Геометрия: классика и современность

Сумма углов треугольника и теорема Гаусса — Бонне

А. Б. Сосинский

Все мы знаем, что в евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна 180°. А знаем ли мы, что значат эти слова? Как мы понимаем выражение «сумма углов»? В каком смысле эта сумма «равна» 180°?

В этой заметке мы сначала попытаемся понять, какие ответы на эти вопросы даёт стандартный учебник геометрии для 7-го класса[1], и, обсудив эти ответы, приведём две разные трактовки утверждения о сумме углов треугольника — чисто геометрическую и аналитическую (основанную на теории меры). Затем остановимся на второй трактовке и увидим, что она имеет красивейшее обобщение, которое, я думаю, окажется неожиданным для большинства читателей «Математического просвещения».

§ 1. Что говорит учебник

На с. 70 учебника геометрии для 7-го класса читаем:

Теорема. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

Что под этим понимается? Как авторы учебника расшифровывают слова «сумма углов»? В теореме написано, что эта сумма равна 180 градусам — стало быть имеется в виду сумма *мер* углов (т. е. сумма чисел)?

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда Саймонса.

[1] *Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г., Юдина И. И.* Геометрия. 7–9 классы. М.: Просвещение, 2010.

Посмотрим доказательство теоремы. Оно начинается с утверждения «рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $\angle A+\angle B+$ $+\angle C=180°$» — стало быть, речь идёт о сумме чисел? Однако далее проводится классическое, чисто геометрическое построение (рис. 1а): через точку B проводим прямую $A'BC'$, параллельную AC; тогда в точке B развёрнутый угол $A'BC'$ составлен из трёх углов $\angle A'BA, \angle ABC, \angle CBC'$; при этом углы $A'BA$ и BAC равны (в смысле равенства геометрических фигур) как накрест лежащие, по той же причине равны углы $C'BC$ и BCA.

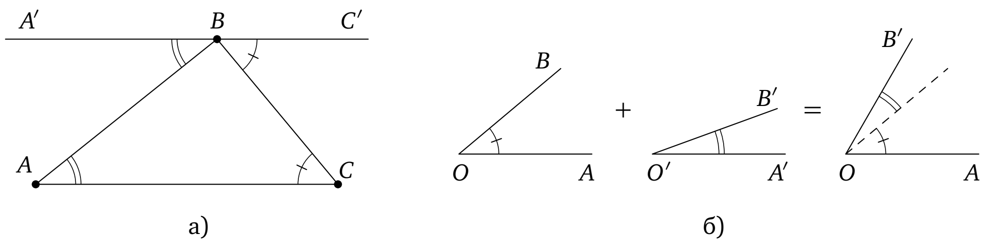


Рис. 1. Сложение углов

Таким образом выходит, что в учебнике доказано не утверждение теоремы (т. е. равенство $\angle A+\angle B+\angle C=180°$), а тот факт, что *геометрическая сумма углов* (т. е. фигура, полученная приложением трёх углов к друг другу) представляет собой развёрнутый угол. Но не будем торопиться обвинять авторов учебника в непоследовательности или путанице. Дело в том, что в учебнике заранее оговорено, что эти два утверждения равносильны. Именно, на с. 18 мы читаем: «Равные углы имеют равные градусные меры», а на с. 20 поясняется на примере, что такое геометрическая сумма углов (рис. 34), т. е. никакой непоследовательности в учебнике нет.

Правда, как математику и педагогу, мне не нравится такое изложение в частности потому, что понятие «геометрическая фигура» остаётся без определения.

