Педальные окружности, обобщённые точки Фейербаха и полюсы треугольника

М. И. Бидва, А. А. Шевцов

В данной работе исследуются обобщённые точки Фейербаха. Это обобщение производится с помощью теоремы Акопяна — Заславского — Фонтене, утверждающей, что педальные окружности точек, лежащих на одной прямой с центром описанной окружности, проходят через общую точку (которую мы и называем обобщённой точкой Фейербаха). Оказывается, что многие известные свойства точки Фейербаха допускают обобщение на случай такой точки, причём доказательства, получаемые для общего случая, оказываются более простыми и понятными. В работе развивается соответствующая техника работы с обобщёнными точками Фейербаха, основанная прежде всего на технике педальных треугольников. Также получены обобщения ряда классических конструкций, связанных с треугольником, таких как полюсы треугольника (исследованные ранее Емельяновыми и Поповым). Отметим, что некоторые результаты ранее уже были получены Д. Гринбергом, П. Кожевниковым и Д. Швецовым.

§ 1. Введение

Множество работ в элементарной геометрии посвящено точке Фейербаха — точке касания вписанной окружности треугольника и окружности девяти точек. Её свойства поистине неисчерпаемы, если уже более полутора столетий открываются всё новые и новые. Обнаружены её взаимосвязи с такими классическими объектами, как гомотетия, инверсия, точка Микеля, радикальные оси и многими другими. При этом доказательства многих красивых свойств точки Фейербаха отнюдь не просты и требуют многоходовых и сложных рассуждений.

В данной работе мы предлагаем новый подход к изучению свойств точки Фейербаха. Грубо говоря, мы утверждаем, что многие её свойства являются лишь *частными случаями* значительно более общих теорем, связанных с совершенно иными конструкциями, ранее особо не привлекавшимися для исследования точки Фейербаха. Стартуя с одного красивого утверждения (так называемой теоремы Куланина, см. [5]), мы последовательно построим теорию, обобщающую различные свойства точки Фейербаха, причём сделаем это с использованием инструментов, ранее не привлекавшихся для изучения её свойств. Отметим, что некоторые результаты, представленные в данной статье, уже получены ранее в работах [8] и [4]. Однако мы продемонстрируем иной подход к данным фактам, который также поможет связать эти результаты с классическими результатами про точку Фейербаха.

Для удобства зафиксируем основные обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи.

- A, B, C — вершины треугольника;
- M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно;
- O — центр описанной окружности Ω треугольника ABC;
- I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC;
- E — центр окружности девяти точек ε треугольника ABC;
- ℓ — произвольная прямая, проходящая через точку O;
- A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ — точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC, CA и AB соответственно;
- $P_aP_bP_c$ — педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC, а Ω_P — его педальная окружность;
- F_ℓ — обобщённая точка Фейербаха (см. теорему 1).

§ 2. Вспомогательные утверждения

Мы начнём наш рассказ со следующей теоремы.

Теорема 1 (Фонтене). *Пусть P — произвольная точка на прямой OI. Тогда её педальная окружность Ω_P проходит через точку Фейербаха F треугольника ABC.*

Красивое доказательство этого факта, использующее изогональное сопряжение и свойства равнобокой гиперболы, можно найти в [1, с. 106].

Теорема Фонтене допускает важную модификацию, которая и будет ключевой при обобщении понятия точки Фейербаха. По всей видимости, эта теорема принадлежит Е. Куланину и впервые была опубликована в [5].

Теорема 2 (Куланин). *Пусть P — произвольная точка прямой ℓ, проходящей через точку O. Тогда все педальные окружности Ω_P проходят через одну точку* (рис. 1).

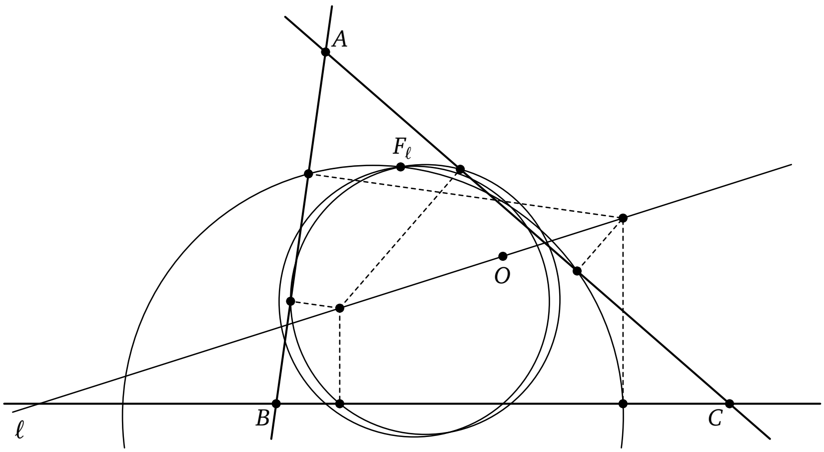


Рис. 1

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы Фонтене, приведённому в [1, с. 106] (см. также [5]).

Общую точку всех педальных окружностей Ω_P точек прямой ℓ мы будем обозначать через F_ℓ и называть *обобщённой точкой Фейербаха*. Эта точка зависит от прямой ℓ, проходящей через центр описанной окружности O треугольника ABC. В случае $\ell = OI$ точка F_ℓ совпадает с обычной точкой Фейербаха F. Отметим также, что все точки F_ℓ лежат на окружности Эйлера ε треугольника ABC (поскольку окружность Эйлера является педальной окружностью точки O).

