Неевклидовы решения евклидовых задач

П. В. Бибиков, И. И. Фролов

§ 1. Введение

Поводом для написания данной статьи послужила следующая задача, вошедшая в шорт-лист Международной математической олимпиады 2010 г. (иными словами, эта задача не была предложена на самой олимпиаде, но вошла в число претендентов на эту почётную роль; полный список задач шорт-листа 2010 г. можно найти на странице [9]).

Задача 1. *Рассмотрим отрезок AB и точку H на нём. Проведём три дуги окружностей с концами в точках A и B, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB, и три луча с началом в точке H, лежащие в той же полуплоскости. При пересечении дуг окружностей и лучей возни-*

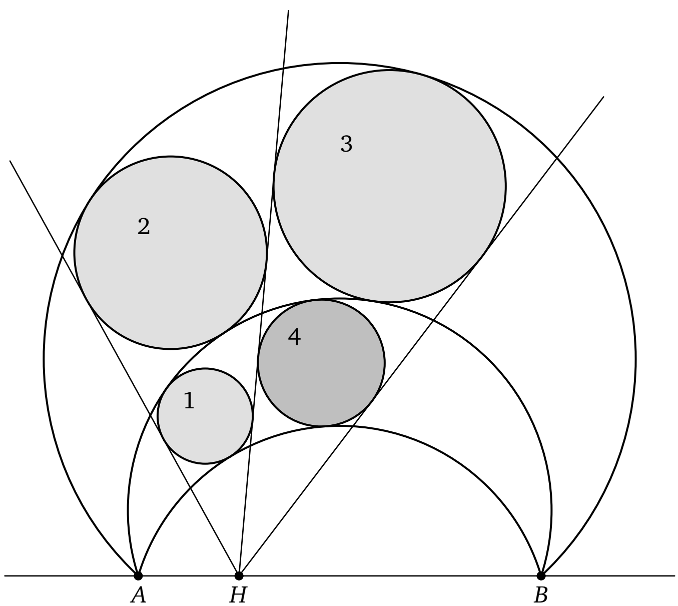

Рис. 1

кают четыре криволинейных четырёхугольника (*две их стороны лежат на дугах окружностей, а две оставшиеся — на лучах*). *Докажите, что если в три из этих четырёхугольников можно вписать окружность, то и в четвёртый четырёхугольник можно вписать окружность* (рис. 1).

Оказывается, у этой задачи существует очень короткое решение (буквально устное). И для того, чтобы понять его, нам нужно будет посмотреть на рис. 1 под несколько иным углом — а именно, с точки зрения геометрии Лобачевского… В принципе, подобный подход не нов (см., например, статью Гальперина [3]), однако, по всей видимости, он до сих пор считается весьма экзотическим и пригодным буквально для единичных случаев. Познакомившись с задачами, приведёнными ниже, можно убедиться, что это неверно и данный метод вполне заслуживает того, чтобы его знали и умели применять.

§ 2. Модели Пуанкаре и модель Клейна

Мы начнём с описания трёх наиболее часто встречающихся моделей плоскости Лобачевского: моделей Пуанкаре в верхней полуплоскости и в круге, а также модели Клейна. Все они будут необходимы нам в тех или иных евклидовых задачах. Более подробное описание этих моделей можно найти в [6].

Начнём с модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. В этой модели *плоскостью Лобачевского* называется фиксированная полуплоскость (которую обычно называют верхней) относительно некоторой прямой. Эта прямая вместе с бесконечно удалённой точкой называется *абсолютом*. Точки абсолюта называются *бесконечно удалёнными точками* плоскости Лобачевского. *Прямыми* в модели Пуанкаре являются полуокружности с центром на абсолюте и вертикальные лучи, перпендикулярные абсолюту. Угол между двумя неевклидовыми прямыми (т. е. прямыми в плоскости Лобачевского) по определению полагается равным евклидовому углу между соответствующими кривыми.

Одним из наиболее важных фактов в геометрии Лобачевского (равно как и в евклидовой геометрии) является теорема о сумме углов треугольника. Оказывается, что сумма углов любого неевклидова треугольника строго меньше π. Можно наглядно убедиться в этом, рассмотрев треугольник, получающийся малым шевелением прямых, попарно пересекающихся на абсолюте: дуги полуокружностей, образующих такой треугольник, практически касаются друг друга, поэтому углы между ними могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Упражнение 1. Попробуйте доказать, что сумма углов любого неевклидова треугольника строго меньше π.

Из теоремы о сумме углов неевклидова треугольника выводится *четвёртый признак равенства треугольников*: два треугольника равны по трём углам. В частности, отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нет подобий, кроме движений: любое преобразование подобия сохраняет углы, а потому является движением.

Упражнение 2. Докажите четвёртый признак равенства треугольников.

В свою очередь из этого признака следует важный факт: инверсия относительно полуокружности с центром на абсолюте является движением в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. В самом деле, такая инверсия сохраняет верхнюю полуплоскость и углы между кривыми (по свойству конформности инверсии). Более того, можно даже сказать, как называется это движение: это *осевая симметрия*. Именно поэтому инверсия играет такую большую роль в модели Пуанкаре: ведь осевые симметрии, как известно, порождают всю группу движений плоскости Лобачевского (т. е. любое движение является композицией конечного числа инверсий).

