Современная комбинаторика

Математика раскрасок

А. М. Райгородский

§ 1. Введение

В этой статье мы расскажем о нескольких классических проблемах современной комбинаторики и теории графов, связанных с понятием раскраски. Наверняка многие читатели неоднократно сталкивались с этим понятием. Многие слышали, например, о знаменитой гипотезе четырёх красок: на любой «достаточно хорошей» карте мира страны могут быть так покрашены, чтобы соседние страны имели разные цвета, а всего цветов было не больше четырёх. А ещё многие знают задачу о хроматическом числе плоскости: найти наименьшее число цветов, в которые можно так покрасить всю плоскость, чтобы каждые две точки, расстояние между которыми равно единице, были покрашены в разные цвета (см. [1, 2]).

В этой статье мы расскажем не об этих задачах. Но те задачи, о которых мы поговорим, сейчас играют колоссальную роль в дискретной математике, находятся в самом её центре — на стыке идей и методов. В статье масса красивых рассуждений. Для достижения максимального «катарсиса» полезно владеть основами комбинаторики (см., например, [3–7]), теории графов (см. [8, 9]), теории пределов и асимптотик в дискретном анализе (см. [10]), теории вероятностей (см. [5, 11]) и линейной алгебры (см. [12]). Однако не стоит пугаться такого изобилия предметов. На самом деле от комбинаторики нужны только числа сочетаний (биномиальные коэффициенты), от теории графов — только базовое определение графа, от теории вероятностей — только её комбинаторные аспекты (выбор случайного объекта из конечного множества, бросание

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 27, 2021 (99–127)

монеты, математическое ожидание простейшей случайной величины), от асимптотик — просто понимание, например, того, что $n^2 + n \sim n^2$ при $n \to \infty$ в том смысле, что предел отношения величин $n^2 + n$ и n^2 равен единице (ну, может, чуть посложнее, но мы всё аккуратно и последовательно напомним), от линейной алгебры — только представление о том, что бывает пространство $\mathbb{R}^n$, а в нём векторы, матрицы, скалярные произведения… В общем, изложение будет доступно абсолютно любому закончившему второй курс и очень многим старшеклассникам, обучающимся в кружках, математических классах и всевозможных летних и не только летних олимпиадных и не только олимпиадных школах.

Статья основана на курсе, который автор прочитал в Дубне на летней школе «Современная математика» в июле 2019 года, а также на многочисленных его же лекциях на всевозможных сборах (в «Сириусе», «Команде», «Компьютеррии» и др.), на различных школах (Кировская ЛМШ, Комбинаторика и алгоритмы и др.) и университетах по всей России. Статья является дополненной версией брошюры [13].

§ 2. Задача для затравки

Для затравки рассмотрим следующую задачу. В классе учатся 30 человек. Из них отбираются 5 лучших комбинаторщиков, 5 лучших числовиков, 5 лучших вероятностников и так далее. Всего 15 пятёрок. Конечно, эти пятёрки лучших могут как угодно пересекаться: заранее мы не знаем, кто окажется сильнее в каком из направлений. Вопрос: *всегда ли* можно так рассадить наших 30 школьников по двум кабинетам, чтобы в каждом кабинете был хотя бы один представитель каждой из пятёрок? Например, если все пятёрки совпадают, то, очевидно, рассадка возможна. Но ведь есть огромное количество других вариантов! Может, если пятёрки распределятся более хитро, то окажется, что, как ни рассаживай 30 школьников по двум кабинетам, обязательно найдётся кабинет, в котором одна из пятёрок находится целиком?

Ответ на вопрос всё-таки положительный: да, такая рассадка *всегда* возможна. Решение очень простое и красивое! Оно основано на вероятностном методе в комбинаторике (ср. [14, 15]). В принципе здесь ещё можно было бы обойтись без ссылок на теорию вероятностей, но будет лучше, если мы сразу воспользуемся именно вероятностной терминологией.