§ 3. Полюсы треугольника

В этом разделе мы обобщим понятие полюсов треугольника. Впервые оно появилось в работе Емельяновых [2]. В ней авторы строили семейство замечательных окружностей, описанных около чевианных треугольников и проходящих через точку Фейербаха F. Понятие полюсов треугольника было обобщено в работе В. Попова [6], где полюсы зависели от треугольника, гомотетичного серединному с центром в точке Фейербаха. Мы же пойдём ещё дальше и сформулируем понятие полюсов треугольника, зависящее от двух точек P и Q, которые лежат на прямой ℓ, проходящей через центр O описанной окружности треугольника ABC.

Теорема 3. *Рассмотрим произвольную прямую ℓ, проходящую через центр O описанной окружности треугольника ABC. Пусть P и Q — произвольные точки на этой прямой. Обозначим через A_{pq} точку пересечения прямых P_bP_c и $F_\ell Q_a$. Аналогично определим точки B_{pq} и C_{pq}. Возьмём*

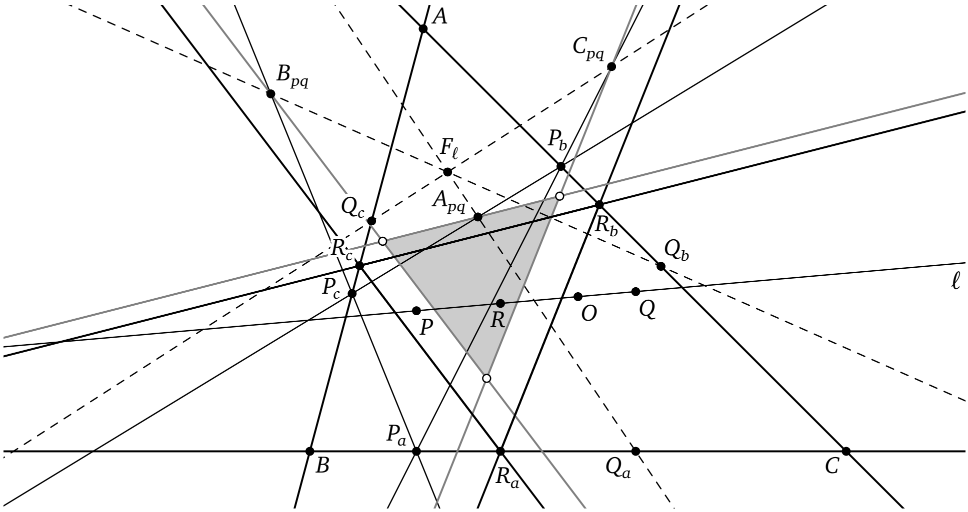


Рис. 2

произвольную точку R на прямой ℓ, её педальный треугольник $R_aR_bR_c$ и проведём через точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} прямые, параллельные R_bR_c, R_cR_a, R_aR_b соответственно. Тогда получившийся треугольник будет гомотетичен треугольнику $R_aR_bR_c$ с центром в точке F_ℓ (рис. 2).

Точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} мы будем называть *полюсами треугольника, соответствующими точкам P и Q*.

Перед тем как переходить к доказательству этой теоремы, рассмотрим некоторые её частные случаи (ранее доказанные в работах [2, 3, 6]).

При $P = Q = I$ и $R = O$ полюсы A_{ii}, B_{ii}, C_{ii} лежат на средних линиях треугольника ABC. Это в точности основная теорема статьи [3].

При $P = I$ и $Q = R = O$ полюсы A_{io}, B_{io}, C_{io} совпадают с полюсами треугольника ABC, введёнными Емельяновыми в работе [2], а треугольник, гомотетичный $M_aM_bM_c$, получается отражением точек касания G_a, G_b, G_c относительно биссектрис соответствующих углов треугольника ABC.

При $P=I$, $R=O$ и произвольном Q полюсы A_{iq}, B_{iq}, C_{iq} совпадают с обобщёнными полюсами Попова. Это один из основных результатов статьи [6].

Таким образом, конструкции, известные ранее, соответствуют фиксированному положению точек P и R.

3.1. Случай $Q = P$, $R = O$

Мы начнём доказательство теоремы 3 со следующего частного случая (впрочем, представляющего также самостоятельный интерес).

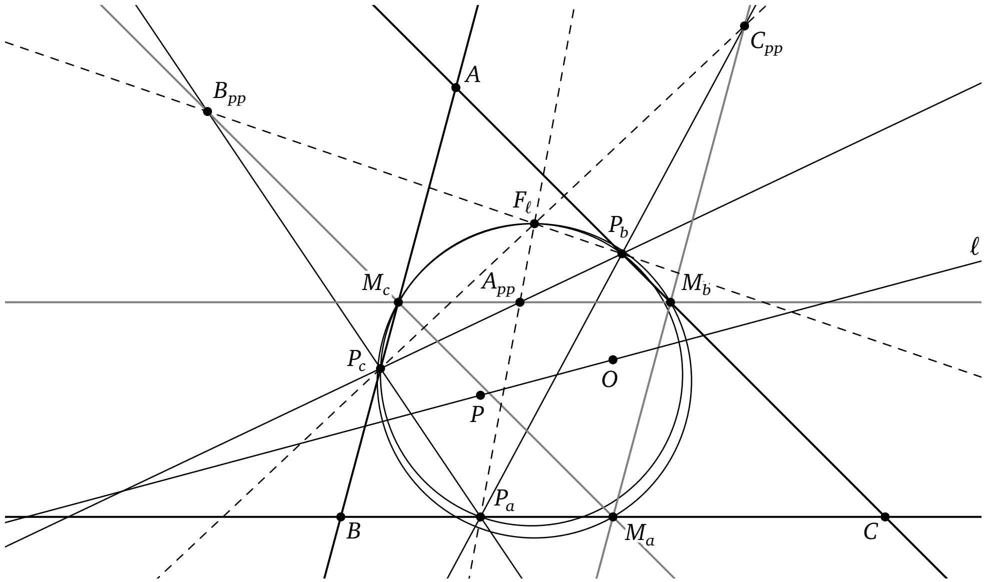


Рис. 3

Предложение 1. *Рассмотрим произвольный треугольник ABC, прямую ℓ, проходящую через O, и точку P на ней. Обозначим через A_{pp} точку пересечения прямых P_bP_c и M_bM_c. Тогда точки P_a, A_{pp} и F_ℓ лежат на одной прямой* (рис. 3).

