

## О задаче 22.1

А. С. Милевский

В «Математическом просвещении» (выпуск 22, с. 231) опубликована задача 22.1:

Пусть функция  $g(x)$  такова, что при всех  $x \geq 1$  выполняется равенство  $g(x)^{g(x)} = x$ . Найдите такую элементарную функцию  $h(x)$ , что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - h(x)) = 0.$$

В решении этой задачи, опубликованном в «Математическом просвещении» (выпуск 23, с. 235), содержится ошибка. В последней строке решения написано:

$$\left| \ln x - \left( \ln x - \frac{\ln x \ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Но в действительности

$$\left| \frac{\ln x \ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right| \rightarrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Скорее всего, для функции  $g(x)$  невозможно построить требуемую аддитивную асимптотику с элементарной функцией  $h$ . Получается лишь мультипликативная асимптотика вида

$$h(x)(1 + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

На самом деле рассматриваемая задача приводит к так называемой функции Ламберта  $W(z)$ , которая является решением уравнения

$$W(z)e^{W(z)} = z,$$

откуда

$$g(x) = e^{W(\ln x)}.$$

Асимптотика функции  $W(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  известна [1, р. 349], но не даёт решения задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert  $W$  function // *Adv. Comput. Math.* 1996. Vol. 5, № 4. P. 329–359.

---

Александр Станиславович Милевский, МИИТ

a\_s\_mi@mail.ru