Упражнение 3. Докажите, что гомотетия с центром на абсолюте и положительным коэффициентом также является движением в модели Пуанкаре. Каким образом это движение раскладывается в композицию инверсий, и как разумно назвать это движение (по аналогии с евклидовой геометрией)?

В геометрии Лобачевского также можно определить простейшие кривые. Однако, в отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского элементарные кривые более разнообразны и не ограничиваются одной лишь окружностью.

Упражнение 4. Докажите, что всякая евклидова окружность, целиком лежащая в верхней полуплоскости, является также неевклидовой окружностью, и наоборот, каждая неевклидова окружность является одновременно и евклидовой окружностью.

Возникает естественный вопрос: а чем является евклидова окружность, пересекающая абсолют? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, напомним ещё два определения.

Эквидистантой называется множество точек плоскости Лобачевского, расположенных на заданном расстоянии h от данной прямой p и лежащих в заданной полуплоскости относительно этой прямой. Прямая p

называется *базой* эквидистанты, величина h — *высотой*. Иначе говоря, эквидистанта — это неевклидов аналог прямой, параллельной данной.

Орициклом называется кривая, которая пересекает все прямые, имеющие общую бесконечно удалённую точку, под прямым углом.

Отметим, что наклонные лучи с началом на абсолюте являются эквидистантами, а прямые, параллельные абсолюту, — орициклами.

Упражнение 5. Докажите, что евклидова окружность, касающаяся абсолюта, является орициклом, а окружность, пересекающая абсолют в двух точках, — эквидистантой (рис. 2).

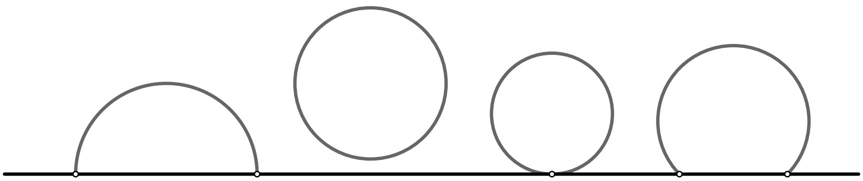

Рис. 2

Упражнение 6. Докажите, что если даны две эквидистанты с общей базой и высотами h_1 и h_2, лежащие в одной полуплоскости относительно базы, то расстояние от любой точки одной из эквидистант до другой равно $|h_1 - h_2|$. Эту величину естественно назвать *расстоянием между эквидистантами*.

Теперь опишем модель Пуанкаре в круге. Легче всего сделать это, совершив инверсию уже знакомой нам модели в верхней полуплоскости относительно окружности с центром *в нижней полуплоскости*. В таком случае плоскость Лобачевского станет внутренностью некоторого круга (который также называется абсолютом), а прямые в этой модели будут изображаться дугами окружностей, ортогональных абсолюту, а также диаметрами самого абсолюта.

Упражнение 7. Опишите, как выглядят окружности, эквидистанты и орициклы в модели Пуанкаре в круге.

Наконец, опишем модель Клейна. Переход к ней от модели Пуанкаре в круге можно осуществить так. Рассмотрим сферу, экватором которой служит абсолют модели Пуанкаре в круге. Пусть A — точка модели Пуанкаре, A_1 — точка пересечения поверхности сферы с прямой NA, где N — северный полюс. Спроектировав точку A_1 на плоскость экватора, получим точку A'. Сопоставив каждой точке A точку A', мы получим некоторое преобразование экваториального круга. То, что получилось, назовём *моделью Клейна* плоскости Лобачевского.

Давайте поймём, как выглядят прямые в модели Клейна. В модели Пуанкаре в круге прямая изображается или в виде диаметра абсолюта, или в виде дуги окружности, ему перпендикулярной. Понятно, что образом диаметра круга будет тот же диаметр. Посмотрим, во что перейдёт дуга окружности, ортогональная абсолюту. При центральной проекции на сферу эта дуга перейдёт в дугу окружности, перпендикулярную плоскости абсолюта (поскольку такая проекция есть не что иное как пространственная инверсия). Поэтому ортогональной проекцией получившейся дуги окружности на экватор сферы является хорда экватора. Таким образом, в модели Клейна все неевклидовы прямые изображаются в виде хорд абсолюта.

Упражнение 8. 1. Докажите, что окружности в модели Клейна — это либо евклидовы окружности, центр которых совпадает с центром абсолюта, либо эллипсы, касающиеся абсолюта в двух мнимых точках.

2. Опишите, как выглядят эквидистанты и орициклы в модели Клейна.

§ 3. Вокруг задачи из шорт-листа

Теперь мы готовы перейти к решению задачи из шорт-листа, сформулированной во введении. Уже сейчас, при взгляде на рис. 1, становится понятно, что для её решения будет полезна модель Пуанкаре в верхней полуплоскости. Ведь с точки зрения этой модели на картинке нарисованы две тройки эквидистант с общими базами. И это обстоятельство действительно можно использовать.

Чтобы проследить весь путь к решению, мы начнём с красивого утверждения, которое интересно и само по себе. А именно, докажем следующую лемму.