Итак, нам даны 15 пятёрок. Обозначим их $M_1, \ldots, M_{15}$. Рассмотрим *случайную* рассадку школьников. Что это значит? Вообще говоря, что угодно, ведь случайность можно определять по-разному. Но мы будем понимать случайность максимально просто: каждый школьник отправляется в первый кабинет с вероятностью $1/2$, и с такой же вероятностью он идёт во второй кабинет; выбор кабинета школьники осуществляют независимо друг от друга. Иными словами, мы как бы 30 раз бросаем симметричную монетку, и если монетка в i-м бросании падает решкой кверху, то i-й школьник идёт в первый кабинет, иначе — во второй. Введём обозначение A_i, $i = 1, \ldots, 15$, для события, состоящего в том, что пятёрка M_i целиком попала в один кабинет. Какова вероятность $\mathrm{P}(A_i)$ этого события? Поскольку выбор производится школьниками независимо, вероятности перемножаются, и мы получаем

$$\mathrm{P}(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}.$$

Теперь изучим вероятность того, что *хотя бы одна* пятёрка целиком сидит в одном кабинете. Разумеется, это вероятность события $\bigcup_{i=1}^{15} A_i$. Ясно, что

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{15} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{15} \mathrm{P}(A_i) = \frac{15}{16} < 1.$$

Значит, с *положительной* вероятностью имеет место противоположное событие, которое состоит в том, что ни одна пятёрка целиком не сидит в одном из кабинетов. Но ведь это ровно то, что нужно! «Ни одна пятёрка целиком не сидит» — это же то же самое, что «в каждом кабинете есть хотя бы один представитель каждой из пятёрок». И это выполнено с положительной вероятностью. Если вероятность рассадки с нужным свойством положительна, то такая рассадка точно есть. Как её искать — другой вопрос. Но задача решена: рассадка есть всегда.

Отметим, что в нашем *решении* нигде не использовался тот факт, что всего школьников именно 30. Соответственно, возникает вопрос: а можно ли, по-прежнему пренебрегая исходным количеством школьников, вместо 15 взять большее число и получить тот же результат с возможностью рассадки? До шестнадцати дотянуть легко. В самом деле, все события A_i имеют непустое пересечение. Заведомо в этом пересечении находится примитивная рассадка, при которой все школьники сидят в первом кабинете. Но тогда вероятность объединения *строго меньше* суммы вероятностей и наш метод снова срабатывает. Уже с семнадцатью такой номер не проходит…

Легко видеть, что для 126 пятёрок ответ уже положительным не является. Странное число, да? Ну, сейчас разберёмся! Мы же вольны в выборе исходного количества школьников. Давайте возьмём *все* пятёрки, какие только можно составить из *девяти* человек. Их в аккурат $126 = C_9^5$. Попробуем теперь рассадить девятерых школьников по двум кабинетам. И вот не тут-то было! При любой рассадке в какой-то кабинет попадёт не менее пяти школьников. Но у нас *каждая* пятёрка сейчас «в деле». Значит, всё плохо и мы имеем пример ситуации, когда ответ на первоначальный вопрос уже не является утвердительным.

Итак, для любых 16 пятёрок ответ утвердительный, но *существуют* 126 пятёрок, для которых ответ отрицательный. Всё это приводит к общей постановке задачи, о которой мы и поговорим в следующем параграфе.

§ 3. Постановка общей задачи

Прежде всего пора перейти от школьников к абстрактным объектам. А именно, введём понятие *гиперграфа*. Оно является прямым обобщением понятия графа. У гиперграфа также есть вершины, образующие некоторое конечное множество V, и рёбра, образующие множество E. Только у гиперграфа в каждом ребре не обязательно две вершины: может быть и больше (рёбра из одной вершины мы исключим из рассмотрения вовсе). Более строго, гиперграф — это пара $H = (V, E)$, где V — некоторое множество, а E — некоторая совокупность подмножеств множества V. Подмножества неупорядоченные (сочетания без повторений), кратных рёбер нет, в каждом ребре хотя бы две вершины. Гиперграф называется *n-однородным*, если в каждом его ребре ровно n вершин. Обыкновенный граф, тем самым, — это 2-однородный гиперграф. А школьники и пятёрки — это 5-однородный гиперграф на тридцати вершинах.

