Формула и содержание

М. А. Горелов

В школьном курсе геометрии изучается достаточно много формул. Большинство из них очень простые. И это правильно. В данной статье рассказывается о чуть более сложной формуле. Но она содержит формулу Герона и теорему Птолемея, две формулы Эйлера, теорему Понселе и теорему Фейербаха, формулу Карно и формулу Стюарта, и многое другое. Такое богатство содержания свидетельствует о том, что эту формулу стоит если не запомнить, то, по крайней мере, иметь в виду.

Часть 1. Формула

В этой статье речь пойдёт о том, как алгебра помогает геометрии. Читатель, пожалуй, скажет: «Эка невидаль: в школьном курсе геометрии частенько приходится преобразовывать формулы, решать уравнения и т. п. Это не самая интересная часть геометрии». И в каком-то смысле он будет прав. Дело в том, что школьный курс алгебры гораздо беднее школьного курса геометрии. Но стоит добавить к нему совсем немножко, и алгебра становится мощным орудием, позволяющим решать довольно сложные геометрические задачи. Все используемые далее алгебраические факты можно найти в книгах [4, 5, 9] или [8].

Можно сказать, что алгебра — это искусство заменять сложные вычисления более простыми рассуждениями[1]. Об этом и пойдёт рассказ.

§ 1. Степень точки относительно окружности

Вначале напомним простой, но важный факт.

Пусть на плоскости задана окружность $\Omega(O, R)$ с центром O и радиусом R и точка A. Пусть прямая l, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках B и C. Тогда произведение длин отрезков AB и AC не зависит от выбора прямой l.

[1] По крайней мере, такая точка зрения имела право на существование в начале прошлого века. С тех пор само понятие «алгебра» стало значительно шире.

Упражнение 1. Докажите это утверждение, пользуясь теоремой Виета.

Указание. Важно правильно выбрать координату на прямой.

Пусть d — расстояние от точки A до центра O окружности Ω. Число d^2-R^2 называется *степенью* точки A относительно окружности Ω.

Упражнения

2. Рассмотрим семейство квадратных трёхчленов вида t^2+pt+q, график каждого из которых пересекает оси координат в трёх различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих трёх точках, проходят через одну точку.

3. Через две данные точки проведите окружность, высекающую на данной прямой хорду заданной длины.

4. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

5. На сторонах остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что равенства $AH\cdot A_1H=BH\cdot B_1H=CH\cdot C_1H$ выполняются тогда и только тогда, когда H — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника.

§ 2. Основная Формула

Обратимся к основному содержанию данной статьи. Пусть заданы треугольник ABC и точка D в его плоскости. Используем обычные обозначения $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ для сторон треугольника. Расстояния от точки D до вершин треугольника обозначим через $u=AD$, $v=BD$, $w=CD$ (рис. 1). Пусть также R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, S — его площадь, p — полупериметр.

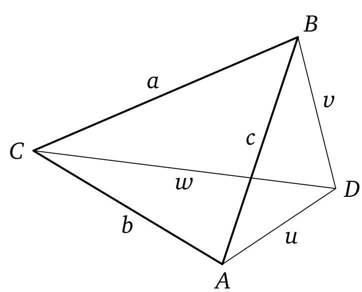

Рис. 1

Если заданы треугольник и расстояния u, v, w, то точка D определена однозначно. Значит, однозначно определено и расстояние d от этой точки до центра O описанной окружности треугольника ABC. Это расстояние даётся Формулой

$$16S^2(d^2-R^2)^2 = \\ =(au+bv+cw)(au+bv-cw)(au-bv+cw)(-au+bv+cw). \quad (1)$$

Это равенство занимает в данной статье особое место, поэтому будем называть его Формулой (с большой буквы). То же равенство можно записать в ином виде:

$$16S^2(d^2-R^2)^2 = \\ = 2(a^2u^2b^2v^2+a^2u^2c^2w^2+b^2v^2c^2w^2)-(a^4u^4+b^4v^4+c^4w^4). \quad (2)$$

Поскольку в правой части Формулы (1) стоит произведение, можно назвать это равенство мультипликативной формой Формулы. Тогда равенство (2) естественно называть аддитивной формой Формулы, поскольку в её правой части стоит сумма. В разных случаях бывает удобнее та или другая форма.

Как запомнить Формулу (1)? В левой части фигурируют площадь треугольника ABC и степень точки D относительно описанной около него окружности. Посмотрим на правую часть. Четыре точки A, B, C и D можно тремя способами разбить на пары. Возьмём расстояния между точками из каждой пары разбиения и перемножим. Поскольку разбиений три, получим три произведения. Из них составляются суммы в скобках правой части по тому же принципу, что и в известной формуле Герона для площади треугольника.

Те же три произведения фигурируют и в правой части Формулы (2).

Сделаем одно важное замечание. В правую часть Формулы (1) все четыре точки A, B, C и D входят симметрично: если мы вместо треугольника ABC и точки D будем рассматривать треугольник ABD и точку C, то в левой части Формулы (1) будут фигурировать другая площадь и степень другой точки относительно другой окружности, а в правой части останется ровно то же произведение. Сказанное, разумеется, относится и к Формуле (2).

§ 3. Связь с формулой Герона

Приступим к доказательству Формулы. Будем доказывать её индуктивно. Начнём с самого естественного, пожалуй, частного случая. Пусть точка D совпадает с центром O описанной окружности треугольника ABC.

Тогда $d=0$, $u=v=w=R$. И после очевидного сокращения формула (2) запишется в виде

$$16S^2 = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4). \quad (3)$$

Зафиксируем сторону a треугольника ABC и высоту h, опущенную на эту сторону. Тогда $16S^2=4a^2h^2$. Но треугольник не определяется этими двумя параметрами. Будем характеризовать треугольник расстоянием t от середины стороны BC до основания высоты, опущенной на эту сторону, приписывая этому расстоянию положительный знак, если основание высоты ближе к точке C, чем к точке B, и отрицательный в противном случае (рис. 2). Тогда по теореме Пифагора

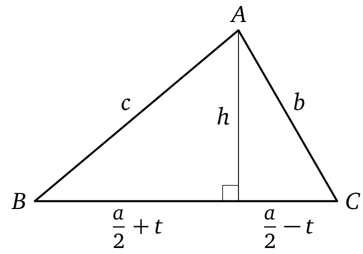

Рис. 2

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2} + t\right)^2 \quad \text{и} \quad b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2} - t\right)^2.$$

Остаётся подставить эти выражения в правую часть формулы (3) и упростить получившееся выражение.

Это уже несложно, но попробуем избежать этих вычислений.

Прежде всего заметим, что при подстановке в выражение

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \tag{4}$$

значений для b^2 и c^2 получится чётный многочлен $f(t)$ от переменной t. Действительно, при замене t на $-t$ значения b^2 и c^2 просто поменяются местами.