Лемма (о грустном привидении). *Рассмотрим две окружности ω_1 и ω_2, вписанные в область между дугами с концами в точках A и B* (рис. 3). *Тогда центр внешней гомотетии этих окружностей лежит на прямой AB.*

Доказательство. Посмотрим на эту картинку с точки зрения геометрии Лобачевского. Тогда прямая AB станет абсолютом, дуги с концами в точках A и B станут эквидистантами, а евклидовы окружности, вписанные в область между ними, превратятся в неевклидовы (хотя по форме они не отличаются от евклидовых, но центр их смещён ближе к абсолюту). Заметим, что радиусы *неевклидовых* окружностей ω_1 и ω_2

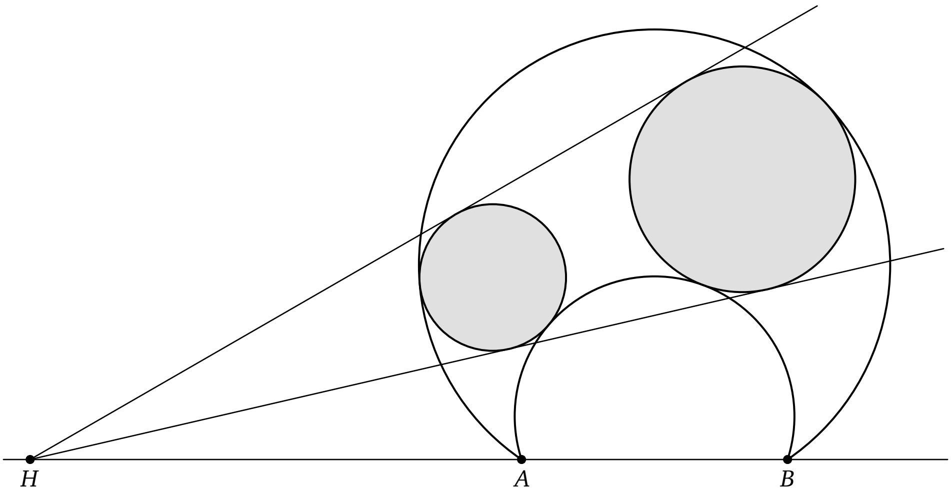

Рис. 3

равны, поскольку оба они равны половине расстояния между эквидистантами. Теперь докажем, что если взять любую другую эквидистанту, касающуюся обеих окружностей и пересекающую абсолют в каких-то точках C и D, то найдётся вторая эквидистанта, проходящая через C и D и также касающаяся обеих окружностей. В самом деле, рассмотрим эквидистанту, проходящую через точки C и D, которая расположена по ту же сторону от первой эквидистанты, что и окружности, и которая удалена от первой эквидистанты на расстояние, равное диаметру окружностей. Легко видеть, что она касается обеих окружностей (например, потому, что эти эквидистанты симметричны относительно неевклидовой линии центров наших окружностей).

Осталось применить это соображение к паре эквидистант, являющихся общими внешними касательными к нашим окружностям. □

Неформально говоря, конструкцию, описанную в этой лемме, с точки зрения евклидовой геометрии можно представлять так. Поскольку эквидистанта — это неевклидов аналог прямой, параллельной данной (т. е. геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой в фиксированной полуплоскости), то пара эквидистант с общей базой — это просто пара параллельных прямых. Тогда понятно, что радиусы всех окружностей, вписанных в пространство между ними, равны: ведь это просто окружности, вписанные в полоску между параллельными прямыми. Такие окружности можно совместить параллельным переносом, который в неевклидовой геометрии является композицией двух инверсий относительно непе-

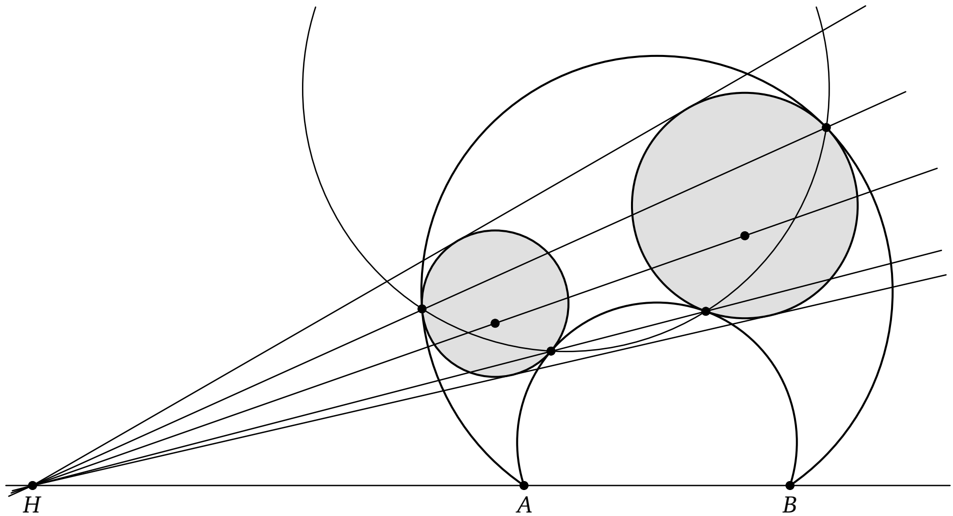

Рис. 4

ресекающихся полуокружностей с центрами на абсолюте. Такая неформальная трактовка бывает удобна, чтобы лучше понять ситуацию.

Посмотрим, какие факты можно извлечь из этой леммы и как при этом будет работать модель Пуанкаре.

Предложение. *В условиях предыдущей леммы точки касания окружностей и эквидистант лежат на одной евклидовой окружности, а прямые, проходящие через эти точки, пересекаются в центре H внешней гомотетии окружностей* (рис. 4).