Часто замечают, что у гиперграфа, в отличие от графа, нет естественного «портрета». Действительно, если граф легко изобразить как множество точек на плоскости, соединённых отрезками (или дугами), то попытка сделать то же самое с гиперграфом приводит к странному хитросплетению эдаких «сарделек» (рис. 1). В своих лекциях я часто употребляю слово «сарделька» для обозначения ребра гиперграфа, но картинок не рисую. Мне самому легче представлять себе именно эдакую кастрюльку (множество вершин) с намешанными в ней сардельками-рёбрами. Некоторые «продвинутые пользователи» вспоминают выражение «симплициальный комплекс» (просьба тех, кто не слышал его, не пугаться, так как мы его употреблять не будем). Но (опять же, для тех, кто в теме) симплициальный комплекс — это гиперграф, у которого каждое подмножество каждого ребра

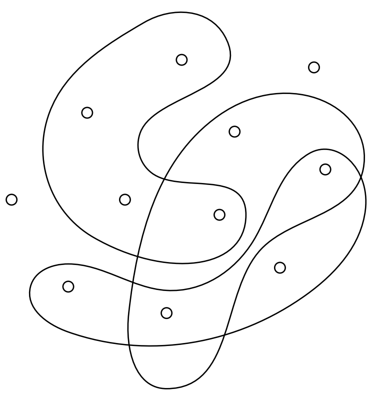

Рис. 1

само является ребром, т. е. это заведомо не однородный гиперграф. В общем, нам это знание не поможет, и мы больше о симплициальных комплексах вспоминать не будем.

Назовём *хроматическим числом* гиперграфа H величину $\chi(H)$, равную наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины гиперграфа, чтобы каждое его ребро было неодноцветным (имело вершины разных цветов). Позвольте, но ведь задача из предыдущего параграфа отлично формулируется в этих терминах! В самом деле, вопрос о пятнадцати пятёрках отныне звучит так: «Верно ли, что у любого 5-однородного гиперграфа с тридцатью вершинами и пятнадцатью рёбрами хроматическое число равно двум?» Рассадка по двум кабинетам и раскраска в два цвета — лишь два способа описания одного и того же явления.

Введём наконец классическую величину $m(n)$, предложенную П. Эрдёшем[1)] и А. Хайналем в 1961 году и равную *наименьшему m, при котором существует n-однородный гиперграф H с m рёбрами и с $\chi(H) > 2$.* Главное — сразу понять, что в терминах этой величины результаты предыдущего параграфа выглядят так:

$$17 \leqslant m(5) \leqslant 126. \tag{1}$$

У любого 5-однородного гиперграфа с шестнадцатью рёбрами хроматическое число равно двум, поэтому $m(5) \geqslant 17$, но существует 5-однородный гиперграф со 126 рёбрами, у которого хроматическое число больше двух, а значит, $m(5) \leqslant 126$.

Очевидное обобщение неравенств (1) приводим ниже:

$$2^{n-1} + 1 \leqslant m(n) \leqslant C_{2n-1}^{n}. \tag{2}$$

Мы не станем доказывать эти неравенства, ведь это совсем лёгкое упражнение. Но мы обсудим вопрос о том, насколько близки друг к другу верхняя и нижняя оценки. В самом деле, хорошо известно тождество (см. [3])

$$C_{2n-1}^{0} + C_{2n-1}^{1} + \ldots + C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^{n} + \ldots + C_{2n-1}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Также известно, конечно, что два центральных слагаемых в этом тождестве являются в нём самыми большими. При этом общее число слагаемых в левой части тождества равно $2n$. Следовательно,

$$\frac{2^{2n-1}}{2n} < C_{2n-1}^{n} < 2^{2n-1}.$$

В итоге понятно, что зазор между оценками в формуле (2) экспоненциальный: нижняя имеет порядок 2^n, а верхняя с точностью до возможного

[1)] В венгерских фамилиях ударение всегда падает на первый слог, поэтому правильно произносить «Э́рдёш».