Чему равно $f(0)$? Очевидно, это значение записывается в виде однородного многочлена четвёртой степени от переменных a и h, в каждый из одночленов которого эти переменные входят в чётных степенях. Тогда его можно записать в виде $\lambda a^4 + \mu a^2h^2 + \tau h^4$ с какими-то коэффициентами λ, μ и τ. Попробуем определить эти коэффициенты. При $a = 0$ и $h = 1$ имеем $b = c = 1$ и выражение (4) равно нулю, а $\lambda a^4 + \mu a^2h^2 + \tau h^4 = \tau$. Значит, $\tau = 0$. Аналогично, при $a = 2$ и $h = 0$ будет $b = c = 1$ и выражение (4) обратится в нуль, поэтому $\lambda = 0$. Остаётся определить коэффициент μ. Взяв $a = 2$ и $h = 1$, получим $b^2 = c^2 = 2$, и выражение (4) будет равно 16, откуда $\mu = 4$, т. е. $f(0) = 4a^2h^2$.

Аналогичным образом можно убедиться, что $f(a/2) = 4a^2h^2$. А поскольку $f(t)$ — чётный многочлен, то и $f(-a/2) = 4a^2h^2$.

Наконец, взглянем на коэффициент при t^4 у многочлена $f(t)$. При подстановке значений для b^2 и c^2 в произведение b^2c^2 получим t^4 с коэффициентом 1. Также t^4 с коэффициентом 1 возникнет при подстановке выражений для b^2 и c^2 в слагаемые b^4 и c^4. В остальных слагаемых формулы (4) t^4 появиться не может. Значит, коэффициент при t^4 равен нулю. А поскольку многочлен $f(t)$ чётный, его степень не превосходит двух.

Но мы нашли три точки, в которых $f(t) = 4a^2h^2$. Значит, это равенство выполняется тождественно, что и требовалось доказать.

Замечание. Рациональный выбор «начала отсчёта» для переменной t позволил нам работать с чётным многочленом и тем самым сократить работу вдвое. Подобного рода мелочи при решении таких задач часто бывают крайне важными.

Рассуждения получились довольно длинными, поскольку я приводил их максимально подробно. При небольшом навыке все их можно воспроизвести в уме и очень быстро.

Упражнение 6. Докажите равенство

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)=\\=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Указание. При заданных b и c равенство достаточно доказать для пяти различных значений a. Как лучше выбрать эти пять значений?

Согласно формуле из последнего упражнения можно переписать равенство (3) в виде

$$16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Это равенство называют формулой Герона.

Кроме того, тождество из предыдущего упражнения доказывает эквивалентность формул (1) и (2).

Упражнение 7 [11, 1988 год, 1094]. Пусть a, b, c — неотрицательные числа.

а) Докажите, что из неравенства $a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ следует неравенство $a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+ac+bc)$.

б) Верно ли обратное, т. е. следует ли из второго неравенства первое?

(*В. А. Сендеров*)

§ 4. Доказательство Формулы

Ещё один «особый» случай Формулы получается, когда точка D совпадает с одной из вершин треугольника ABC. Этот случай даже проще предыдущего. Например, если $D=C$, то $w=0$, $v=a$, $u=b$ и $d=R$. Поэтому левая часть Формулы (1) обращается в нуль, и в правой части этой формулы сразу две скобки равны нулю.

Таким образом, мы установили, что Формулы (1) и (2) верны для четырёх специально выбранных точек. Дальнейший план таков. Сначала мы установим, что эти формулы верны для точек, лежащих на нескольких специально выбранных прямых. А затем рассмотрим уже общий случай. Начнём с общих замечаний.

Рассмотрим произвольную прямую l в плоскости треугольника ABC и введём на ней координату, равную расстоянию от некоторой фиксированной точки P (со знаком). Если точка D имеет координату t, то расстояния u, v, w и d будут функциями t.

Посмотрим, как выглядят эти функции. Если h — расстояние от точки A до прямой l, а e — координата основания перпендикуляра, опущенного из точки A на l, то по теореме Пифагора

$$u = \sqrt{h^2 + (t-e)^2}.$$

Для нас важны два обстоятельства. Во-первых, u^2 — это приведённый квадратный трёхчлен. А во-вторых, эта функция всюду дифференцируема. (Эти утверждения верны и когда точка A лежит на прямой l. Для этого случая рассуждения лучше провести отдельно, но они совсем простые). То же, разумеется, верно и для функций v, w и d.

И ещё одно простое замечание. Пусть у нас есть функция

$$f(t) = f_1(t)f_2(t)f_3(t),$$

причём все три функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ дифференцируемы, а две последние из них обращаются в нуль при $t = t_0$. Тогда производная функции $f(t)$ равна нулю при $t = t_0$. Действительно, согласно правилу Лейбница

$$f'(t) = f_1'(t)f_2(t)f_3(t) + f_1(t)f_2'(t)f_3(t) + f_1(t)f_2(t)f_3'(t).$$

Пусть теперь прямая l проходит через точки B и C. Тогда в левой части Формулы (2) стоит многочлен четвёртой степени (от переменной t) со старшим коэффициентом $16S^2$. И в правой части этой Формулы стоит многочлен четвёртой степени. Его старший коэффициент равен

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

т. е. тоже $16S^2$.

Если t_C — координата точки C, то многочлен $d^2 - R^2$ обращается в нуль при $t = t_C$. Поэтому $t = t_C$ — кратный корень левой части Формулы (2). А поскольку правая часть этой Формулы равна правой части Формулы (1), она тоже обращается в нуль при $t = t_C$, причём вместе со своей производной (в силу замечания, сделанного выше). Поэтому $t = t_C$ — кратный корень правой части формулы (2).

Аналогичным образом доказывается, что если t_B — координата точки B, то $t = t_B$ — кратный корень и левой, и правой части Формулы (2).

Подведём итог. В левой и правой частях Формулы (2) стоят многочлены четвёртой степени. У этих многочленов одинаковые старшие коэффициенты и два общих кратных корня (т. е. как минимум четыре общих корня с учётом кратности). Следовательно, эти многочлены совпадают. А значит, Формулы (1) и (2) верны для любой точки, лежащей на прямой BC. То же, конечно, верно и для прямых AB и AC.

Пусть теперь прямая l проходит через точки O и C. Как и выше, можно заметить, что если t_C — координата точки C, то $t = t_C$ — общий кратный корень левой и правой частей Формулы (2). В предыдущем разделе показано, что эта Формула выполняется и в точке O. А ещё она верна в точке пересечения прямых OC и AB. Таким образом, в левой и правой частях Формулы (2) стоят многочлены четвёртой степени, имеющие с учётом кратности четыре общих корня. А поскольку их старшие коэффициенты совпадают, эти многочлены тождественно равны.

Таким образом, Формулы (1) и (2) верны для точек, лежащих на прямых OC, OB и OA.

Теперь можно рассмотреть общий случай. Фиксируем произвольную точку D и проведём через неё прямую l, не параллельную «выделенным» прямым OA, OB, OC, AB, AC, BC. Если мы введём на этой прямой координату t, то в левой и правой частях Формулы (2) будут стоять многочлены четвёртой степени, которые совпадают в шести точках пересечения прямой l с шестью «выделенными» прямыми. Значит, они совпадают во всех точках, в частности в точке D. Наша Формула доказана!

Другое алгебраическое доказательство Формулы можно найти в книге российского академика Якова Викторовича Успенского [10]. Оно, пожалуй, покороче, но использует теорию определителей. Ещё одно доказательство можно получить, сочетая векторную алгебру с идеями книги [2] (см. там задачу 183).