Доказательство. Рассмотрим инверсию с центром в точке H относительно окружности, ортогональной обеим эквидистантам и переводящей серые круги друг в друга (с точки зрения неевклидовой геометрии мы рассматриваем осевую симметрию относительно прямой, ортогональной паре эквидистант и переводящей одну неевклидову окружность в другую; из этой интерпретации также следует существование такой инверсии: достаточно рассмотреть неевклидову прямую, являющуюся серединным перпендикуляром к отрезку между неевклидовыми центрами пунктирных окружностей). Тогда точки касания серых кругов с эквидистантами перейдут друг в друга, так как точки касания должны перейти в точки касания (рис. 4). Отсюда сразу следует, что пары точек касания лежат на прямых, проходящих через центр инверсии H. А из леммы о подобных треугольниках (см., например, [4]) вытекает, что все четыре точки касания лежат на одной окружности. □

Замечание 1. Из решения также следует, что прямые, соединяющие евклидовы центры серых кругов, и прямые, соединяющие их неевклидовы центры, также проходят через точку H (рис. 4).

Теперь перейдём к *задаче из шорт-листа*, с которой и начинался этот сюжет. Мы приведём здесь даже два решения: первое будет более «евклидовым» (отчасти оно похоже на авторское решение), а второе будет использовать исключительно геометрию Лобачевского. Читатель может сравнить эти решения и решить для себя, какое из них проще и понятнее.

Первое решение. Заметим, что точка H является центром внешней гомотетии окружностей 1 и 2. По лемме о грустном привидении центр внешней гомотетии окружностей 2 и 3 (рис. 1) лежит на абсолюте. Поэтому по теореме о трёх гомотетиях (см., например, [8]) для окружностей 1, 2, 3 центр внешней гомотетии окружностей 1 и 3 также лежит на абсолюте. Рассмотрим окружность 4, касающуюся двух дуг и средней прямой (рис. 1). По лемме о грустном привидении центр гомотетии окружностей 1 и 4 лежит на абсолюте. Значит, по теореме о трёх гомотетиях для окружностей 1, 3, 4 центр гомотетии окружностей 3 и 4 также лежит на абсолюте. Но тогда это в точности точка H. Поэтому окружность 4 касается правой прямой, что и требовалось доказать.

Второе решение. По сути рис. 1 эквивалентен вот такой картинке в евклидовой геометрии (рис. 5). Ведь эквидистанта — это аналог параллельной прямой, поэтому криволинейные четырёхугольники — это просто неевклидовы аналоги параллелограммов. А если в параллелограмм можно вписать окружность, то это ромб. Таким образом, нужно просто доказать, что если в сетке из параллелограммов есть три ромба (как на картинке), то в ней все параллелограммы будут ромбами. Но это очевидно!

Формально и без аналогии с евклидовой геометрией это можно доказать так. Заметим, что неевклидовы окружности равны, поскольку все они попарно вписаны в пары эквидистант. Теперь рассмотрим пару гори-

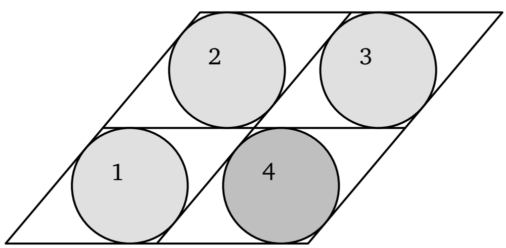

Рис. 5

зонтальных эквидистант и среднюю наклонную эквидистанту. Далее, рассмотрим окружность, касающуюся всех трёх эквидистант (существование такой окружности следует, например, из задачи Аполлония, см. [7]). Поскольку расстояние между средней и правой наклонными эквидистантами равно диаметру этой окружности, правая эквидистанта также будет касаться этой окружности. Задача решена!

В таком виде задача допускает следующее обобщение. Рассмотрим две тройки соосных окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось, где каждая окружность из первой тройки пересекает каждую окружность из второй тройки ровно в двух точках. Тогда если три криволинейных четырёхугольника будут описанными, то и четвёртый будет описанным.

Упражнение 9. Докажите это утверждение.

Теперь рассмотрим пример задачи, найти евклидово решение которой пока не удалось, а неевклидово получается в две строчки.

Задача 2. Рассмотрим отрезок AB и точку H на нём. Проведём три дуги окружностей с концами в точках A и B, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB, и три луча с началом в точке H, лежащие в той же полуплоскости. При пересечении дуг окружностей и лучей возникают четыре криволинейных четырёхугольника (две их стороны лежат на дугах окружностей, а две оставшиеся — на лучах). Докажите,