Но здесь уместно небольшое отступление. Понимая опасность путаницы между двумя смыслами слова «равенство», А. Н. Колмогоров в своём курсе геометрии ввёл термин «конгруэнтность», означающий равенство геометрических фигур. Это нововведение почему-то вызвало возмущение большинства учителей математики, родителей учеников и даже некоторых математиков (например, Л. С. Понтрягина) и способствовало сворачиванию колмогоровской реформы. Другое нововведение, а именно простое и чёткое формальное определение геометрической фигуры как множества точек, тоже оказалось под огнём критики (например, со стороны С. П. Новикова). Я не собираюсь вмешиваться в эту давно канувшую в Лету дискуссию, но отмечу только, что в обсуждаемом учебнике авторы были вынуждены отказаться от естественного определения геометрической фигуры как множества точек потому, что тогда фигуры, равные в геометрическом смысле, в общем случае были бы *неравными* как множества точек (!).

Вернёмся к учебнику. Оправдано ли отождествление геометрического равенства фигур и равенства их мер? Думаю, что нет. Я бы предложил перед формулировкой теоремы дать геометрическое определение суммы углов. Например, такое: геометрической суммой углов $\angle AOB$ и $\angle A'O'B'$ называется угол $\angle AOB'$, полученный прикладыванием углов друг к другу без наложения, с отождествлением лучей $[O, B\rangle$ и $[O', A'\rangle$ (рис. 1б). Тогда теорема формулируется иначе:

Теорема. *Геометрическая сумма углов треугольника — развёрнутый угол и, следовательно, сумма их градусных мер равна* $180°$.

Мне кажется, что при такой формулировке учителю будет проще объяснять смысл этой фундаментальной теоремы, а ученикам станет более понятным и убедительным её доказательство.

Но это лишь моё мнение, а авторы учебника могут возразить, что такая формулировка теоремы (в учебнике для массовой школы) осложняет её понимание и выпячивает несущественную тонкость.

§ 2. Переформулировка теоремы о сумме углов треугольника и одномерная теорема Гаусса — Бонне

Теперь обсудим «арифметическую» формулировку теоремы о сумме углов треугольника:

Теорема 1. *Сумма мер углов треугольника равна* $180°$.

Заметим сразу, что эта теорема, с виду совсем элементарно-геометрическая, к геометрии на самом деле отношения не имеет: в основе её строгой формулировки лежит *теория меры* — ветвь математического анализа. В рамках строгой геометрической аксиоматики (в духе аксиоматики Гильберта) эта теорема не имеет смысла, её нельзя сформулировать. Давайте переформулируем теорему 1 в эквивалентном виде, хотя внешне не очень похожем на только что записанный. Для этого нам потребуется несколько определений.

Для многогранника M в пространстве *эйлерова характеристика* $\chi(M)$ определяется как сумма

$$\chi(L) = \mathcal{V} - \mathcal{E} + \mathcal{F},$$

где $\mathscr{V}$ — число вершин многогранника M, $\mathscr{E}$ — число его рёбер, а $\mathscr{F}$ — число граней. Так, эйлерова характеристика куба равна $8-12+6=2$. Это же определение имеет смысл для плоского многоугольника (при этом гранью многоугольника считается ограниченная им область, так что для многоугольника N эйлерова характеристика равна $\chi(N)=\mathscr{V}-\mathscr{E}+1$). Например, для треугольника $\chi(\triangle)=3-3+1=1$.

Пусть теперь L — замкнутая ломаная без самопересечений на плоскости. Начиная от любой её вершины, будем двигать вектор единичной длины вдоль рёбер L (против часовой стрелки) — поворачивая его в вершинах так, чтобы он скользил по очередному ребру, — пока не вернёмся в начальную вершину. Назовём *тотальной кривизной* ломаной L (и обозначим $K(L)$) число оборотов, совершённых нашим вектором при обходе ломаной L. Заметим, что для случая, когда L — треугольник с углами α, β, γ, тотальная кривизна будет равна 1: действительно, наш вектор поворачивается вокруг каждой вершины на угол, равный внешнему углу треугольника, т. е. на углы $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$, $180^\circ-\gamma$, и в итоге на угол

$$180^\circ-\alpha+180^\circ-\beta+180^\circ-\gamma=540^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)=360^\circ;$$

последнее равенство следует из теоремы 1.