Часть 2. Содержание

Все рассматриваемые далее геометрические следствия доказанной Формулы имеют другие, в том числе и геометрические доказательства (см., например, [1, 3, 6, 7]). Многие результаты, используя специальные приёмы, можно доказать очень коротко и красиво. Нас в данном случае больше интересует общий метод, поэтому мы везде приводим алгебраические доказательства.

Есть общий принцип: если задачи из некоторого класса решаются неким универсальным методом, то для любой задачи этого класса, за редким исключением, можно найти другой метод, которым эта задача решается проще. В нашем случае это тоже так. Но разница между «универсальным» и «простым» решением в большинстве случаев оказывается меньше, чем можно было бы ожидать.

§ 5. Теорема Птолемея

В левой части формулы (1) стоит квадрат. Поэтому

$$(au+bv+cw)(au+bv-cw)(au-bv+cw)(-au+bv+cw) \geqslant 0.$$

Числа au, bv и cw положительны, поэтому отрицательной может оказаться не более чем одна скобка в левой части этого неравенства, а именно та, в которую с минусом входит наибольшее из чисел au, bv и cw. Но поскольку произведение неотрицательно, и эта скобка будет неотрицательной.

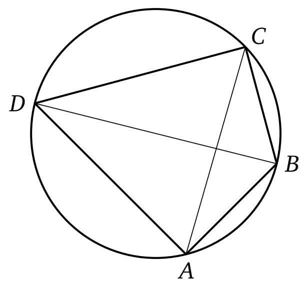

Рис. 3

Итак, при любом положении точки D выполняется неравенство $au+cw \geqslant bv$. Оно носит имя Птолемея.

Пусть точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC. Тогда

$$(au+bv+cw)(au+bv-cw)(au-bv+cw)(-au+bv+cw) = 0. \qquad (5)$$

Выясним, какая из скобок в этом равенстве обращается в нуль. Для определённости будем считать, что отрезки AC и BD пересекаются в своей внутренней точке (рис. 3).

Упражнения

8. Не ограничивая общности, можно считать, что к стороне AB примыкают углы четырёхугольника $ABCD$, большие или равные $\pi/2$. В этом предположении докажите, что последняя скобка в формуле (5) строго положительна.

9. При том же предположении докажите, что и вторая скобка в формуле (5) положительна.

Указание. Рассмотрите отдельно случаи $w \leqslant b$ и $w > b$.

10. Докажите знаменитую *теорему Птолемея*: произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

11. Выведите из теоремы Птолемея теорему Пифагора.

12. Выведите из теоремы Птолемея теорему косинусов.

13. Получите из теоремы Птолемея формулу суммы синусов двух углов.

14. Докажите, что из всех треугольников с данной стороной AC и данным углом при вершине B наибольший периметр имеет равнобедренный.

15. Постройте вписанный четырёхугольник с заданными сторонами.

16 (VI Московская математическая олимпиада, 1940 г., второй тур, 7–8 класс, задача 2). Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB. Доказать, что $DC = AD + BD$.

§ 6. Изопериметрическое неравенство

Остановимся на двух менее очевидных следствиях результатов, полученных в предыдущем параграфе. Начнём с неравенства Птолемея.

Докажем, что среди всех четырёхугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный.

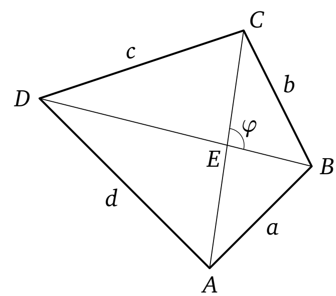

Рис. 4

Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, E — точка пересечения его диагоналей AC и BD, $\angle BEC = \varphi$ (рис. 4).

По теореме косинусов для треугольников AEB, BEC, CED и AED получим

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = \\ = 2(EA \cdot EB + EB \cdot EC + EC \cdot ED + ED \cdot EA)\cos\varphi.$$

Отсюда

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2(EA + EC)(EB + ED)\cos\varphi = 2AC \cdot BD\cos\varphi.$$

Поэтому для площади S четырёхугольника $ABCD$ имеем равенство

$$S^2 = \left(\frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\varphi\right)^2 = \frac{1}{4}AC^2 \cdot BD^2 - \frac{1}{16}(AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2.$$

Следовательно, по неравенству Птолемея

$$S^2 \leqslant \frac{1}{4}(AB \cdot CD + BC \cdot DA)^2 - \frac{1}{16}(AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда четырёхугольник вписанный.

Обозначив $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$, $d=DA$, получим формулу для площади вписанного четырёхугольника

$$16S^2=4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2.$$

Имея опыт доказательства формулы Герона, можно предположить, что

$$4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2= \\ =(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d). \quad (6)$$

Для доказательства этого тождества заметим, что при $d=c$ и $d=-c$ получаем легко проверяемые тождества.

Упражнение 17. Выпишите их явно и докажите.

А при $d=a$, $d=-a$, $d=b$ и $d=-b$ получаются тождества, отличающиеся от этих двух только заменой переменных.

Таким образом, разность левой и правой частей тождества (6) — это многочлен от переменной d, имеющий шесть корней, степень которого не превосходит четырёх. Значит, он тождественно равен нулю, что и требовалось доказать.

Мы получили формулу Брахмагупты для площади вписанного четырёхугольника:

$$16S^2=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d).$$

В силу неравенства Коши отсюда следует $16S^2\leqslant(a+b+c+d)^4$, причём равенство достигается, если числа $a+b+c-d$, $a+b-c+d$, $a-b+c+d$ и $-a+b+c+d$ равны между собой, т. е. четырёхугольник — квадрат.

Подведём итоги. Площадь произвольного четырёхугольника меньше или равна площади вписанного четырёхугольника с теми же сторонам, а значит, с тем же периметром. А площадь вписанного четырёхугольника не превосходит площади квадрата с тем же периметром. Следовательно, среди всех четырёхугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Упражнения

18. Докажите тождество (6), используя формулу разности квадратов.

19. Докажите, что среди всех треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный.

20. Докажите тождество

$$4(ac-bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2= \\ =(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(-a+b+c-d).$$

21. Разумеется, при фиксированном треугольнике ABC расстояния u, v, w от точки D до его вершин не могут быть независимыми. Данную зависимость можно выразить как равенство нулю некоторого многочлена от переменных a, b, c, u, v, w. Доказанных тождеств достаточно, чтобы убедиться в этом. Проверьте!

§ 7. Формула Карно

Пусть задан треугольник ABC, d_a, d_b, d_c — расстояния от центра O описанной окружности до сторон $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$ соответственно.

Докажем, что если треугольник остроугольный, то

$$d_a + d_b + d_c = R + r.$$

Пусть D_a, D_b, D_c — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны BC, AC, AB.

Применим равенство Птолемея к четырёхугольнику AD_bOD_c:

$$AO \cdot D_bD_c = AD_b \cdot OD_c + AD_c \cdot OD_b,$$

или

$$R \cdot \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \cdot d_c + \frac{c}{2} \cdot d_b.$$

Аналогично

$$R \cdot \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \cdot d_c + \frac{c}{2} \cdot d_a \quad \text{и} \quad R \cdot \frac{c}{2} = \frac{b}{2} \cdot d_a + \frac{a}{2} \cdot d_b.$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$R \cdot \frac{a+b+c}{2} = d_a \frac{b+c}{2} + d_b \frac{a+c}{2} + d_c \frac{a+b}{2},$$

или

$$Rp = (d_a + d_b + d_c)p - \left(\frac{d_a a}{2} + \frac{d_b b}{2} + \frac{d_c c}{2}\right).$$

Остаётся заметить, что

$$\frac{d_a a}{2} + \frac{d_b b}{2} + \frac{d_c c}{2}$$

— это площадь треугольника, равная pr. Отсюда следует нужное равенство $d_a + d_b + d_c = R + r$.