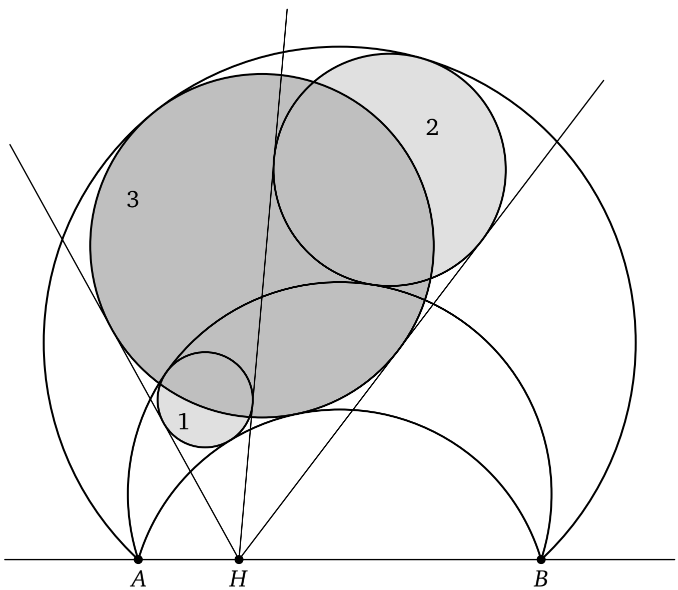

Рис. 6

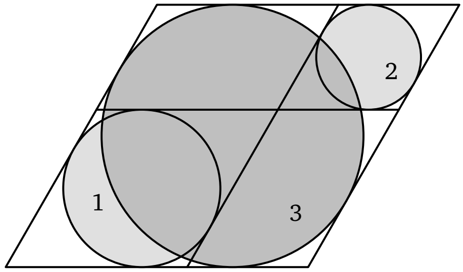

Рис. 7

что если в два диагональных (т. е. не имеющих общих сторон) четырёхугольника можно вписать окружность, то и в большой криволинейный четырёхугольник можно вписать окружность (рис. 6).

Решение. Рисунок 6 эквивалентен вот такой картинке в евклидовой геометрии (рис. 7). Есть сетка из параллелограммов, в которой два параллелограмма по диагонали являются ромбами. Тогда большой параллелограмм тоже будет ромбом. Следовательно, в него можно вписать окружность.

Приведём также несколько модификаций этой задачи.

Задача 3. 1. Рассмотрим две тройки соосных окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось, где каждая окружность из первой тройки пересекает каждую окружность из второй тройки ровно в двух точках. Тогда если два диагональных криволинейных четырёхугольника будут описанными, то и большой криволинейный четырёхугольник будет описанным.

2. Более того, можно делить большой четырёхугольник на n^2 частей с любым натуральным n и брать маленькие части по одной в каждом столбце и строке.

В заключение этого раздела приведём пару хорошо известных картинок из евклидовой геометрии, которые также допускают простой анализ в неевклидовой геометрии с помощью тех же соображений (рис. 8).

На левой картинке можно видеть тройку орициклов и тройку эквидистант, а на правой — две тройки эквидистант.

§ 4. По мотивам олимпиады Шарыгина

Теперь посмотрим, как работают модель Пуанкаре в круге и модель Клейна. Часто потребуется осуществлять переход между этими моделями, поэтому напомним, что для этого достаточно заменить дуги окружностей,

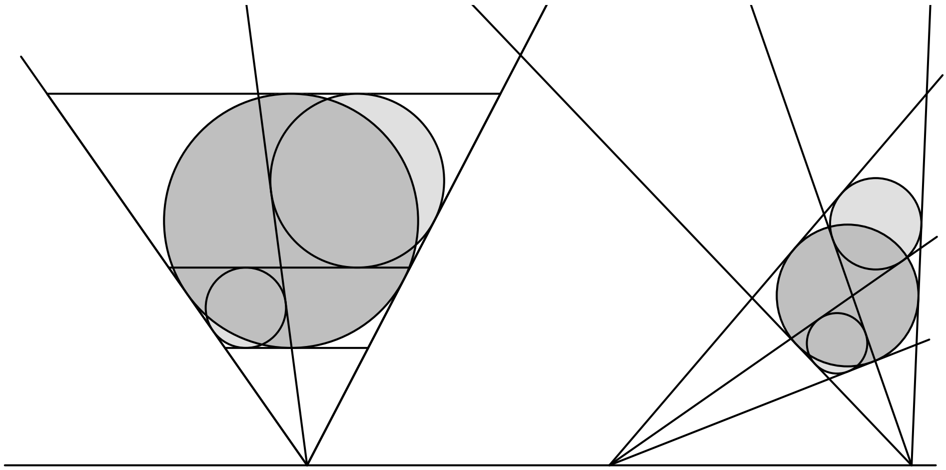

Рис. 8

перпендикулярных абсолюту, на общие хорды этих дуг и окружности абсолюта.

Задача 4. Окружность Ω касается окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 внешним образом. Окружность Γ_1 соосна с ω_2 и ω_3 и проходит через точку касания ω_1 с Ω. Окружности Γ_2 и Γ_3 определяются аналогично. Тогда окружности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 соосны (рис. 9).

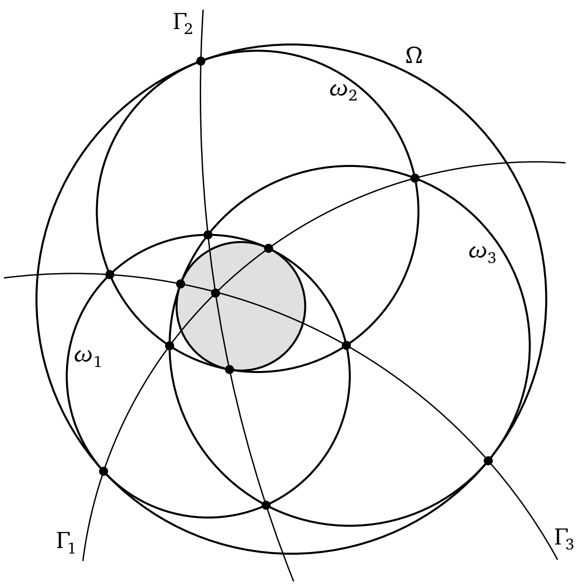

Рис. 9

Решение. Вначале рассмотрим случай, когда не все окружности ω_1, ω_2, ω_3 пересекаются. В таком случае рассмотрим окружность ω, перпендикулярную ω_1, ω_2, ω_3. Она обязательно существует: её центр — это радикальный центр окружностей ω_1, ω_2 и ω_3. Заметим, что любая окружность, соосная с ω_2 и ω_3, также будет перпендикулярна ω. Значит, окружности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 перпендикулярны ω.