деления на выражение порядка n имеет порядок 4^n. Зазор великоват, и задача его устранения — одна из серьёзнейших проблем современной экстремальной комбинаторики! (Раздел науки, с которым мы сейчас имеем дело, называется «экстремальной комбинаторикой» не потому, что только экстремалы им занимаются (хотя он и захватывающе красив, и не менее захватывающе труден), но потому, что в его рамках ищутся экстремальные (максимальные или минимальные) комбинаторные величины, среди которых $m(n)$.)

В последующих параграфах мы изучим красивейшие подходы к уменьшению зазора в неравенствах (2), а также рассмотрим ряд различных уточнений и обобщений задачи. Отметим, что нижняя оценка в формуле (2) вероятностная (т. е. она гарантирует наличие раскраски, но не объясняет, как её искать), а верхняя оценка конструктивная (приводится явный пример гиперграфа, не имеющего раскраски в 2 цвета). В § 4 мы значительно улучшим верхнюю оценку, но сделаем это… вероятностным методом, т. е. за улучшение мы заплатим потерей конструктивности.

Напоследок предлагаем читателю самостоятельно ответить на вопрос, чему равно $m(2)$ (совсем просто) и $m(3)$ (сложнее, но посильно). Отметим при этом, что $m(4)$ нашли совсем недавно с помощью весьма нетривиального компьютерного перебора, а величину $m(5)$, которая послужила нам в качестве затравки, никто до сих пор не знает!

§ 4. Верхняя оценка величины $m(n)$

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что для любого $n > n_0$ выполнено неравенство*

$$m(n) \leqslant (1+\varepsilon)\frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n.$$

Теорема замечательна тем, что она даёт оценку величины $m(n)$, которая не сильно отличается от известной нам нижней оценки, примерно в n^2 раз. Это уже не экспоненциальный, но всего лишь квадратичный по n зазор.

Для понимания доказательства потребуется, помимо базовой теории вероятностей, с которой мы уже немного свыклись, знание одного комбинаторного неравенства и одного несложного факта о логарифме.

Неравенство выпуклости. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пусть $v \geqslant n$ — чётное число, $a, b \in \mathbb{N}$ и $a+b=v$. Тогда*

$$\frac{C_a^n + C_b^n}{2} \geqslant C_{v/2}^n = C_{\frac{a+b}{2}}^n.$$

Название неравенства происходит оттого, что оно говорит о выпуклости биномиального коэффициента как функции от нижнего индекса при заданном верхнем индексе. Конечно, не обязательно, чтобы v было чётным. Но так проще для восприятия. Неравенство очень простое, и мы оставляем читателю его доказательство. Заметим, что мы считаем, что $C_m^k = 0$ при $k > m$.

Свойство логарифма. *При всех $x > 0$ выполнено неравенство*

$$\ln(1-x) < -x,$$

и при всех достаточно малых положительных x выполнено неравенство

$$\ln(1-x) > -x-x^2.$$

Доказательство свойства также хорошо известно и может рассматриваться как несложное упражнение.

Доказательство теоремы 1. Для уменьшения громоздкости будем считать, что n чётно. Для нечётных n всё аналогично.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Будем также считать, что $\varepsilon < 1/2$. Положим

$$m = \left[(1+\varepsilon)\frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n\right],$$

где $[\cdot]$ — целая часть. Построим *случайный* n-однородный гиперграф с m рёбрами. Нам нужно будет так осуществить построение, чтобы при всех достаточно больших n с положительной вероятностью в любой раскраске вершин случайного гиперграфа в 2 цвета было хотя бы одно одноцветное ребро, или, что равносильно, чтобы с вероятностью, меньшей единицы, нашлась раскраска вершин случайного гиперграфа в 2 цвета, при которой все рёбра неодноцветны. Положим $v = n^2/2$ и рассмотрим множество вершин $V = \{1, \ldots, v\}$. Случайными будут рёбра. Выберем каждое из них независимо от всех остальных из множества всех n-сочетаний из V с вероятностью $1/C_v^n$. Читатель может спросить: «А что, если появятся кратные рёбра? Ведь при взаимно независимом выборе рёбра могут и совпасть». Но ответ простой. Если какие-то рёбра совпадут, мы их отождествим. Получится гиперграф с ещё меньшим числом рёбер, а нам это только на пользу, раз уж мы доказываем сейчас верхнюю оценку для $m(n)$. Итак, пусть $H = (V, E)$ — это описанный только что случайный гиперграф и $E = \{f_1, \ldots, f_m\}$.