Если угол C треугольника тупой, то выполнено равенство

$$d_a + d_b - d_c = R + r.$$

Упражнения

22. Докажите это равенство.

23. Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

24. Если вписанный многоугольник разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники, то сумма радиусов вписанных в эти треугольники окружностей не зависит от способа разрезания.

25 (П. Эрдёш). Пусть h — длина наибольшей высоты остроугольного треугольника. Докажите, что $h \geqslant R + r$.

§ 8. Теорема Эйлера

Но вернёмся к нашей Формуле. Опустим из точки D перпендикуляры DD_a, DD_b, DD_c на прямые BC, AC, AB соответственно.

Упражнение 26. Докажите, что стороны треугольника $D_aD_bD_c$ равны $\frac{au}{2R}$, $\frac{bv}{2R}$, $\frac{cw}{2R}$ (используются обозначения рис. 1, с. 84).

По формуле Герона площадь Σ треугольника $D_aD_bD_c$ удовлетворяет условию

$$256\Sigma^2R^4 = (au + bv + cw)(au + bv - cw)(au - bv + cw)(-au + bv + cw).$$

Но тогда по Формуле (1) имеем

$$256\Sigma^2R^4 = 16S^2(d^2 - R^2)^2.$$

Отсюда $\Sigma = \frac{S}{4R^2}|d^2 - R^2|$. Этот результат принадлежит Эйлеру.

Вот первое следствие этого результата.

Пусть точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\Sigma = 0$, т. е. точки D_a, D_b, D_c лежат на одной прямой. Эта прямая называется прямой Симсона точки D относительно треугольника ABC.

§ 9. Ещё одна формула Эйлера

Получим ещё одно следствие. Но сначала простой вспомогательный результат.

Упражнение 27 (LX Московская математическая олимпиада, 1997 г., 11 класс, задача 1). На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A' и B' соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна

$$\frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA'}{4R},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

(*А. Заславский*)

Указание. Воспользуйтесь формулой $S = \frac{abc}{4R}$.

Применим этот результат к случаю, когда D_c, D_a, D_b — проекции центра I вписанной окружности треугольника ABC. Тогда

$$AD_b = AD_c = p - a, \quad BD_a = BD_c = p - b, \quad CD_a = CD_b = p - c.$$

Соответственно

$$x = \frac{p-a}{c}, \quad 1-x = \frac{p-b}{c}, \quad y = \frac{p-b}{a}, \quad 1-y = \frac{p-c}{a}, \quad z = \frac{p-c}{b}, \quad 1-z = \frac{p-a}{b}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Sigma}{S} = 2\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = 2\frac{S^2}{pabc} = 2\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{abc} = 2r \cdot \frac{1}{4R}.$$

По теореме Эйлера из § 8 для $d = IO$ имеем

$$d^2 = R^2 - 4R^2\frac{\Sigma}{S}$$

(в этом случае $d < R$). Окончательно имеем

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Это знаменитая формула Эйлера. Иногда её записывают в виде

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}.$$

Упражнения

28. Докажите эквивалентность этих двух формул.

29. Докажите, что площадь Σ треугольника, вершинами которого являются основания биссектрис треугольника ABC, равна

$$\frac{2Sabc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

30. Докажите, что площадь Σ треугольника, образованного основаниями высот треугольника ABC, равна $2S\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, где α, β, γ — углы треугольника.

31. Найдите расстояние между ортоцентром H треугольника ABC и центром O описанной около него окружности.

32. Докажите, что площадь Σ треугольника, образованного проекциями точки пересечения медиан треугольника ABC на его стороны, равна

$$\frac{4}{9}S^3\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}.$$

33. Докажите, что квадрат расстояния между точкой G пересечения медиан треугольника ABC и центром O описанной около него окружности равен

$$R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

34 (Олимпиада им. Шарыгина, 2006 г., заочный тур, задача 21). На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что для площадей соответствующих треугольников выполняется неравенство:

$$S_{ABC}S^2_{A'B'C'}\geqslant 4S_{AB'C'}S_{A'BC'}S_{A'B'C}.$$

(*А. Заславский*)

35. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что площадь хотя бы одного из треугольников $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ не превосходит площади треугольника $A'B'C'$.

36. Докажите, что диаметр вписанной окружности треугольника не превосходит радиуса описанной окружности того же треугольника.

§ 10. Теорема Понселе для треугольника

Теорема Понселе для случая треугольника в известном смысле обратна к теореме Эйлера из § 9. Как часто бывает в геометрии, обратное утверждение удобно доказывать с использованием прямого. В данном случае это тоже так. Но нужна ещё алгебраическая техника.

Интересующая нас теорема звучит следующим образом.

Теорема Понселе. *Пусть заданы окружность Ω радиуса R и окружность ω радиуса r, расстояние d между центрами которых удовлетворяет условию $d^2=R^2-2Rr$. Тогда для любой точки A окружности Ω найдутся такие точки B и C, что треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан около окружности ω.*

Доказательство. Пусть A — произвольная точка окружности Ω. Поскольку

$$d^2=R^2-2Rr<R^2-2Rr+r^2=(R-r)^2,$$

выполняется неравенство $d < R - r$. Значит, вся окружность Ω, и в частности точка A, лежит вне окружности ω.

Проведём из точки A две касательные к окружности ω и обозначим точки их пересечения с окружностью Ω, отличные от A, через B и C. Пусть вписанная окружность ϖ треугольника ABC имеет центр J и радиус ρ. Нужно доказать, что окружности ω и ϖ совпадают.

Центр I окружности ω и точка J лежат на биссектрисе l угла BAC. Будем характеризовать положение точки T на этой прямой её расстоянием t от точки A.

Пусть O — центр окружности Ω. Рассмотрим функцию

$$f(t) = R^2 - 2Rh - TO^2,$$

где h — расстояние от точки T до прямой AB. Очевидно, величина h линейно зависит от t (а именно, $h = t \sin\delta$, где $\delta = \angle BAI$). Если обозначить через e расстояние от точки A до основания перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую l, а через g — длину этого перпендикуляра, то по теореме Пифагора $TO^2 = (t-e)^2 + g^2$. Поэтому $f(t)$ — квадратный трёхчлен.

По условию он обращается в нуль, когда точка T совпадает с точкой I (в этом случае $h = r$, а $TO^2 = R^2 - 2Rr$). Согласно формуле Эйлера он обращается в нуль, когда точка T совпадает с точкой J (в этом случае $h = \rho$, а $TO^2 = R^2 - 2R\rho$). И ещё, очевидно, он обращается в нуль, когда точка T совпадает с точкой A (теперь $h = 0$, а $TO = R$).