Замечание 1. По существу это предложение соответствует случаю $Q = P$ и $R = O$ в обозначениях теоремы 3. Также заметим, что это предложение равносильно равенствам $A_{pp} = A_{op}$, $B_{pp} = B_{op}$ и $C_{pp} = C_{op}$.

Доказательство. Будем равномерно двигать точку P по прямой ℓ. Заметим, что тогда точка P_a будет равномерно двигаться по прямой BC со скоростью $\bar{v}_a$. Докажем, что точка A_{pp} также будет двигаться равномерно по прямой M_bM_c (со скоростью $\overline{w}_a$). В самом деле, применим теорему Менелая к треугольнику AM_bM_c и точкам P_b, P_c и A_{pp}. Точки P_b и P_c движутся равномерно, и из теоремы Менелая следует, что точка A_{pp} также будет двигаться равномерно.

Теперь рассмотрим гомотетию, переводящую вектор $\bar{v}_a$ в вектор $\overline{w}_a$ (ясно, что такая гомотетия существует и единственна). Тогда точки P_a и A_{pp} гомотетичны при всевозможных положениях точки P на прямой ℓ.

Остаётся показать, что центр построенной нами гомотетии совпадает с обобщённой точкой Фейербаха F_ℓ. Для этого рассмотрим два положения точки P, а именно точки пересечения описанной окружности Ω тре-

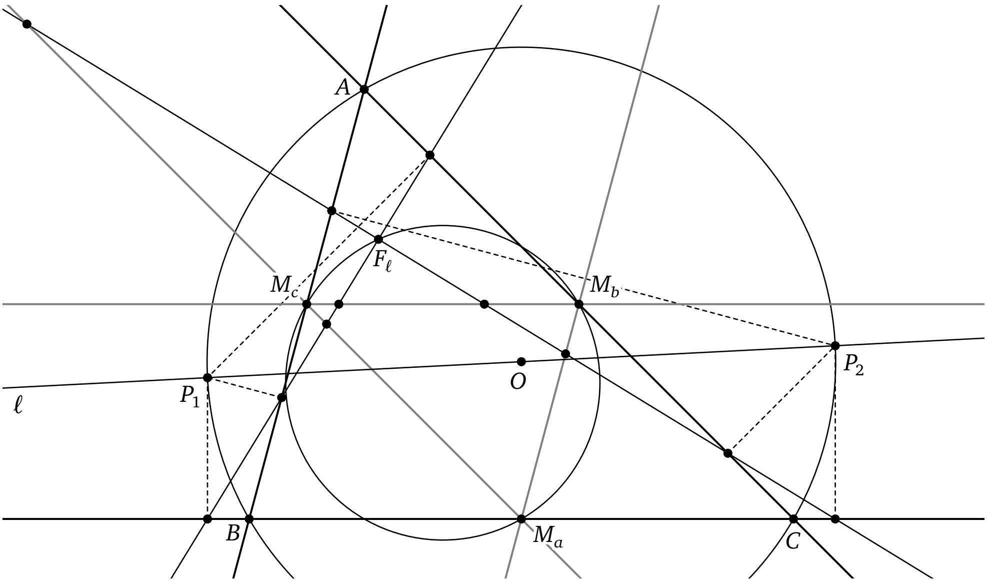


Рис. 4

угольника ABC с прямой ℓ (точки P_1 и P_2 на рис. 4). Тогда прямая P_aA_{pp} становится прямой Симсона для соответствующего конца диаметра, а потому в соответствии с теоремой Куланина обе такие прямые проходят через точку F_ℓ. С другой стороны, эти же прямые пересекаются в центре нашей гомотетии. Значит, центр гомотетии совпадает с точкой F_ℓ, что и требовалось доказать. □

3.2. Общий случай

Теперь мы готовы доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Будем равномерно двигать точку P по прямой ℓ. Обозначим через t ориентированную длину отрезка OP (т. е. выберем положительное направление на прямой ℓ и будем считать длину t отрезка OP положительной, если точка P находится на положительном луче, и отрицательной в противном случае). Введём декартову систему координат с началом в точке F_ℓ и обозначим через $(X_a(t), Y_a(t))$, $(X_b(t), Y_b(t))$, $(X_c(t), Y_c(t))$ координаты точек A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} соответственно. Докажем, что каждая из этих координатных функций является рациональной по переменной t, причём степень числителей равна 2, а степень знаменателей равна 1.

Для определённости рассмотрим точку A_{pq} (рассуждения для точек B_{pq} и C_{pq} аналогичны). Ясно, что точки P_b, P_c будут двигаться равномерно, поэтому их координаты являются линейными функциями от переменной t. Уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), имеет вид

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1).$$

Отсюда следует, что коэффициенты при x и y в уравнении прямой P_bP_c также линейно зависят от t, а свободный член этого уравнения квадратичен по t. Наконец, пересекая прямую P_bP_c с неподвижной прямой $F_\ell Q_a$, получаем искомые координаты точки A_{pq} пересечения этих прямых. Точно так же доказывается, что координаты точек B_{pq} и C_{pq} имеют аналогичный вид.