Пусть χ — некоторая раскраска множества V в два цвета. Пусть в ней a красных и b синих вершин. Естественно, $v = a + b$. Обозначим через $A_{\chi,i}$ событие, состоящее в том, что ребро f_i одноцветно в раскраске χ.

Очевидно,
$$\mathrm{P}(A_{\chi,i}) = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_v^n}.$$
За счёт неравенства выпуклости получаем оценку
$$\mathrm{P}(A_{\chi,i}) = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_v^n} \geqslant \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n}.$$
Положим
$$p = \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n}.$$
Тогда вероятность отрицания события $A_{\chi,i}$ (ребро f_i неодноцветно) не больше $1-p$.

Пусть A_χ — событие, при котором все рёбра случайного гиперграфа неодноцветны в раскраске χ. Поскольку рёбра выбирались независимо друг от друга, получаем неравенство
$$\mathrm{P}(A_\chi) \leqslant (1-p)^m.$$

Наконец, интересующее нас событие A — «найдётся раскраска вершин случайного гиперграфа в 2 цвета, при которой все рёбра неодноцветны» — это $\bigcup_\chi A_\chi$. Значит,
$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\Big(\bigcup_\chi A_\chi\Big) \leqslant \sum_\chi \mathrm{P}(A_\chi) \leqslant 2^v(1-p)^m,$$
ведь всего раскрасок множества V в 2 цвета 2^v штук.

Осталось доказать, что $2^v(1-p)^m < 1$ при всех достаточно больших n. Заметим, что
$$2^v(1-p)^m = e^{v\ln 2 + m\ln(1-p)} \leqslant e^{v\ln 2 - pm}$$
в силу свойства логарифма. Теперь оценим величину p снизу, так как она идёт у нас с минусом. Рассмотрим сначала её знаменатель:
$$C_v^n = \frac{v!}{n!(v-n)!} = \frac{v(v-1)\cdot\ldots\cdot(v-n+1)}{n!} = \frac{v^n}{n!}\cdot\Big(1-\frac{1}{v}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{n-1}{v}\Big).$$
Аналогично
$$C_{v/2}^n = \frac{(v/2)^n}{n!}\cdot\Big(1-\frac{2}{v}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{2(n-1)}{v}\Big).$$
Стало быть, p равно величине 2^{1-n}, умноженной на отношение двух произведений, состоящих из $n-1$ скобок каждое. Изучим произведение

в знаменателе. Его надо оценить сверху:

$$\left(1-\frac{1}{v}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{v}\right)=\exp\left(\ln\left(1-\frac{1}{v}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{n-1}{v}\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left(-\frac{1}{v}-\ldots-\frac{n-1}{v}\right)=e^{-n(n-1)/(2v)}.$$

Аналогично делаем оценку числителя снизу:

$$\left(1-\frac{2}{v}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2(n-1)}{v}\right)=\exp\left(\ln\left(1-\frac{2}{v}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{2(n-1)}{v}\right)\right)\geqslant$$
$$\geqslant\exp\left(-\frac{2}{v}-\ldots-\frac{2(n-1)}{v}-\frac{2^2}{v^2}-\ldots-\frac{2^2\cdot(n-1)^2}{v^2}\right)=$$
$$=\exp\left(-\frac{n(n-1)}{v}-\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}\right)$$

(пользуемся свойством логарифма и известной формулой для суммы квадратов первых натуральных чисел, см. [3]). Получаем, что

$$p\geqslant 2^{1-n}\exp\left(-\frac{n(n-1)}{2v}-\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}\right).$$