Поскольку многочлен $f(t)$ отличен от тождественного нуля, две из этих трёх точек должны совпадать. Точка I лежит внутри окружности ω, а точка A — вне её. Значит, I отлична от A. По аналогичным причинам J отлична от A. Значит, I совпадает с J.

Окружности ω и ϖ имеют общий центр и касаются сторон угла BAC. Значит, они совпадают. Теорема доказана. $\square$

§ 11. Формула Стюарта

Вновь вернёмся к нашей Формуле. Если точка D лежит на прямой BC, то её положение однозначно определяется расстояниями $BD = v$ и $CD = w$. В частности, расстояния v и w определяют расстояние $AD = u$. Попробуем найти эту зависимость.

Упражнения

37. Чему равна в рассматриваемом случае степень точки D относительно описанной окружности треугольника ABC?

38. Выведите из Формулы (6) формулу Стюарта:

$$u^2 = \frac{b^2v + c^2w - avw}{a}.$$

Указание. Выразите площадь треугольника ABC через длины его сторон и разложите разность левой и правой частей Формулы на множители.

39. Докажите, что длина медианы треугольника со сторонами a, b, c, проведённой к стороне a, равна

$$\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

40. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, D — произвольная точка. Докажите, что

$$9DM^2 = 3(DA^2 + DB^2 + DC^2) - (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Указание. Докажите это индуктивно: сначала для случая, когда точка D совпадает с вершиной или серединой стороны треугольника, потом для точек D, лежащих на прямых, содержащих стороны треугольника, и, наконец, для точек общего положения.

41 (Г. В. Лейбниц). Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC, D — произвольная точка. Докажите, что

$$3DG^2 = (DA^2 + DB^2 + DC^2) - (AG^2 + BG^2 + CG^2).$$

42. Известны стороны треугольника ABC и расстояния от точки D до вершин A, B и C. Найдите расстояние от точки D до ортоцентра.

43. Докажите, что длина биссектрисы треугольника со сторонами a, b, c, проведённой к стороне a, равна

$$\frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}.$$

44. Зная стороны треугольника, найдите расстояния от центра вписанной в него окружности до его вершин.

45. Зная стороны треугольника, найдите расстояние от точки пересечения медиан до центра вписанной окружности этого треугольника.

46. Докажите, что расстояние от центра вписанной окружности треугольника до его ортоцентра равно $2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C$.

47 (Э. Чезаро). Докажите, что площадь треугольника, вершинами которого являются основания биссектрис, равна произведению длин биссектрис, делённому на удвоенный периметр исходного треугольника.

48. Зная стороны треугольника ABC и расстояния от точки D до вершин A и B, найдите расстояние от точки D до точки касания вписанной окружности треугольника со стороной AB.

49. Известны стороны треугольника ABC и расстояния от точки D до вершин A, B и C. Найдите степень точки D относительно вписанной окружности треугольника.

§ 12. Теорема Пурсера

Докажем следствие теоремы Птолемея, являющееся одновременно её обобщением.

Теорема Пурсера. *Пусть даны треугольник ABC и окружность ω. Обозначим через x, y, z длины касательных, проведённых из точек A, B, C к окружности ω. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда сумма двух из чисел ax, by, cz равна третьему числу.*

Доказательство. Пусть окружность ω касается описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D. Рассмотрим случай, когда окружность ω лежит внутри окружности Ω (рис. 5).

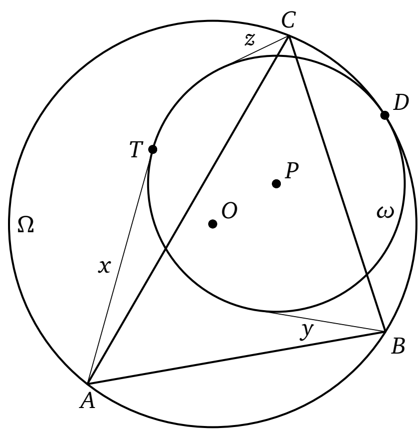

Рис. 5

Пусть ρ — радиус окружности ω, P — её центр, AT — касательная к ней, а остальные обозначения стандартны.

По теореме косинусов для треугольников AOD и AOP имеем

$$AD^2 = u^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\varphi,$$

$$AP^2 = R^2 + (R-\rho)^2 - 2R(R-\rho)\cos\varphi,$$

где φ — величина угла AOD. Отсюда

$$AP^2 = 2R^2 - 2R\rho + \rho^2 - (2R^2 - u^2)\frac{R-\rho}{R} = \rho^2 - u^2\frac{\rho}{R} + u^2.$$

Теперь по теореме Пифагора

$$AT^2 = x^2 = AP^2 - \rho^2 = u^2\Big(1 - \frac{\rho}{R}\Big), \quad \text{или} \quad x = u\sqrt{1 - \frac{\rho}{R}}.$$

Аналогично

$$y = v\sqrt{1 - \frac{\rho}{R}}, \quad z = w\sqrt{1 - \frac{\rho}{R}}.$$

Если точка D расположена так, что отрезки AD и BC пересекаются во внутренней точке, то $au = bv + cw$. Это равенство отличается от равенства $ax = by + cz$ только множителем $\sqrt{1-\rho/R}$.

Упражнение 50. Рассмотрите самостоятельно случай, когда окружность ω касается окружности Ω внешним образом.

Обратное утверждение следует из прямого, и вновь в этом помогает алгебра.

Пусть сумма двух из чисел ax, by, cz равна третьему числу. Тогда

$$\begin{aligned}(ax + by + cz)(ax + by - cz)(ax - by + cz)(-ax + by + cz) = \\ = 2(a^2x^2b^2y^2 + a^2x^2c^2z^2 + b^2y^2c^2z^2) - (a^4x^4 + b^4y^4 + c^4z^4) = 0.\end{aligned}$$

Обозначим расстояния AP, BP, CP через x_0, y_0, z_0. Тогда по теореме Пифагора

$$x^2 = x_0^2 + \rho^2, \quad y^2 = y_0^2 + \rho^2, \quad z^2 = z_0^2 + \rho^2$$

и, значит,

$$\begin{aligned}2\big(a^2(x_0^2+\rho^2)b^2(y_0^2+\rho^2) + \\ + a^2(x_0^2+\rho^2)c^2(z_0^2+\rho^2) + b^2(y_0^2+\rho^2)c^2(z_0^2+\rho^2)\big) - \\ - \big(a^4(x_0^2+\rho^2)^2 + b^4(y_0^2+\rho^2)^2 + c^4(z_0^2+\rho^2)^2\big) = 0.\end{aligned}$$

При фиксированных положениях точек A, B, C и P это биквадратное уравнение относительно ρ. Такое уравнение имеет не более двух положительных корней. Но в силу доказанного «прямого» утверждения два корня мы знаем. В самом деле, если ω' и ω'' — две окружности с центром P, касающиеся окружности Ω, то их радиусы — корни данного уравнения. Значит, окружность ω совпадает с одной из окружностей ω' или ω'', что и требовалось доказать. □

Упражнение 51. Рассмотрите самостоятельно случай, когда точка P — центр окружности Ω.