Теперь теорему 1 можно переформулировать так:

Теорема 1$'$. *$K(\triangle)=\chi(\triangle)$, т. е. тотальная кривизна треугольника равна его эйлеровой характеристике.*

«Зачем заменять простую и ясную формулировку теоремы 1 на такую вычурную?» — спросит читатель. Дело в том, что именно эта формулировка (в отличие от предыдущей) имеет целый ряд замечательных обобщений и модификаций. Во-первых, такую:

Для замкнутой ломаной L выполнено равенство $K(L)=\chi(L)$, т. е. тотальная кривизна любой плоской замкнутой ломаной без самопересечений равна её эйлеровой характеристике.

Эта теорема легко доказывается индукцией по числу рёбер.

Однако гораздо интереснее следующая теорема, относящаяся к дифференциальной геометрии (ещё одной ветви математического анализа):

Теорема 2. *Для гладкой замкнутой кривой C на плоскости тотальная кривизна $K(C)$, т. е. число оборотов касательного вектора при обходе кривой, равно эйлеровой характеристике $\chi(C)$.*

В курсах дифференциальной геометрии доказывается, что тотальная кривизна гладкой кривой равна интегралу от локальной кривизны $\kappa(s)$

вдоль кривой, делённому на 2π, и утверждение теоремы 2 записывается в виде следующей красивой формулы:

$$\chi(C) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{s \in C} \kappa(s)\, ds.$$

В этой статье мы остаёмся в рамках элементарной математики, поэтому я не буду определять кривизну кривой в точке и — тем более — эйлерову характеристику кривой (на произвольной гладкой кривой приходится выбирать некоторую дополнительную структуру, а затем доказывать корректность, т. е. независимость от произвольного выбора, или же нужно построить теорию гомологий — весьма неэлементарную науку!).

Дальнейшие обобщения связаны с увеличением размерности: мы переходим от (одномерных) ломаных к многогранным поверхностям.

§ 3. Обобщение: двумерная теорема Гаусса — Бонне

Для начала посмотрим на классическую (совсем не элементарную) двумерную формулу Гаусса — Бонне из дифференциальной геометрии, в которой S — гладкая ориентированная поверхность в трёхмерном пространстве, а $\Gamma(s)$ — гауссова кривизна в точке $s \in S$:

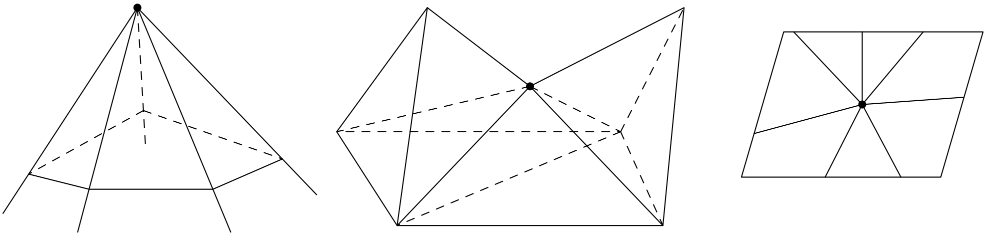
$$\int\limits_{s \in C} \Gamma(s)\, ds = 2\pi \cdot \chi(C).$$

Что такое интеграл по гладкой поверхности, гауссова кривизна и эйлерова характеристика гладкой поверхности, я здесь объяснять не буду: наша цель — сформулировать и доказать дискретный (= кусочно-линейный) вариант этой формулы, который окажется вполне элементарным. При этом роль гладкой поверхности будет играть триангулированная поверхность, лежащая в евклидовом пространстве, роль интеграла — сумма по вершинам поверхности, а аналог гауссовой кривизны (в вершинах) мы сейчас определим.