Теперь докажем, что при равномерном движении точки P прямые $A_{pq}B_{pq}$, $B_{pq}C_{pq}$, $C_{pq}A_{pq}$ будут двигаться параллельно (но не равномерно). Это условие равносильно равенствам

$$F_\ell A_{pq}=\alpha\cdot F_\ell C_{pq} \quad \text{и} \quad F_\ell B_{pq}=\beta\cdot F_\ell C_{pq},$$

где α и β — некоторые константы, не зависящие от t (например, можно вычислить их для некоторого конкретного момента времени t_0, а затем доказать, что они остаются неизменными в любой другой момент времени).

Докажем только первое равенство, поскольку второе доказывается аналогично. Перепишем первое равенство в координатах:

$$X_a(t)=\alpha_1\cdot X_c(t), \quad Y_a(t)=\alpha_2\cdot Y_c(t)$$

(здесь α_1 и α_2 — фиксированные константы). Вспомним, что каждая из функций, фигурирующих в этих соотношениях, является отношением многочленов степеней 2 и 1. Поэтому, домножая каждое из равенств на знаменатели соответствующих функций, получаем, что данные равенства равносильны обращению в тождественный нуль двух кубических многочленов от t. Для проверки этого условия достаточно найти четыре различных значения t, или, что то же самое, четыре различных положения точки P, при которые утверждение теоремы верно (так как если у многочлена степени не выше 3 есть 4 различных корня, то этот многочлен тождественно равен 0). Укажем эти положения.

Во-первых, рассмотрим два момента времени, когда точка P совпадает с O (этот случай соответствует $t=0$) и с Q. Из предложения 1 следует, что точки A_{pq} совпадают в эти два момента времени, причём они отличны от начала координат F_ℓ. Аналогичное верно для точек C_{pq}. Поэтому если определить константы α_1 и α_2 по формулам $\alpha_1=X_a(0)/X_c(0)$ и $\alpha_2=$ $=Y_a(0)/Y_c(0)$, то равенства

$$X_a(t)=\alpha_1\cdot X_c(t) \quad \text{и} \quad Y_a(t)=\alpha_2\cdot Y_c(t)$$

верны при двух моментах времени t.

Во-вторых, рассмотрим два положения точки P, являющихся концами диаметра описанной окружности Ω треугольника ABC, лежащего на прямой ℓ. В это случае точки A_{pq} и C_{pq} совпадают с F_ℓ, а потому их координаты равны 0 и требуемые равенства также верны.

Таким образом, мы нашли четыре момента времени, при которых соотношения между координатами точек A_{pq} и C_{pq} верны. Значит, эти соотношения верны в любой момент времени t, откуда следует параллельность прямых вида $A_{pq}C_{pq}$. Аналогично доказывается параллельность прямых $A_{pq}B_{pq}$ и $B_{pq}C_{pq}$. Таким образом, все треугольники вида $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ гомотетичны с центром в точке F_ℓ при всевозможных положениях точки P.

Осталось понять, почему при проведении через точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} прямых, параллельных R_bR_c, R_cR_a, R_aR_b соответственно, треугольник, образованный этими прямыми, будет гомотетичен треугольнику $R_aR_bR_c$ с центром в точке F_ℓ. Для этого рассмотрим момент времени, в который точка P совпадает с R. Тогда точки $A_{pq} = A_{rq}$, $B_{pq} = B_{rq}$ и $C_{pq} = C_{rq}$ будут лежать на прямых R_bR_c, R_cR_a и R_aR_b соответственно. Для произвольного положения точки P рассмотрим гомотетию с центром в F_ℓ, которая переведёт A_{rq} в A_{pq}. Тогда по доказанному выше эта же гомотетия переведёт B_{rq} в B_{pq} и C_{rq} в C_{pq}. Поэтому прямая R_bR_c перейдёт в прямую, проходящую через A_{pq} параллельно ей. Аналогичное произойдёт с двумя оставшимися прямыми R_cR_a и R_aR_b. Таким образом, теорема 3 полностью доказана. □

§ 4. Обобщённая точка Фейербаха и прямые Симсона

В этом разделе мы опишем ряд свойств обобщённой точки Фейербаха F_ℓ треугольника ABC, которая соответствует прямой ℓ, проходящей через центр описанной окружности O. Многие из этих свойств основаны на рассмотрении прямых Симсона точек пересечения прямой ℓ с описанной окружностью Ω треугольника ABC.

Теорема 4. *Прямые, симметричные прямой ℓ относительно средних линий треугольника ABC, пересекаются в точке F_ℓ.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что прямые, симметричные прямой ℓ относительно средних линий треугольника ABC, пересекаются в одной точке $\widetilde{F}_\ell$, лежащей на окружности Эйлера ε (поскольку точка O является ортоцентром серединного треугольника $M_aM_bM_c$, а прямые, симметричные прямой, проходящей через ортоцентр, относительно сторон, пересекаются в одной точке описанной окружности). Докажем, что эта