§ 13. Теорема Фейербаха

Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB, а A_0, B_0, C_0 — середины этих сторон. Тогда $AC_1 = p - a$, $AC_0 = c/2$ и

$$z = C_0C_1 = |AC_1 - AC_0| = \left|\frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2}\right| = \frac{|a-b|}{2}.$$

Аналогично

$$x = A_0A_1 = \frac{|b-c|}{2}, \quad y = B_0B_1 = \frac{|a-c|}{2}.$$

Если $a \geqslant b \geqslant c$, то

$$2(ax - by + cz) = a(b-c) - b(a-c) + c(a-b) = 0.$$

Аналогично проверяется, что и при других соотношениях сторон треугольника ABC сумма двух из чисел ax, by, cz равна третьему числу.

Следовательно, по теореме Пурсера, применённой к треугольнику $A_0B_0C_0$ и вписанной окружности треугольника ABC, вписанная окружность треугольника ABC касается описанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$ (её называют окружностью девяти точек треугольника ABC).

Это является содержанием теоремы Фейербаха.

Упражнение 52. Докажите, что окружность девяти точек треугольника ABC касается его вневписанных окружностей.

§ 14. Обобщение формулы

Докажем ещё одно следствие нашей Формулы, являющееся одновременно её обобщением.

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC; S — его площадь; u, v, w — расстояния от точек A, B, C до точки D; ω — окружность с центром в точке D радиуса ρ; x, y, z — длины касательных, проведённых из точек A, B, C к окружности ω; d — расстояние от точки D до центра описанной окружности Ω треугольника ABC; R — радиус окружности Ω.

Рассмотрим выражение

$$2(a^2x^2b^2y^2 + a^2x^2c^2z^2 + b^2y^2c^2z^2) - (a^4x^4 + b^4y^4 + c^4z^4).$$

По теореме Пифагора его можно записать как многочлен от переменной ρ^2:

$$\varphi(\rho^2) = 2\big(a^2(u^2-\rho^2)b^2(v^2-\rho^2) + a^2(u^2-\rho^2)c^2(w^2-\rho^2) + \\ + b^2(v^2-\rho^2)c^2(w^2-\rho^2)\big) - \big(a^4(u^2-\rho^2)^2 + b^4(v^2-\rho^2)^2 + c^4(w^2-\rho^2)^2\big).$$

Очевидно, это квадратный трёхчлен. По теореме Пурсера он обращается в нуль при $\rho^2 = (d-R)^2$ и $\rho^2 = (d+R)^2$. Значит, его можно записать в виде

$$\varphi(\rho^2) = k(\rho^2 - (d-R)^2)(\rho^2 - (d+R)^2),$$

где k — некоторая константа.

Для её определения есть ещё одно известное значение многочлена φ : при $\varrho = 0$ согласно основной Формуле имеем $\varphi(0) = 16S^2(d^2 - R^2)^2$. Отсюда $k = 16S^2$.

Таким образом,

$$16S^2(\rho^2 - (d-R)^2)(\rho^2 - (d+R)^2) = \\ = 2(a^2x^2b^2y^2 + a^2x^2c^2z^2 + b^2y^2c^2z^2) - (a^4x^4 + b^4y^4 + c^4z^4),$$

или

$$16S^2(\rho^2 - (d-R)^2)(\rho^2 - (d+R)^2) = \\ = (ax + by + cz)(ax + by - cz)(ax - by + cz)(-ax + by + cz).$$

Очевидно, наша основная Формула получается из этой при $\rho = 0$.

Полезно преобразовать левую часть. Раскрыв скобки, получим

$$(\rho^2 - (d-R)^2)(\rho^2 - (d+R)^2) = \rho^4 + R^4 + d^4 - 2(\rho^2R^2 + \rho^2d^2 + R^2d^2).$$

Справа стоит знакомое выражение — это умноженная на минус 16 площадь «треугольника» со сторонами ρ, R и d. Разумеется, переменные ρ, R и d могут меняться достаточно произвольно и далеко не всегда из отрезков длиной ρ, R и d можно составить треугольник, но алгебраическая форма остаётся хорошо знакомой.

Упражнение 53 (Дж. Кэйси). Даны четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. Пусть δ_{ij} — длина общей внешней касательной к окружностям ω_i и ω_j. Докажите, что окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 касаются внешним образом некоторой окружности Ω тогда и только тогда, когда

$$\delta_{12}\delta_{34} \pm \delta_{13}\delta_{34} \pm \delta_{14}\delta_{23} = 0$$

(при некотором выборе знаков плюс и минус).

§ 15. Ещё раз о формуле Эйлера

С помощью только что доказанного результата можно, например, ещё раз вывести формулу Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Длины касательных, проведённых из вершин треугольника ко вписанной в него окружности, равны $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$.

Упражнения

54. В этих переменных обобщённая формула из предыдущего раздела, применённая к вписанной и описанной окружностям треугольника, имеет вид

$$16S^2(r^2-(d-R)^2)(r^2-(d+R)^2)=16(xyz)^2(xy+xz+yz).$$

Убедитесь в этом.

55. Выведите из этой формулы равенство

$$d^4+R^4+r^4-2d^2R^2-2d^2r^2-2R^2r^2=r^3(4R+r).$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестной d^2. Его дискриминант равен

$$4\big((R^2+r^2)^2-(R^2-r^2)^2+r^3(4R+r)\big)=4r^2(2R+r)^2.$$

Поэтому уравнение имеет два корня $d^2=R^2-2Rr$ и $d^2=R^2+2Rr+2r^2$.

Вписанная окружность лежит внутри описанной, значит, внутри описанной окружности лежит и центр вписанной. Поэтому $d^2<R^2$. Отсюда получаем окончательный результат: $d^2=R^2-2Rr$.

Упражнение 56. Разберитесь, откуда взялся «лишний» корень?

§ 16. Вписанно-описанные четырёхугольники

Пусть четырёхугольник вписан в окружность Ω радиуса R и описан около окружности ω радиуса r. Тогда согласно теореме Фусса расстояние d между центрами этих окружностей удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}. \tag{7}$$

Это уже достаточно сложная теорема. Покажем, как её можно доказать с использованием обобщённой Формулы. Для этого преобразуем доказываемое равенство.

Приведём разность левой и правой частей к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}-\frac{1}{r^2}=\frac{2(R^2r^2+R^2d^2+r^2d^2)-R^4-d^4}{(R+d)^2(R-d)^2r^2}. \tag{8}$$

Нужно доказать, что

$$R^4+d^4-2(R^2r^2+R^2d^2+r^2d^2)=0.$$

Здесь уже хорошо просматривается левая часть обобщённой формулы (без одного слагаемого).

Пусть задан вписанно-описанный четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $a=BC$, $w=CD$, $u=DA$, $c=AB$ и диагоналями $b=AC$ и $v=BD$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Поэтому для доказательства нужного результата можно выразить через стороны четырёхугольника радиус r, площадь S треугольника ABC и длины касательных x, y, z, проведённых из точек A, B и C к окружности ω, и применить обобщённую Формулу. Ввиду сказанного выше, нужно будет доказать, что

$$16S^2r^4 = (ax+by+cz)(ax+by-cz)(ax-by+cz)(-ax+by+cz). \quad (9)$$

Приступим к реализации этой программы. Первый шаг простой и стандартный.