Рассмотрим модель Пуанкаре в круге для плоскости Лобачевского, приняв ω за абсолют, и перейдём к модели Клейна. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 станут прямыми, образующими неевклидов треугольник. Окружность Ω станет коникой, вписанной в этот треугольник, а окружности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 превратятся в прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания коники со сторонами. Как хорошо известно, эти прямые пересекаются в одной точке (в этом можно убедиться, сделав проективное преобразование, переводящее конику в окружность, и сведя задачу к отысканию точки Жергонна). Переходя обратно к модели Пуанкаре, получаем, что окружности Γ_1, Γ_2 и Γ_3 ортогональны абсолюту и имеют общую точку. Значит, они соосны.

Упражнение 10. Решите задачу в случае, когда окружности ω_1, ω_2 и ω_3 попарно пересекаются.

Указание. Сделайте инверсию в точке касания окружностей Ω и ω_1.

Упражнение 11. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Окружность ω касается отрезка MA в точке P, отрезка MD в точке Q и окружности $ABCD$ в точке X. Докажите, что X лежит на радикальной оси окружностей (ACQ) и (BDP).

Задача 4 по существу эквивалентна существованию точки Жергонна в неевклидовом треугольнике. Следующая задача эквивалентна существованию точки Нагеля. Нам не известно её решение, не использующее геометрию Лобачевского.

Задача 5. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 попарно пересекаются. Окружность Γ_1 касается окружностей ω_2 и ω_3 внешним образом и касается ω_1 внутренним образом, причём Γ_1 лежит внутри ω_1. Рассмотрим окружность, проходящую через точку касания ω_1 с Γ_1 и точки пересечения ω_2 с ω_3, а также две аналогичные окружности. Тогда эти три окружности пересекаются в двух точках (рис. 10).

Замечание 2. Иногда вместо неевклидовых вневписанных окружностей нужно рассматривать эквидистанты или орициклы (подробнее см. [2]). Наше рассуждение не зависит от этого, поэтому для краткости

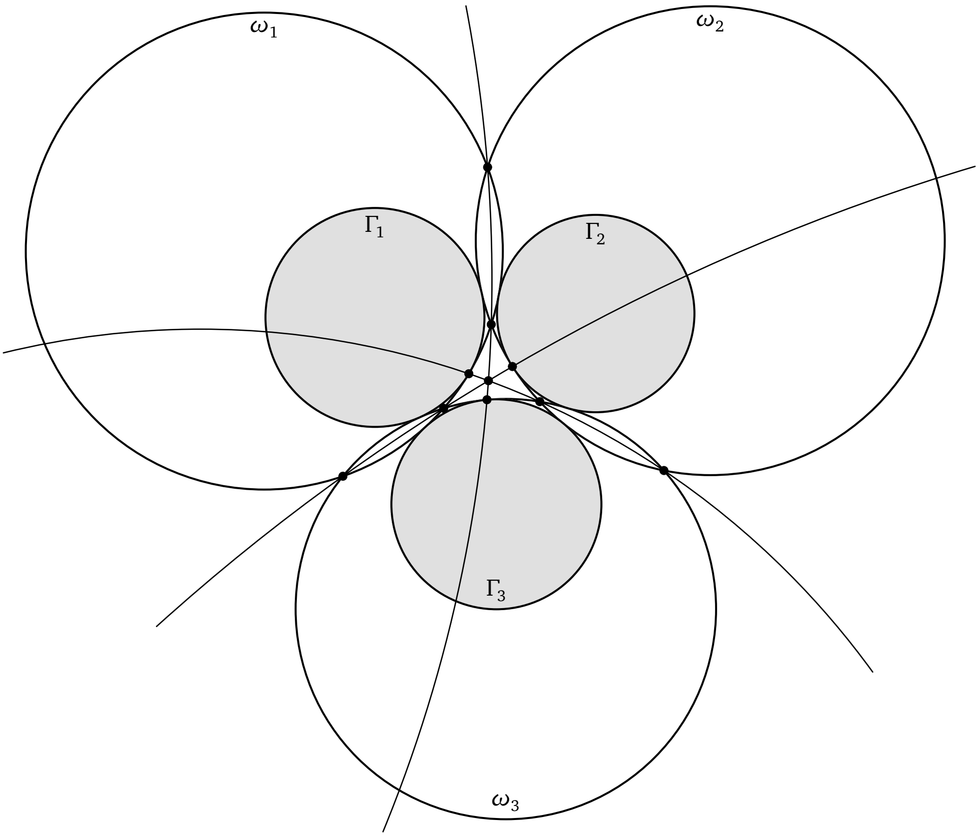

Рис. 10

мы будем говорить «вневписанные окружности», имея в виду евклидовы окружности.