Пусть $v \in \mathcal{V}(S)$ — вершина триангулированной поверхности S в евклидовом пространстве, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — примыкающие к ней углы (вернее, их меры, которые мы будем в дальнейшем исчислять в радианах). Число

$$\Gamma = \Gamma(S, v) = 2\pi - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)$$

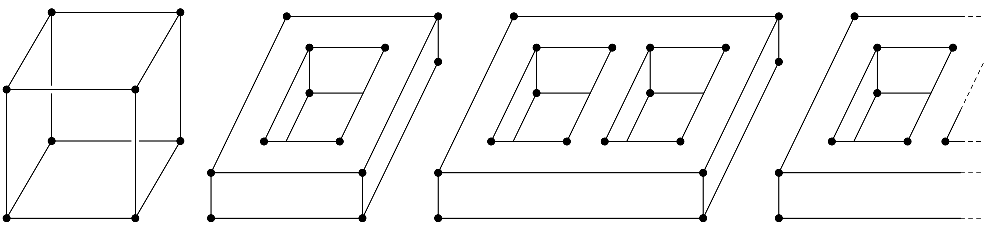
назовём *кривизной* поверхности S в вершине v. Заметим, что кривизна может быть как положительной, так и отрицательной, а также нулевой (рис. 2).



$K>0$ $K<0$ $K=0$

Рис. 2. Положительная, отрицательная и нулевая кривизна

Будем считать известным, что имеется счётное число топологически различных замкнутых (= без края) триангулированных поверхностей в трёхмерном пространстве и они классифицируются своим родом g (числом ручек) или своей эйлеровой характеристикой χ (ибо $\chi=2-2g$). Именно, это сфера $\mathbb{S}^2$ ($g=0$), тор $\mathbb{T}^2$ ($g=1$), крендель $\mathbb{M}^2_2$ ($g=2$), сфера с n ручками $\mathbb{M}^2_n$ ($g=n$), … (рис. 3). Доказательство этих фактов можно найти в любом учебнике топологии.



$\chi=2$, $g=0$ $\chi=0$, $g=1$ $\chi=-2$, $g=2$ $\chi=-4$, $g=3$

Рис. 3. Куб, тор и другие многогранные поверхности

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Сумма Σ кривизн по всем вершинам $v_i\in\mathscr{V}(S)$ триангулированной поверхности S, лежащей в трёхмерном пространстве, равна эйлеровой характеристике поверхности, умноженной на 2π:*

$$\sum_{v_i\in\mathscr{V}(S)}\Gamma(S,v_i)=2\pi\cdot\chi(S).$$

Доказательство[2)]. Проведём доказательство для каждой из этих поверхностей по отдельности, начиная со сферической поверхности.

[2)] Другое доказательство можно найти в книге: *Табачников С. Л., Фукс Д. Б.* Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011. С. 311–312.

Сначала занумеруем все углы при вершинах произвольным образом: $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$. Тогда слагаемые суммы кривизн во всех вершинах поверхности S будут иметь вид $2\pi - (\phi_{j_1} + \ldots + \phi_{j_s})$, где $\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_s}$ — углы при вершине v_j, т. е.

$$\Sigma = \sum_{v_j \in \mathscr{V}(S)} \big(2\pi - (\phi_{j_1} + \ldots + \phi_{j_s})\big).$$

Если раскрыть скобки в этой сумме, мы получим $\mathscr{V}$ слагаемых 2π, где $\mathscr{V}$ — число вершин поверхности S, и сумму всех углов со знаком минус: $-(\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_N)$. Поменяем порядок слагаемых в этой сумме так, чтобы три угла каждого треугольника стояли подряд. Тогда эту сумму можно записать в виде $(\phi_i + \phi_j + \phi_k) + \ldots + (\phi_r + \phi_s + \phi_t)$, где в первой скобке стоят внутренние углы первого треугольника, а в последней — внутренние углы последнего треугольника. Сумма в каждой скобке равна π. Сколько будет таких скобок? Столько, сколько есть в S треугольников; обозначим это число через $\mathscr{F}$. Пусть $\mathscr{E}$ — число рёбер (= сторон) у S. Поскольку к каждому из трёх рёбер каждого треугольника примыкают два треугольника, имеем $\mathscr{E} = \frac{3}{2}\mathscr{F}$. Эйлерова характеристика сферической поверхности S равна 2, значит,

$$2 = \mathscr{V} - \mathscr{E} + \mathscr{F} = \mathscr{V} - \frac{3}{2}\mathscr{F} + \mathscr{F} = \mathscr{V} - \frac{\mathscr{F}}{2},$$