Во-первых, четырёхугольник $ABCD$ вписанный, поэтому применима формула Брахмагупты, согласно которой площадь Σ этого четырёхугольника удовлетворяет равенству

$$16\Sigma^2 = (a+c+u-w)(a+c+w-u)(a+u+w-c)(c+u+w-a).$$

Во-вторых, четырёхугольник описанный, значит, $a+u=c+w$, откуда $\Sigma^2 = acuw$. В-третьих, для описанного четырёхугольника верна простая формула $2\Sigma = (a+c+u+w)r$. Отсюда

$$r^2 = \frac{4acuw}{(a+c+u+w)^2}.$$

Найдём сторону b треугольника ABC. По теореме Птолемея $bv=au+cw$. С другой стороны, сравнивая площади, легко установить, что

$$\frac{b}{v} = \frac{aw+cu}{ac+uw}.$$

Отсюда

$$b^2 = \frac{(au+cw)(aw+cu)}{ac+uw}.$$

Теперь для вычисления площади S можно использовать формулу Герона. Но в данном случае удобна не аддитивная и не мультипликативная, а «промежуточная» форма. Перепишем её в виде

$$16S^2 = \Big(((a+c)+b)((a+c)-b)\Big)\Big((b+(a-c))(b-(a-c))\Big).$$

Теперь можно написать

$$16S^2 = ((a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2).$$

Упражнение 57. Докажите, что

$$S^2 = \frac{a^3c^3uw}{(ac+uw)^2}.$$

Займёмся вычислением длин касательных x, y, z. Не ограничивая общности, можно считать, что A — меньший угол четырёхугольника $ABCD$, а B — меньший из двух соседних с ним углов. Поскольку четырёхугольник вписанный, оба эти угла не превосходят $\pi/2$. Если оба угла равны $\pi/2$, то $ABCD$ — прямоугольник. А единственный описанный прямоугольник — это квадрат. Для него доказываемая формула (7) проверяется легко. Поэтому можно считать, что сумма углов DAB и ABC меньше π.

В таком случае лучи AD и BC пересекаются. Обозначим точку их пересечения буквой E, а длины отрезков AE и BE — буквами e и f.

Упражнение 58. Докажите, что

$$x = \frac{cu}{c+w}, \quad y = \frac{ca}{c+w}, \quad z = a - y = \frac{aw}{c+w}.$$

Теперь можно заняться правой частью обобщённой формулы.

Упражнение 59. Докажите, что правая часть формулы (9) равна

$$\frac{a^4c^4 \cdot 4u^2w^2 \cdot 4acuv}{(c+w)^4(ac+uw)^2}.$$

Указание. Здесь опять удобнее «промежуточная» форма. Как нужно разбить четыре скобки в правой части формулы (9) на пары?

Как следует из вышесказанного, левая часть формулы (9) равна

$$16\frac{a^3c^3uw}{(ac+uw)^2} \cdot \frac{16(acuw)^2}{(a+c+u+w)^4}.$$

Остаётся заметить лишь, что, поскольку четырёхугольник $ABCD$ описанный, выполняется равенство $a+c+u+w = 2(c+w)$. Формула доказана.

Упражнение 60. Четырёхугольник вписан в окружность радиуса R и описан около окружности радиуса r. Докажите, что $2r^2 \leqslant R^2$.

§ 17. Теорема Понселе для четырёхугольника

Утверждение, обратное к теореме Фусса и носящее название теоремы Понселе, может быть сформулировано следующим образом.

Пусть расстояние d между центрами окружности Ω с центром O и радиусом R и окружности ω с центром I и радиусом r удовлетворяет условию (7). Тогда для любой точки A окружности Ω найдётся четырёхугольник, вписанный в окружность Ω и описанный около окружности ω, для которого точка A является вершиной.

Доказательство этого утверждения основано на той же идее, что и доказательство аналогичного утверждения для треугольника, но есть и некоторые нюансы. Их мы и обсудим.

В силу формулы (8) условие (7) равносильно условию

$$R^4 + d^4 - 2(R^2r^2 + R^2d^2 + r^2d^2) = 0. \tag{10}$$

Пусть окружности Ω и ω удовлетворяют этому условию.

Упражнение 61. Убедитесь, что окружность ω лежит внутри окружности Ω.

Выберем на окружности Ω произвольную точку A. Проведём из неё касательные к окружности ω, вторично пересекающие окружность Ω в точках B и D соответственно. Пусть точка C движется по дуге BD окружности Ω, не содержащей точки A, от точки B к точке D. Когда C совпадает с B, выполняется неравенство $AB+CD>AD+BC$, а когда точка C дойдёт до точки D, будет выполняться неравенство $AB+CD<AD+BC$. Значит, при некотором промежуточном положении точки C будет выполнено равенство $AB+CD=AD+BC$. Зафиксируем точку C именно в этом положении. Тогда в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность ϖ. Пусть J — её центр, а ρ — её радиус. Нужно доказать, что точка J совпадает с точкой I.

Так как окружности ω и ϖ касаются прямых AB и AD, точки A, I и J лежат на одной прямой l. Введём на этой прямой координату t так, чтобы точка A имела нулевую координату, а координаты точек прямой, лежащих внутри окружности Ω, были положительны.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = R^4 + TO^4 - 2(R^2h^2 + R^2TO^2 + r^2TO^2),$$

где T — точка с координатой t, а h — расстояние от этой точки до прямой AB. Если обозначить через δ угол BAI, а через e обозначить расстояние от точки A до основания перпендикуляра, опущенного из центра O на прямую l, то $h = t\sin\delta$, а $TO^2 = (t-e)^2 + R^2 - e^2$. В отличие от случая треугольника, теперь придётся немножко посчитать.

Используя только что полученные формулы, найдём, что

$$f(t) = ((1-2\sin^2\delta)t^2 - 4e(1-\sin^2\delta)t - 4(R^2\sin^2\delta - e^2)).$$

Как и в случае треугольника, непосредственно проверяется, что координаты точек I и J — положительные корни этого многочлена. Но полученный квадратный трёхчлен в общем случае может иметь два корня. Поэтому тут нужно разобраться подробно.

Коэффициент при t у этого квадратного трёхчлена всегда неположителен. Поэтому если $1-2\sin^2\delta<0$, сумма корней этого трёхчлена неположительна и он имеет не более одного положительного корня. Значит, точки I и J совпадают, и для данного случая теорема доказана.

Случай $1-2\sin^2\delta=0$ ещё проще. Остаётся разобраться со случаем $1-2\sin^2\delta>0$. Будем считать, что $d>0$.

Упражнение 62. Разберите случай $d=0$ самостоятельно.

Пусть прямая OI пересекает окружность Ω в точках B_0 и D_0, причём обозначения выбраны так, что точка I лежит между точками O и B_0 (рис. 6).