Решение. Эта задача эквивалентна следующей. Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского, A_1, B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами. Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Это утверждение проще всего доказать с помощью *неевклидовой теоремы Чевы*: если выполнено соотношение

$$\frac{\operatorname{sh}(AB_1)}{\operatorname{sh}(B_1C)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(CA_1)}{\operatorname{sh}(A_1B)} \cdot \frac{\operatorname{sh}(BC_1)}{\operatorname{sh}(C_1A)} = 1,$$

то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Здесь

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

— гиперболический синус числа x; подробнее см. [6, с. 35–36].

Для того чтобы применить неевклидову теорему Чевы, осталось заметить, что $AB_1 = BA_1$, $BC_1 = CB_1$ и $CA_1 = AC_1$.

Упражнение 12. Докажите эти равенства.

Замечание 3. Точно так же можно было бы решить и предыдущую задачу, сводящуюся к отысканию точки Жергонна. Однако, в отличие от точки Жергонна, для точки Нагеля нам не известно чисто геометрическое доказательство, не использующее теорему Чевы.

§ 5. Классические теоремы и модель Клейна

Далее мы рассматриваем, как работает в евклидовых задачах модель Клейна. Поскольку эта модель основана на проективной геометрии, неудивительно, что три задачи, о которых сейчас пойдёт речь, также имеют проективную природу. Первые две задачи являются классическими и хорошо известны, а третья, возможно, не так популярна.

Задача 6 (задача о бабочке). Рассмотрим в окружности хорду AB и её середину M. Проведём через точку M две хорды PQ и RS. Пусть прямые PR и QS пересекают хорду AB в точках C и D (рис. 11). Тогда $CM = DM$.

Решение. Хорошо известен проективный характер данной задачи, который делает весьма затруднительными чисто евклидовы решения, использующие подобные треугольники, равенства углов и т. д. Оказывается, что этот проективный характер можно использовать для интерпретации задачи в модели Клейна геометрии Лобачевского.

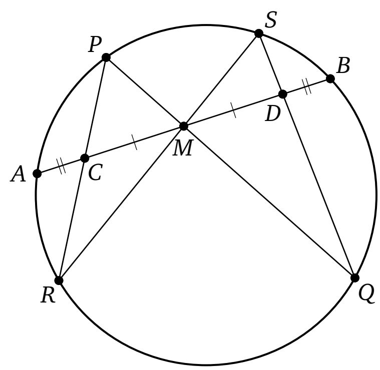

Рис. 11

Рассмотрим рис. 11 с точки зрения модели Клейна, приняв окружность за абсолют. Применим центральную симметрию с центром в точке M. Ясно, что тогда прямая PR перейдёт в прямую QS, а точка C перейдёт в точку D. Получается, что *неевклидовы* длины отрезков CM и DM равны. Однако тогда эти отрезки симметричны относительно диаметра абсолюта, проходящего через M, а потому *евклидовы* длины этих отрезков также равны, что и требовалось доказать.

Отметим идею связать пару пересекающихся хорд в окружности с центральной симметрией в модели Клейна относительно точки пересечения хорд. В следующей теореме это соображение будет использовано сразу трижды.

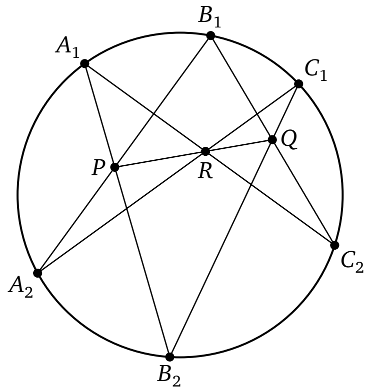

Рис. 12

Задача 7 (теорема Паскаля). Рассмотрим шесть точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, лежащие на одной окружности. Пусть P — точка пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, Q — точка пересечения прямых B_1C_2 и B_2C_1, R — точка пересечения прямых C_1A_2 и C_2A_1. Тогда точки P, Q, R лежат на одной прямой (рис. 12).

Замечание 4. Для удобства будем считать точки P, Q и R лежащими внутри окружности, что достигается подходящим выбором положения точек A_i, B_i, C_i на окружности (рис. 12). Рассуждения можно обобщить и для произвольного положения точек, см., например, [1].

Доказательство. Все рассмотрения будем проводить в модели Клейна. Проведём прямую PQ, пересекающую прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 в точках X, Y и Z соответственно. Докажем, что $\angle A_1XP = \angle C_2ZQ$. Для этого рассмотрим композицию центральных симметрий $Z_Q \circ Z_P$. Ясно, что эта композиция переводит A_1 в C_1 и A_2 в C_2. Кроме того, имеют место следующие равенства неевклидовых углов: $\angle A_1XP = \angle B_2YP = \angle B_1YQ = \angle C_2ZQ$.

Теперь рассмотрим центральную симметрию Z_R, переводящую A_1A_2 в C_1C_2. Поскольку $\angle A_1XP = \angle C_2ZQ$, несложно доказать, что точка R должна лежать на прямой PQ. В самом деле, существует единственная центральная симметрия, переводящая A_1A_2 в C_1C_2, и её центр — это с одной стороны точка R, а с другой — неевклидова середина отрезка PQ. Значит, точка R — это неевклидова середина отрезка PQ. □

Рассмотрим ещё одну классическую (но, видимо, на этот раз не широко известную) теорему.

Теорема 1 (Фрежье). *Пусть дана коника и точка C на ней. Тогда хорды XY коники, которые видны из C под фиксированным* (*ориентированным*) *углом, огибают некоторую конику.*

Доказательство (А. Акопян). Пусть X — произвольная точка нашей коники. Тогда для неё существует единственная точка $Y = f(X)$ на конике, такая, что ориентированный угол $\angle XCY$ равен заданному. Легко видеть, что отображение $f\colon X \mapsto Y$ проективно.