Величина

$$\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$, ибо $v=n^2/2$. То же самое верно для величины $n/(2v)$. Поэтому при всех достаточно больших n выполнено неравенство

$$\exp\left(-\frac{n(n-1)}{2v}-\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}\right)\geqslant e^{-n^2/(2v)}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-1},$$

так что

$$p\geqslant 2^{1-n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-1}.$$

Далее, замечая, что в силу определения m (см. начало доказательства) при всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$m\geqslant\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)\frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n,$$

получаем

$$e^{v\ln 2-pm}\leqslant\exp\left(v\ln 2-2^{1-n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-1}m\right)\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left(\frac{n^2\ln 2}{2}-2^{1-n}\left(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3\varepsilon^2}{8}\right)\frac{n^2(\ln 2)2^n}{4}\right).$$

Поскольку $\varepsilon<1/2$, с огромным запасом

$$\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3\varepsilon^2}{8}>\frac{\varepsilon}{100}.$$

В итоге

$$\exp\Bigl(\frac{n^2\ln 2}{2}-2^{1-n}\Bigl(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3\varepsilon^2}{8}\Bigr)\frac{n^2(\ln 2)2^n}{4}\Bigr)=$$
$$=\exp\Bigl(\frac{n^2\ln 2}{2}-\Bigl(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3\varepsilon^2}{8}\Bigr)\frac{n^2\ln 2}{2}\Bigr)<e^{-(\varepsilon n^2\ln 2)/200}<1$$

при всех достаточно больших n. Теорема доказана. □

Крайне любопытно, что, жертвуя конструктивностью, мы реально упростили себе жизнь. До сих пор неизвестны явные конструкции гиперграфов со столь малым числом рёбер и хроматическим числом, бо́льшим двух. Лишь совсем недавно — в 2013 году — Х. Гебауэр построила пример гиперграфа, у которого число рёбер не превосходит величины

$$2^{n+cn^{2/3}},\quad c>0.$$

Это прекрасное выражение, поскольку основной сомножитель — 2^n — совпадает с известной нам экспонентой в верхней и нижней оценках. Но это гораздо слабее теоремы 1, ведь n^2 несравнимо меньше, чем $2^{n^{2/3}}$.

§ 5. Улучшение нижней оценки величины $m(n)$ с помощью жадного алгоритма

В этом параграфе мы улучшим нижнюю оценку $m(n)$ примерно в $\sqrt[4]{n}$ раз.

Теорема 2. *Существует такая константа $c>0$, что для любого n выполнено неравенство $m(n)\geqslant c\sqrt[4]{n}\cdot 2^n$.*

Доказательство теоремы 2 основано на красивой и несложной идее, которую предложил А. Плу́хар. Для описания идеи введём несколько новых понятий. Пусть дан гиперграф $H=(V,E)$. Изначально его вершины представляют собой некоторую совокупность объектов, которые никак не упорядочены. Порядок на этой совокупности можно задать, разумеется, $|V|!$ способами. Пусть задан некоторый порядок (нумерация вершин) π и есть два ребра f_1, f_2, имеющие ровно одну общую вершину i. Назовём пару (f_1,f_2) *упорядоченной* 2*-цепью* в нумерации π, если номера всех вершин ребра f_1 предшествуют номеру i, а номера всех вершин ребра f_2 идут после номера вершины i. На рис. 2 показаны «кастрюлька с двумя сардельками» и два способа нумерации вершин в кастрюльке, при одном из которых сардельки образуют упорядоченную 2-цепь, а при другом не образуют. Идея Плухара формулируется в виде следующего критерия.