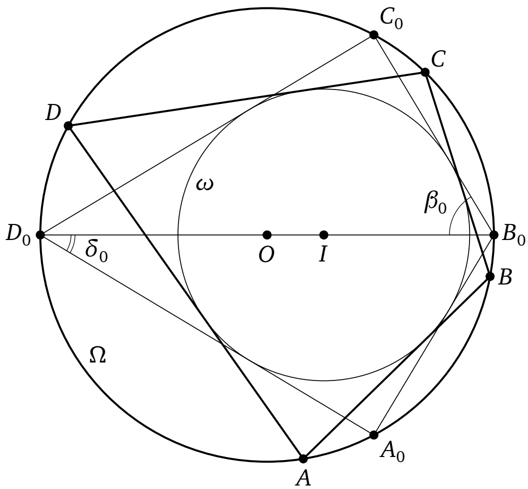

Рис. 6

Синус угла β_0 между касательной к окружности ω, проведённой из точки B_0, и прямой OI равен $r/(R-d)$. Условие (10) может быть переписано в виде

$$R^4+d^4-2R^2d^2=2r^2(R^2+d^2), \quad \text{или} \quad (R-d)^2(R+d)^2=2r^2(R^2+d^2).$$

Поэтому имеем

$$\frac{2r^2}{(R-d)^2}=\frac{(R+d)^2}{R^2+d^2}.$$

Правая часть этой формулы больше 1, значит, $1-2\sin^2\beta_0<0$.

Аналогично доказывается, что удвоенный квадрат синуса угла между касательной, проведённой из точки D_0 к окружности ω, и прямой OI меньше 1.

Упражнение 63. Убедитесь в этом.

Поэтому на (любой) дуге B_0D_0 окружности Ω найдётся такая точка A_0, что угол δ_0 между касательной, проведённой из этой точки к окружности ω, и прямой OI удовлетворяет равенству $1-2\sin^2\delta_0=0$.

Для случая, когда точка A совпадает с точкой A_0, теорема Понселе уже доказана, т. е. существует четырёхугольник с вершиной в этой точке, вписанный в окружность Ω и описанный около окружности ω. Нетрудно видеть, что это четырёхугольник $A_0B_0C_0D_0$, где C_0 — точка, симметричная точке A_0 относительно прямой OI.

Точки A_0 и C_0 разбивают окружность Ω на две дуги: для точек A, лежащих на первой из них, выполняется неравенство $1-2\sin^2\delta<0$, а для точек, лежащих на второй, — неравенство $1-2\sin^2\delta>0$.

Пусть точка A лежит на второй дуге. Проведём из неё касательную к окружности ω. Она пересечёт окружность Ω в некоторой точке B, лежащей на первой дуге. В силу уже доказанного, существует четырёхугольник, вписанный в окружность Ω и описанный около окружности ω, для которого точка B является вершиной. Очевидно, для этого четырёхугольника и точка A будет вершиной. Это завершает доказательство.

§ 18. Вишенка на торт

Всё изложенное выше давно и хорошо известно. А можно ли получить что-нибудь новое? Вот одна из идей.

Известно большое число неравенств для сторон треугольника. Как мы видели в начале второй части (с. 90), выполняются неравенства

$$(au+bv-cw)\geqslant 0,\quad (au-bv+cw)\geqslant 0,\quad (-au+bv+cw)\geqslant 0,$$

т. е. числа au, bv, cw измеряют стороны некоторого треугольника (возможно, вырожденного). Если конкретизировать положение точки D, то можно из известного неравенства получить новое. Вот как это работает в простейшем случае.

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Тогда выполняются неравенства $|a-b|<c$, $|a-c|<b$, $|b-c|<a$. Возведя эти неравенства в квадрат и сложив, получим

$$|a-b|^2+|a-c|^2+|b-c|^2<a^2+b^2+c^2,$$
$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2<a^2+b^2+c^2,$$

или

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc).$$

А поскольку $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, имеем

$$2(a^2+b^2+c^2) < (a+b+c)^2. \tag{11}$$

Оттолкнёмся от этого неравенства. Выберем на плоскости произвольную точку D, проведём из неё три луча так, чтобы углы между ними были равны $2\pi/3$, и отложим на них отрезки DA, DB, DC длиной u, v, w. Получим треугольник со сторонами $\sqrt{u^2+uv+v^2}$, $\sqrt{u^2+uw+w^2}$, $\sqrt{v^2+vw+w^2}$ (для него точка D является точкой Торичелли). Но тогда и числа $w\sqrt{u^2+uv+v^2}$, $v\sqrt{u^2+uw+w^2}$, $u\sqrt{v^2+vw+w^2}$ выражают длины сторон некоторого треугольника (в данном случае точка D не лежит на описанной окружности, поэтому треугольник невырожденный). Подставив их в только что доказанное неравенство, получим неравенство

$$\begin{aligned}4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+2uvw(u+v+w) <\\ < \left(u\sqrt{v^2+vw+w^2}+v\sqrt{u^2+uw+w^2}+w\sqrt{u^2+uv+v^2}\right)^2,\end{aligned}$$

справедливое для всех положительных чисел u, v, w.

Пусть теперь D — точка пересечения медиан треугольника со сторонами a, b, c. Тогда числа am_a, bm_b, cm_c выражают длины сторон некоторого другого треугольника. Подставим их в наше неравенство и выразим медианы через стороны по формулам

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Получим неравенство

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - \frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4) \leqslant (am_a+bm_b+cm_c)^2,$$

или

$$32S^2 + (a^4+b^4+c^4) < 2(am_a+bm_b+cm_c)^2.$$

Из только что доказанного неравенства можно получить два неравенства, справедливые для всех положительных чисел. Можно использовать стандартную замену переменных $a=x+y$, $b=x+z$, $c=y+z$. А можно выразить длины сторон и медианы треугольника через расстояния от точки Торичелли до его вершин.

Есть ещё два направления для развития этой темы.

Выше для получения новых неравенств использовались точка Торичелли и точка пересечения медиан треугольника. Можно рассмотреть вместо них точки пересечения высот или биссектрис треугольника. Эти случаи несложны, но при этом получаются результаты, которые, пожалуй, проще получить другим способом. Однако можно рассмотреть другие, более экзотические, замечательные точки треугольника: точку Лемуана, точку Нагеля и т. д.

Кроме того, вместо неравенства (11) можно использовать другие неравенства для сторон треугольника. Начать можно с задач М7, М559, М727, М840, М852, М1107, М1317, М1333, М1439 из «Задачника „Кванта“» [11].

Пожалуй, основная проблема состоит в том, что в большинстве случаев получаются достаточно сложные неравенства. Поэтому нужно постараться либо найти случаи, когда получаются неравенства попроще, либо упростить получающиеся неравенства за счёт их ослабления. И то и другое требует определённых усилий. Но это хороший повод освоить алгебраическую технику, которой посвящена данная статья.

Список литературы

[1] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1948.

[2] *Балк М. Б., Болтянский В. Г.* Геометрия масс. М.: Наука, 1987.

[3] *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.

[4] *Гашков С. Б.* Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. М.: МЦНМО, 2006.

[5] *Гельфанд И. М., Шень А.* Алгебра. М.: МЦНМО, 2009.

[6] *Ефремов Д. Д.* Новая геометрия треугольника. М.: Ленанд, 2015.

[7] *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. М.: Учпедгиз, 1962.

[8] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Основы алгебры: Учебник для вузов. М.: Физматлит, 1994.

[9] *Шафаревич И. Р.* Избранные главы алгебры: учебное пособие для школьников. М.: Фонд математического образования и просвещения, 2000.

[10] *Uspensky J. V.* Theory of Equations. New York: McGraw-Hill, 1948.

[11] Задачник «Кванта» по математике.
`http://www.kvant.info/zkm_tex/zkm_main.pdf`

Михаил Александрович Горелов, ФИЦ ИУ РАН

`griefer62@gmail.com`