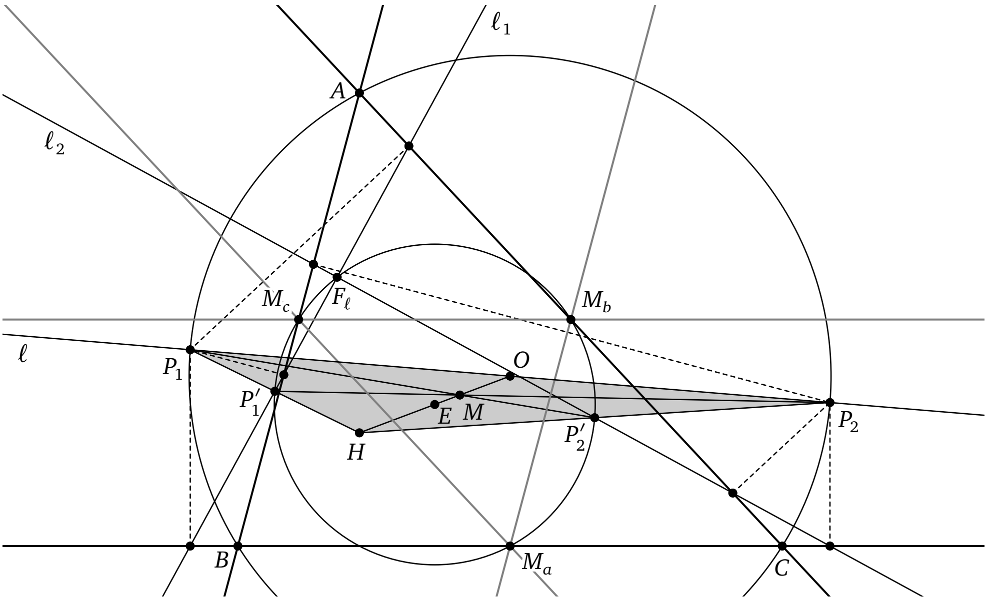


Рис. 5

точка на самом деле совпадает с F_ℓ. Пусть P — произвольная точка прямой ℓ. Из предложения 1 следует, что прямые P_aA_{pp}, P_bB_{pp} и P_cC_{pp} пересекаются в точке F_ℓ. Поэтому достаточно найти два положения точки P, в которых прямая P_aA_{pp} проходит через $\widetilde{F}_\ell$.

Выберем в качестве таких положений точки P_1 и P_2, лежащие на описанной окружности треугольника ABC (рис. 5). Тогда нам нужно доказать, что прямые Симсона точек P_1 и P_2 проходят через точку $\widetilde{F}_\ell$.

Пусть P_1' и P_2' — образы точек P_1 и P_2 при гомотетии с центром в ортоцентре H треугольника ABC и коэффициентом $1/2$ (рис. 5). Поскольку P_1P_2 — диаметр окружности Ω, то $P_1'P_2'$ — диаметр окружности ε. Кроме того, прямая Симсона точки P_1 проходит через середину P_1' отрезка P_1H (аналогичное верно и для точки P_2; см. рис. 5).

Далее, отрезки P_1P_2', P_2P_1' и HO пересекаются в одной точке (центре тяжести треугольника P_1P_2H) и делятся этой точкой в отношении $2:1$. Значит, эта точка совпадает с точкой M пересечения медиан треугольника ABC. Сделав гомотетию с центром в M и коэффициентом $-1/2$, получаем, что прямая Симсона точки P_1 относительно окружности Ω параллельна прямой Симсона точки P_2' относительно окружности ε.

Осталось доказать, что прямая Симсона ℓ_2' точки P_2' параллельна прямой $P_1'\widetilde{F}_\ell$. Для этого отметим на окружности ε такие точки X и Y, что $\widetilde{F}_\ell X$ и $P_2'Y$ перпендикулярны M_aM_b (рис. 6). Заметим, что прямая ℓ парал-

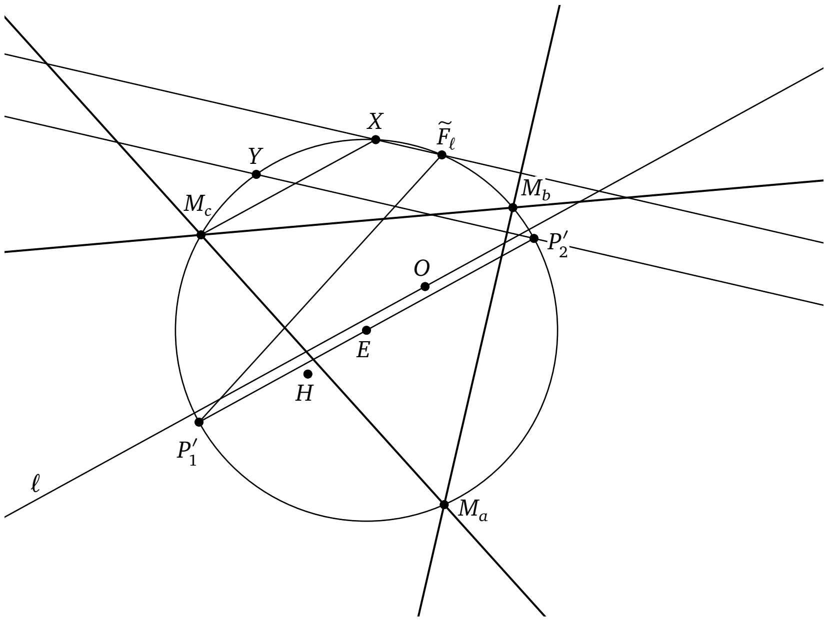


Рис. 6

лельна прямой Симсона точки $\widetilde{F}_\ell$, так как она является её образом при гомотетии с центром в точке H и коэффициентом 2. С другой стороны, прямая Симсона точки $\widetilde{F}_\ell$ параллельна прямой M_cX, а прямая Симсона ℓ_2' точки P_2' параллельна M_cY (подробнее см. [7]). Но $P_2'Y$ параллельно $X\widetilde{F}_\ell$, поэтому

$$\overset{\frown}{M_cP_1'} = \overset{\frown}{P_2'X} = \overset{\frown}{\widetilde{F}_\ell Y},$$

