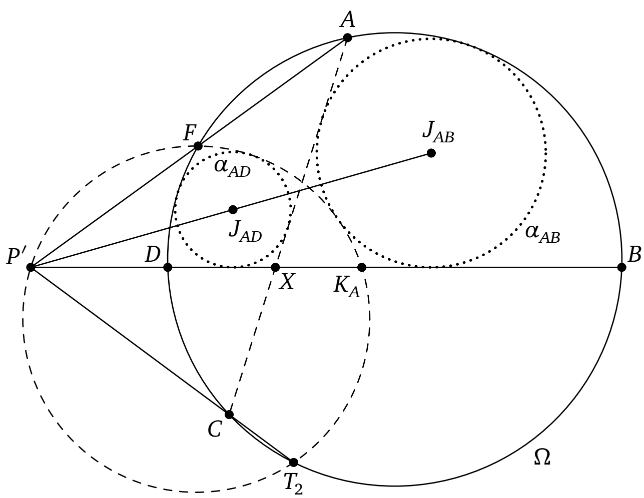

Рис. 11

Теперь рассмотрим образ прямой AC при инверсии Inv. Поскольку $\mathrm{Inv}(A) = F$ и $\mathrm{Inv}(C) = T_2$, прямая AC перейдёт в окружность, проходящую через точки P', F, K_A и T_2. Наконец, по лемме 2 отсюда следует, что точки T_2 и T_A совпадают, а из уже доказанного п. 1 следует, что точки P' и P совпадают. Таким образом, п. 2 полностью доказан (рис. 11).

Докажем теперь п. 3 основной теоремы. Заметим, что точка P является внешним центром гомотетии окружностей α_{AD} и α_{AB}, точка L_1 —

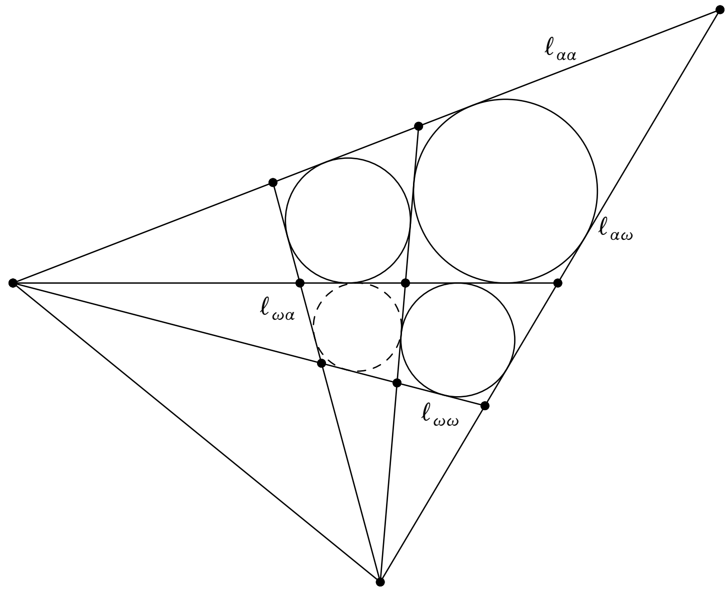

Рис. 12

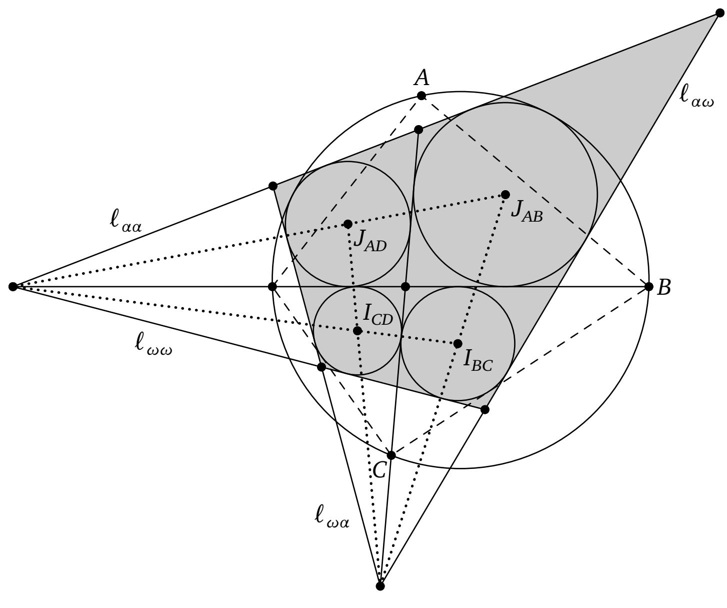

Рис. 13

внутренним центром гомотетии окружностей Ω и α_{AD}, а точка L_2 — внутренним центром гомотетии окружностей Ω и α_{AB}. Поэтому точки P, L_1 и L_2 лежат на одной прямой по теореме о трёх центрах гомотетий (см., например, [3, с. 220]).