Теперь проективным преобразованием переведём данную конику в окружность. Тогда проективное преобразование f перейдёт в проективное преобразование окружности $\widetilde{f}$. Продолжим его на плоскость и будем считать окружность абсолютом модели Клейна. В таком случае продолженное преобразование, которое мы также обозначим через $\widetilde{f}$, будет собственным движением плоскости Лобачевского. Следовательно, оно является композицией двух осевых симметрий. В зависимости от расположения их осей существуют три типа собственных движений: поворот (соответствующий пересекающимся прямым), орициклический поворот (соответствующий прямым, пересекающимся на абсолюте) и параллельный перенос (соответствующий расходящимся прямым). Несложно видеть, что поворот сохраняет концентрические окружности, орициклический поворот — орициклы, а параллельный перенос — эквидистанты. Поэтому в зависимости от типа движения $\widetilde{f}$ все прямые $X\widetilde{f}(X)$ будут огибать окружность, орицикл или эквидистанту. Каждая из этих кривых является коникой, поэтому и её прообраз также будет коникой, что и требовалось доказать. □

В заключение приведём решение следующей классической задачи.

Задача 8. Рассмотрим треугольник ABC и окружность ω. Пусть A', B', C' — полюсы прямых BC, CA, AB относительно окружности ω. Тогда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке (рис. 13).

Решение. Снова посмотрим на нашу задачу через призму модели Клейна. Для определённости мы рассмотрим случай, когда треугольник ABC

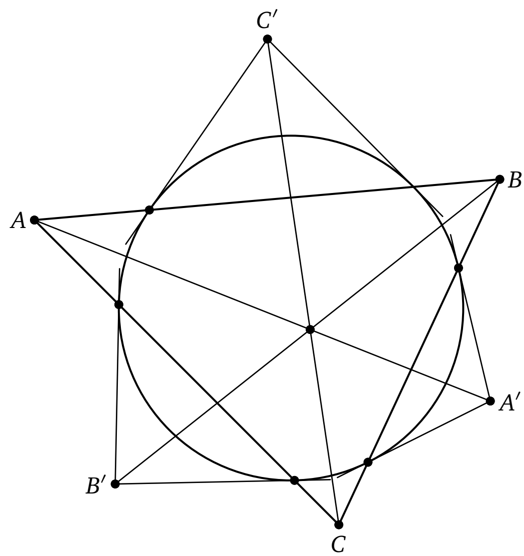

Рис. 13

целиком лежит внутри окружности ω (о методе перехода к общему случаю см. [1]). Тогда прямые AA', BB' и CC' — это высоты треугольника ABC.

Упражнение 13. Докажите это.

Таким образом, мы свели задачу к классической задаче пересечения высот неевклидова треугольника в одной точке. Легче всего это доказать, переместив треугольник таким образом, чтобы одна из его вершин совпала с центром абсолюта. Тогда неевклидовы высоты такого треугольника совпадут с евклидовыми, что и завершает решение задачи.

Мы завершим эту статью следующей задачей, которая представляется нам очень трудной.

Задача 9. Рассмотрим вписанно-описанный четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром в O. Тогда центры I_{ab}, I_{bc}, I_{cd} и I_{da} вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD и ODA лежат на одной окружности (рис. 14).

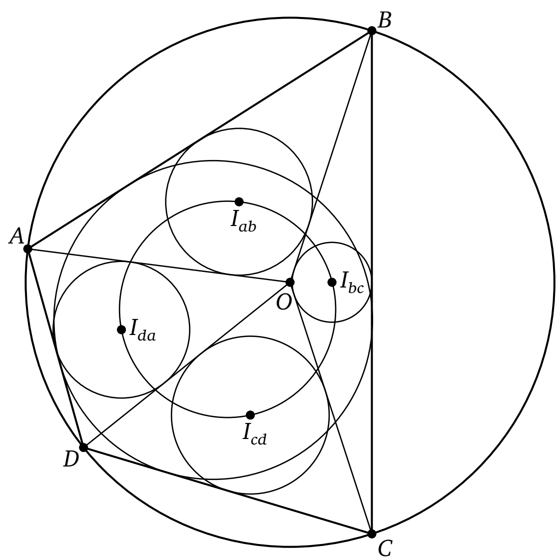

Рис. 14

Решение этой задачи, принадлежащее А. А. Заславскому, можно найти в [5].

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на сим-

плектической плоскости // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 93–99.

[2] *Бибиков П. В.* Описанные циклические линии треугольника в геометрии Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 13. М.: МЦНМО, 2009. С. 142–148.

[3] *Гальперин Г. А.*. Бильярдная формула для измерения расстояний в геометрии Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 93–112.

[4] *Жижилкин И. Д.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

[5] *Заславский А. А.* О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2019. С. 163–166.

[6] *Прасолов В. В.* Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2016.

[7] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2019.

[8] *Протасов В. Ю.* Выход в пространство — 2 [продолжение] // Квант. 2018. № 1. С. 8–14.

[9] `https://www.imo-official.org/problems.aspx`

Павел Витальевич Бибиков, лицей «Вторая школа» (г. Москва)

`bibikov.pv@sch2.ru`

Иван Ильич Фролов, факультет математики НИУ ВШЭ

`frolov1999@yandex.ru`