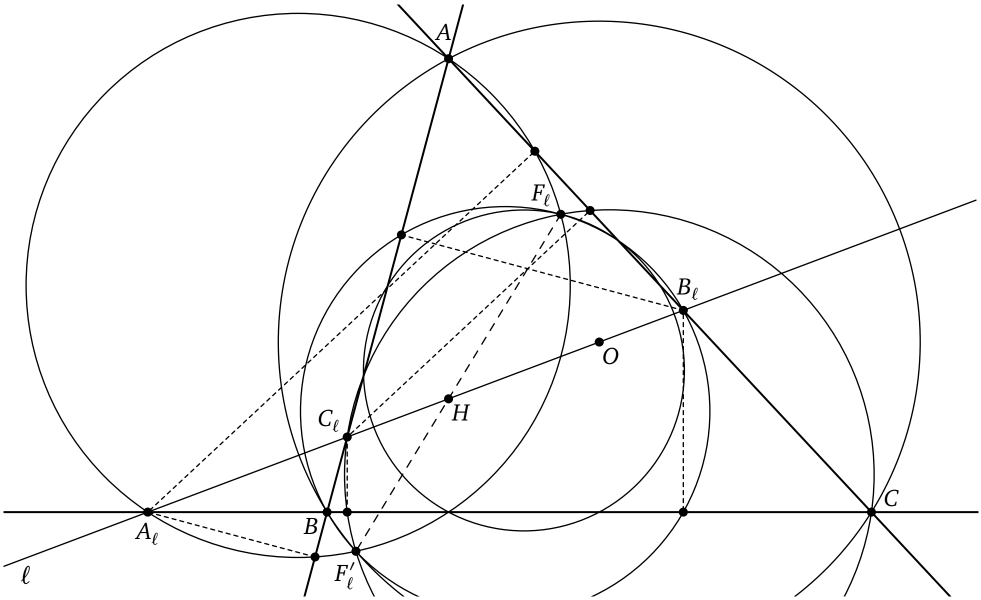
откуда следует, что ℓ_2' параллельна M_cY и $P_1'\widetilde{F}_\ell$, что и требовалось доказать. $\square$

Используя эту теорему, удаётся доказать следующие красивые факты.

Теорема 5. *При равномерном вращении прямой ℓ вокруг точки O точка F_ℓ будет равномерно двигаться по окружности Эйлера ε.*

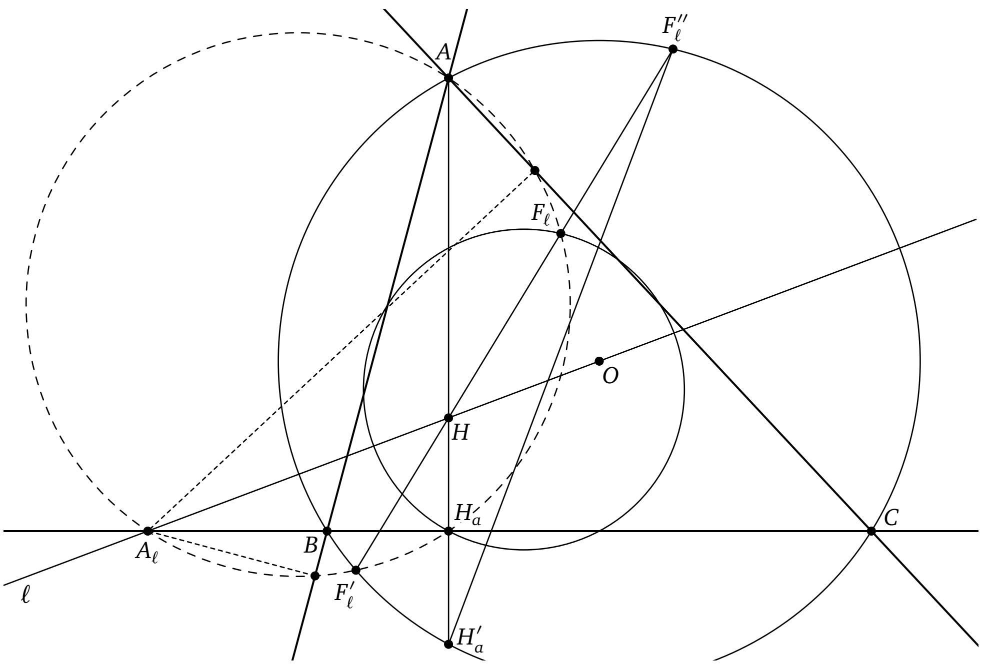
Доказательство. В самом деле, при равномерном вращении прямой ℓ вокруг точки O точки P_1 и P_2 будут равномерно вращаться по описанной окружности Ω. Но тогда точка F_ℓ пересечения их прямых Симсона ℓ_1 и ℓ_2 также будет вращаться равномерно, поскольку при равномерном вращении точки по окружности её прямая Симсона (относительно фиксированного треугольника) вращается равномерно. $\square$

Теорема 6. *Пусть A_ℓ, B_ℓ и C_ℓ — точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC, CA и AB соответственно. Тогда окружности, построенные на отрез-*



A
F_ℓ
B_ℓ
O
H
C_ℓ
C
A_ℓ
B
F'_ℓ
ℓ

Рис. 7



F''_ℓ
A
F_ℓ
O
H
H_a
C
A_ℓ
B
F'_ℓ
ℓ
H'_a

Рис. 8

ках AA_ℓ, BB_ℓ, CC_ℓ как на диаметрах, пересекаются в двух точках: F_ℓ и F'_ℓ, причём точка F'_ℓ лежит на описанной окружности Ω треугольника ABC, а ортоцентр H этого треугольника принадлежит прямой $F_\ell F'_\ell$ (рис. 7).

Доказательство. Сначала докажем, что отрезок AA_ℓ виден из точки F_ℓ под прямым углом. Отсюда будет следовать принадлежность точки F_ℓ окружности с диаметром AA_ℓ (доказательства для других двух окружностей аналогичны). Согласно теореме Куланина педальная окружность точки A_ℓ проходит через точку F_ℓ. Но эта окружность проходит также через вершину A, потому что изогональный образ точки A_ℓ — это вершина A (как, впрочем, и изогональный образ любой точки прямой BC). Отсюда следует, что точки A, A_ℓ и F_ℓ лежат на одной окружности с диаметром AA_ℓ.