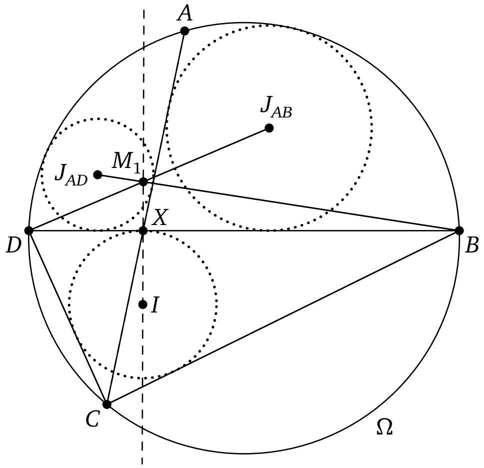

Рис. 14

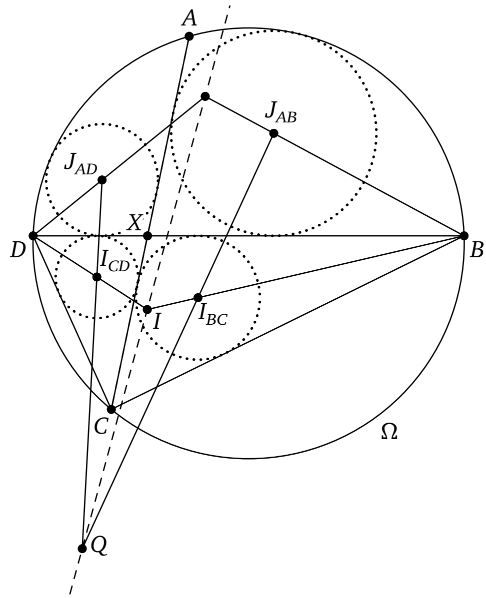

Рис. 15

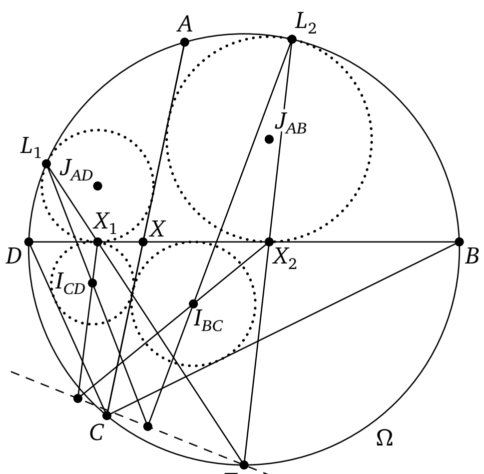

Рис. 16

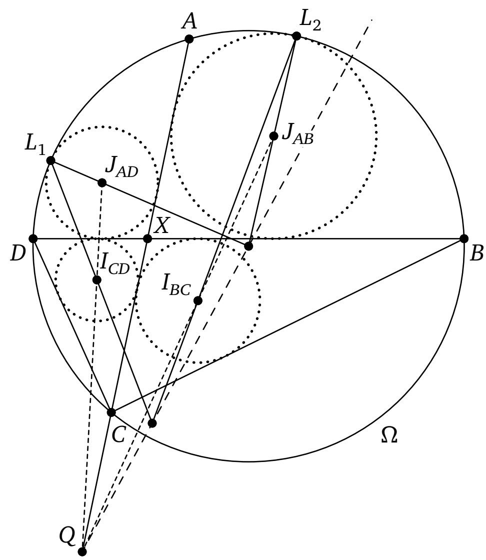

Рис. 17

Осталось доказать п. 4. Рассмотрим четырёхугольник, образованный общими внешними касательными $\ell_{\alpha\alpha}, \ell_{\alpha\omega}, \ell_{\omega\omega}, \ell_{\omega\alpha}$ к парам окружностей $(\alpha_{AD}, \alpha_{AB})$, $(\alpha_{AB}, \omega_{BC})$, $(\omega_{BC}, \omega_{CD})$, $(\omega_{CD}, \alpha_{AD})$, отличными от AC и BD соответственно. Заметим, что прямые $\ell_{\alpha\alpha}$ и $\ell_{\omega\omega}$ пересекаются на прямой BD по пп. 1 и 2 (рис. 13). Докажем, что прямые $\ell_{\alpha\omega}$ и $\ell_{\omega\alpha}$ пересекаются на прямой AC.

Для этого проведём через точку Q пересечения $\ell_{\alpha\omega}$ и AC касательную ℓ к окружности ω_{BC} и рассмотрим четырёхугольник, образованный прямыми $\ell_{\alpha\alpha}$, $\ell_{\alpha\omega}$, $\ell_{\omega\omega}$ и ℓ. Прямые AC и BD проходят через точки пересечения его противоположных сторон и делят его на четыре четырёхугольника, три из которых являются описанными (рис. 12). Но тогда и четвёртый четырёхугольник является описанным (см., например, [1]), поэтому прямые ℓ и $\ell_{\omega\alpha}$ совпадают, а значит, прямые $\ell_{\alpha\omega}$, $\ell_{\omega\alpha}$ и AC пересекаются в одной точке (рис. 13).

Ясно, что эта точка и будет внешним центром гомотетии пар окружностей $(\alpha_{AD}, \omega_{CD})$ и $(\alpha_{AB}, \omega_{BC})$.

Таким образом, наша теорема полностью доказана. □

§ 5. Следствия из основной теоремы

В заключение нашего рассказа отметим ряд интересных следствий из доказанной нами основной теоремы. Чтобы получить их, применим к конфигурации, изображённой на рис. 2, теорему Дезарга. Наиболее интересные следствия из этой теоремы приведены на следующих рисунках.

Благодарности

Автор благодарит П. В. Бибикова за помощь в подготовке статьи к публикации.

Список литературы

[1] *Белухов Н., Кожевников П. А.* Описанные четырёхугольники и ломаные // Квант. 2010. № 1. С. 45–49.

[2] *Заславский А. А., Пермяков Д. А., Скопенков А. Б., Скопенков М. Б., Шаповалов А. В.* Математика в задачах. М.: МЦНМО, 2009.

[3] *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 1. М.: МЦНМО, 2004.

[4] *Протасов В. Ю.* Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха // Квант. 2008. №4. С. 10–15.

Алексей Константинович Львов, ученик МАОУ ОЦ «Горностай»
(г. Новосибирск)

alekon33@gmail.com