откуда $\mathscr{F} = 2\mathscr{V} - 4$. Получаем

$$\Sigma = 2\pi \cdot \mathscr{V} - \pi \cdot (2\mathscr{V} - 4) = 4\pi = 2\pi \cdot \chi(S),$$

и тем самым теорема доказана в случае поверхности рода 0.

Доказательство в случае поверхности S рода 1 (т. е. тора) аналогично. Для тора имеем

$$\Sigma = \sum_{v_j \in \mathscr{V}(S)} \big(2\pi - (\phi_{j_1} + \ldots + \phi_{j_s})\big) = 2\pi \cdot \mathscr{V} - \pi \cdot \mathscr{F}.$$

Поскольку эйлерова характеристика тора равна нулю и $\mathscr{E} = 3\mathscr{F}/2$ (последнее верно для всех замкнутых ориентированных поверхностей), получаем $\mathscr{F} = 2\mathscr{V}$. Отсюда

$$2\pi \cdot \mathscr{V} - \pi \cdot 2\mathscr{V} = 0 = 2\pi \cdot \chi(T),$$

что и требовалось.

Доказательство в случае поверхности $\mathbb{M}^2_g$ с g ручками при $g \geqslant 2$ аналогично доказательству для тора, только в конце доказательства надо воспользоваться тем, что $\chi(\mathbb{M}^2_g) = 2 - 2g$.

Теорема доказана. $\square$

§ 4. Что же мы получили? А дальше?

Мы сформулировали теорему о сумме углов треугольника в необычном виде и поняли, что теорема эта совсем не геометрическая — в таком виде её следует отнести к математическому анализу. И именно в таком виде она имеет естественные обобщения в дифференциальной геометрии кривых и поверхностей — в теоремах Гаусса — Бонне. Затем мы сформулировали дискретные аналоги этих теорем, заменив интегралы на суммы, кривые на ломаные, гладкие поверхности на триангулированные поверхности в евклидовом пространстве, и привели их (элементарные) доказательства. Все эти теоремы, начиная с теоремы о сумме углов треугольника, в сущности являются утверждениями о существовании инвариантов, классифицирующих некоторые объекты. Более того, в каждой из теорем фигурируют два инварианта, осуществляющие эту классификацию — один топологический (эйлерова характеристика), другой аналитический (сумма кривизн во всех вершинах), — и они отличаются на множитель 2π (по-своему замечательный)!

Секрет успеха здесь в том, что мы нетривиально и концептуально правильно переформулировали исходную теорему и только после этого смогли увидеть её обобщения. А можно ли дальше идти по пути обобщения? Да, безусловно можно, и это поистине грандиозный путь: он ведёт сначала к знаменитой теореме Римана — Роха (в варианте, придуманном Гротендиком), а затем к ещё более знаменитой теореме Атьи — Зингера об индексе эллиптических операторов и, после лишь небольшого поворота в сторону, к некоторым вариантам теоремы Лефшеца о неподвижной точке. Здесь тоже суть дела состоит в совпадении топологического и аналитического классифицирующих инвариантов.

Рассказывать про эти теоремы на элементарном языке я не могу, так как не умею для них находить концептуально правильную дискретизацию. Но верю — она есть, и надеюсь — будет найдена, где-то на указанном выше пути.

Благодарности

Автор благодарен В. А. Тихомирову и В. Ф. Бутузову за обсуждение предварительных версий статьи.

Алексей Брониславович Сосинский, НМУ

asossinsky@yandex.ru