Центрально-симметрично отразим точку H относительно H_a и F_ℓ. Получим точки H'_a и F''_ℓ, лежащие на описанной окружности Ω треугольника ABC (рис. 8 и доказательство предыдущей теоремы). Далее, обозначим через F'_ℓ точку пересечения луча HF_ℓ с описанной окружностью Ω треугольника ABC, отличную от F_ℓ. Докажем, что угол $AF'_\ell A_\ell$ также прямой. Заметим, что основание высоты H_a треугольника ABC лежит на окружности с диаметром AA_ℓ, поэтому достаточно доказать, что точки A, F_ℓ, H_a и F'_ℓ лежат на одной окружности. Но в треугольнике $HH'_aF''_\ell$ отрезок H_aF_ℓ является средней линией, а четырёхугольник $AF''_\ell H'_a F'_\ell$ вписанный, поэтому и четырёхугольник $AF_\ell H_a F'_\ell$ вписанный, что и требовалось доказать. □

§ 5. Автополярные треугольники и обобщение теоремы Емельяновых

В этом разделе мы вернёмся к предложению 1 и рассмотрим интересные частные случаи. Интерес к конфигурациям, рассматриваемым в этом разделе, обусловлен замечательной теоремой Емельяновых, доказанной ими в [2]. Суть её заключается в том, что полюсы A_{io}, B_{io} и C_{io} образуют автополярный треугольник относительно вписанной окружности ω и порождают семейство замечательных окружностей, проходящих через точку Фейербаха. Для этого необходимо взять на стороне BC треугольника произвольную точку X_a, провести прямые $C_{io}X_a$ и $B_{io}X_a$ и пересечь с прямыми AC и AB соответственно. Получившиеся точки X_b и X_c вместе с точкой X_a образуют чевианный треугольник (так как прямые AX_a, BX_b и CX_c пересекаются в одной точке). Более того, прямая X_bX_c проходит через точку A_{io}, т. е. неважно, с какой из точек X_a, X_b или X_c начинать процесс. Ну и, наконец, описанная окружность треугольника $X_aX_bX_c$ проходит через точку Фейербаха F.

В этом разделе мы обобщим этот результат Емельяновых на случай полюсов A_{hh}, B_{hh}, C_{hh}. В этом нам поможет геометрическое доказательство теоремы Емельяновых, найденное А. А. Заславским (см. [1, с. 105–106]).

Теорема 7. *Пусть OH — прямая Эйлера треугольника ABC. Тогда полюсы A_{hh}, B_{hh}, C_{hh} образуют автополярный треугольник относительно окружности Эйлера ε, причём вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$.*

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $H_aH_bH_cF_\ell$, вписанный в окружность Эйлера ε. Его противоположные стороны H_aH_c и $F_\ell H_b$ пересекаются в точке B_{hh}, а стороны H_aH_b и $F_\ell H_c$ — в точке C_{hh}, в то время как диагонали H_aF_ℓ и H_bH_c пересекаются в точке A_{hh}. Отсюда следует, что треугольник $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$ является автополярным относительно окружности Эйлера ε.

Теперь докажем, что стороны этого треугольника содержат вершины треугольника ABC. В самом деле, рассмотрим четырёхугольник $H_cM_cH_bM_b$, также вписанный в окружность ε. Его диагонали пересекаются в точке A_{hh}, а боковые стороны — в точке A, поэтому точка A лежит на поляре точки A_{hh}. Но полярой точки A_{hh} является прямая $B_{hh}C_{hh}$, поэтому точка A лежит на $B_{hh}C_{hh}$. Рассуждения для остальных вершин абсолютно аналогичны. □

Из этой теоремы сразу вытекает аналог теоремы Емельяновых (см. [2]).

Теорема 8. *Пусть X_a — произвольная точка на прямой BC. Обозначим через X_b точку пересечения прямых X_aC_{hh} и AC, а через X_c — точку пересечения прямых X_aB_{hh} и AB. Тогда*

- *прямая X_bX_c проходит через точку A_{hh};*
- *прямые AX_a, BX_b и CX_c пересекаются в одной точке X;*
- *описанная окружность треугольника $X_aX_bX_c$ проходит через точку F_{OL}, где L — точка Лемуана треугольника ABC* (рис. 9).

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы Емельяновых, приведённому в [1, с. 105–106].

Как мы отмечали выше, определение полюсов A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} зависит от порядка выбора точек P и Q на прямой ℓ. Возникает вопрос: как связаны полюсы A_{pq} и A_{qp}, т. е. полюсы, соответствующие одним и тем же точкам, взятым в разном порядке? Появилась следующая

Гипотеза. *Точки пересечения Z_a, Z_b, Z_c прямых, содержащих соответственные стороны треугольников $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ и $A_{qp}B_{qp}C_{qp}$, образуют треугольник, гомотетичный треугольнику ABC с центром в точке F_ℓ* (рис. 10).

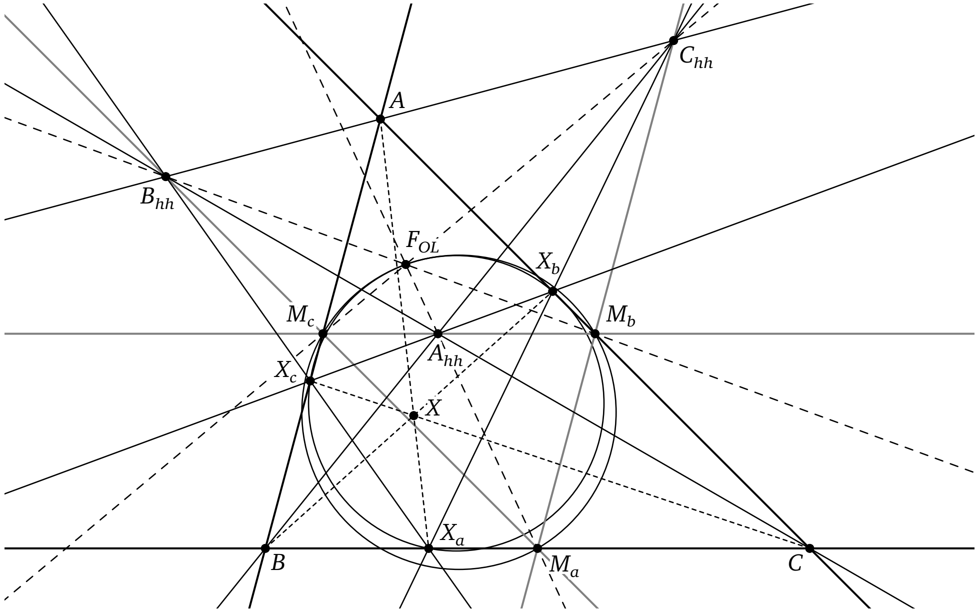

C_{hh}
A
B_{hh}
F_{OL}
X_b
M_c
M_b
A_{hh}
X_c
X
X_a
B
M_a
C

Рис. 9

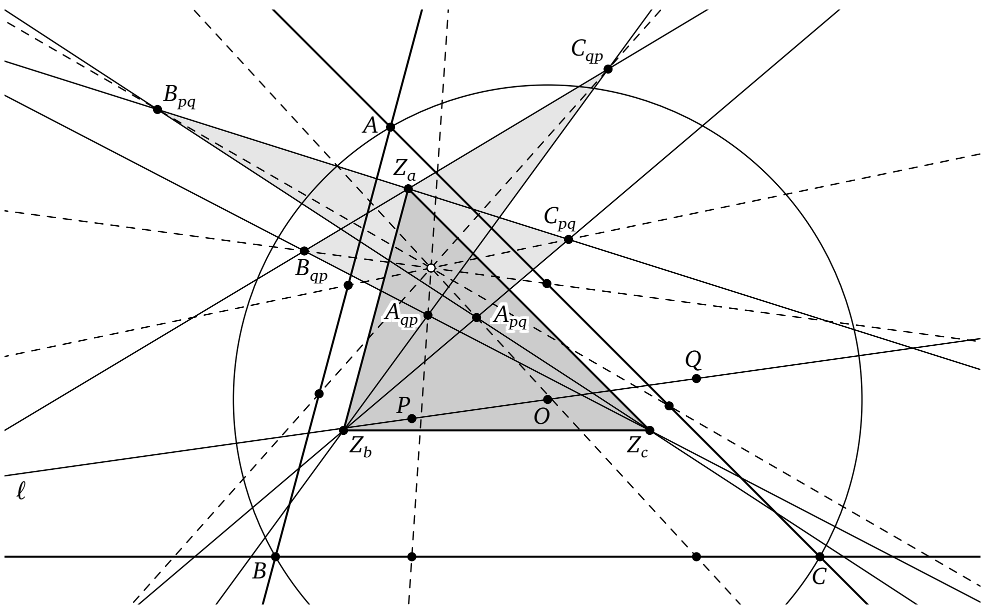

C_{qp}
B_{pq}
A
Z_a
C_{pq}
B_{qp}
A_{qp}
A_{pq}
Q
P
O
Z_b
Z_c
ℓ
B
C

Рис. 10

При подготовке 31-й Летней конференции международного математического Турнира городов И. И. Фролов показал, что эти треугольники перспективны с центром в точке F_ℓ. На конференции сербские школьники С. Гвоздич, А. Суботич, У. Цолович доказали гомотетичность этих треугольников (без информации о центре гомотетии), см. [9, с. 12, п. 3.11]. Таким образом, совместными усилиями гипотеза была доказана.

Как видно из теорем 7 и 8, существенный интерес представляет такой выбор точек P и Q на прямой ℓ, при котором вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$. Всегда ли на прямой ℓ можно выбрать такую пару точек? Эксперименты показывают, что такие точки существуют всегда, однако они не могут располагаться слишком далеко от точки O. Как можно точно описать положения точек P и Q, при которых справедливы аналоги теорем 7 и 8, авторам неизвестно.

Благодарности

Авторы благодарят П. В. Бибикова за постановку задачи и помощь в подготовке статьи.

Список литературы

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Емельянов Л. А., Емельянова Т. Л.* Семейство Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 78–92.

[3] *Ивлев Ф. А.* Несколько прямых, проходящих через точку Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 219–228.

[4] *Кожевников П. А., Швецов Д.* Обобщённая теорема Фейербаха // Задачи Санкт-Петербургской олимпиады по математике 2013 года. М.: МЦНМО, 2014. С. 149–164.

[5] *Куланин Е. Д.* Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 164–182.

[6] *Попов В. Д.* Об инверсных образах точки Фейербаха и обобщении теоремы Емельяновых // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 48–66.

[7] *Швецов Д.* От прямой Симсона к теореме Дроз — Фарни // Квант. 2010. № 6. С. 34–38.

[8] *Grinberg D.* Generalization of the Feuerbach point // http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html

[9] Об инверсных образах точки Фейербаха, полюсах треугольника и теореме Куланина // 31-я Летняя конференция Турнира городов, https://www.turgor.ru/lktg/2019/6-Inversions%20of%20the%20Feuerbach%20point/6-1ru-sol.pdf

Максим Игоревич Бидва, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
bidva.maxim@yandex.ru

Андрей Алексеевич Шевцов, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
andreyshevtsov2003@gmail.com