Критерий Плухара. *Хроматическое число гиперграфа равно 2 тогда и только тогда, когда существует нумерация его вершин, в которой нет упорядоченных 2-цепей.*

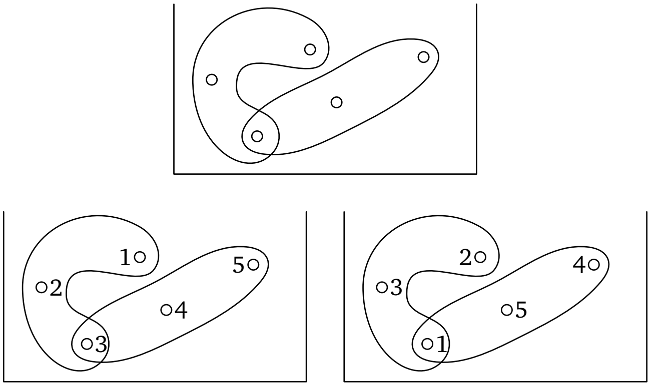

Рис. 2

Прежде чем привести простое доказательство критерия, полезно осознать его смысл в случае обыкновенного графа (т. е. 2-однородного гиперграфа). В самом деле, что означает утверждение «хроматическое число графа равно двум»? Оно означает, что множество вершин графа можно разделить на две непересекающиеся части, внутри которых рёбер графа нет, но между которыми как раз и проходят все рёбра графа (рис. 3). Такой граф ещё называют *двудольным* (т. е. буквально двухчастным), и многие читатели наверняка сталкивались с этим объектом. Понятно, что вершинам одной доли можно присвоить номера от единицы до числа, равного количеству вершин в этой доле, а вершинам второй доли — все последующие номера, и тогда упорядоченных 2-цепей не возникнет (здесь 2-цепь — это «галочка», у которой номера вершин идут в порядке «меньше-больше-меньше» или «больше-меньше-больше»).

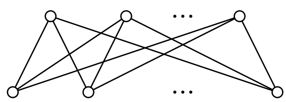

Рис. 3

Доказательство критерия. В одну сторону мы фактически доказательство уже привели. Действительно, если существует двухцветная раскраска, при которой все рёбра неодноцветны, то достаточно взять любую нумерацию, при которой все вершины первого цвета имеют меньшие номера, нежели все вершины второго цвета (двудольность).

В обратную сторону рассуждение основано на простейшем жадном алгоритме, и это объясняет название параграфа. Итак, пусть существует нумерация вершин без упорядоченных 2-цепей. Обозначим будущие цвета числами $1, 2, \ldots$ Рассматриваем вершины по порядку и красим их в минимальный цвет, при котором они не образуют одноцветных рёбер вместе с уже покрашенными вершинами. Если для некоторой вершины v нам не хватает цветов 1 и 2, то существует ребро f_2, которому принадлежит вершина v и в котором все остальные (предшествующие) вершины уже покрашены в цвет 2. Пусть w — вершина в f_2 с наименьшим номером. Раз мы её покрасили в своё время в цвет 2, мы не смогли тогда её покрасить в цвет 1. Почему? А потому, что, стало быть, имелось ребро f_1, для которого вершина w была, наоборот, последней и которое имело все вершины цвета 1. В этом случае очевидно, что рёбра f_1, f_2 образуют упорядоченную 2-цепь. Противоречие.

Критерий полностью доказан. □

До доказательства теоремы 2 остался ещё один небольшой шаг. Надо вспомнить утверждение об *асимптотике факториала*. Во введении мы уже приводили обозначение «$\sim$», называемое *асимптотическим равенством* (или *эквивалентностью*). Строго говоря, две функции f и g натурального аргумента, не принимающие нулевых значений, асимптотически равны (пишут $f \sim g$), если предел их отношения равен единице при стремлении аргумента к бесконечности. Отметим, что разность при этом вовсе не обязана стремиться к нулю: например, $n^2 + n \sim n^2$. В этих терминах справедлива следующая знаменитая формула.

Формула Стирлинга. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

В некотором смысле формула Стирлинга входит в эдакий синклит «самых прекрасных формул математики» — формул, в которых одновременно участвуют обе мировые константы e и π. Доказательство формулы можно найти во всех стандартных учебниках по математическому анализу, и мы его, конечно, не приводим. Получить с ходу некоторую интуицию формулы помогает обычная математическая индукция, с помощью которой легко доказывается неравенство

$$n! \geqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Для наших целей подобных неравенств недостаточно. Сомножитель $\sqrt{n}$ и даст нам в итоге корень четвёртой степени в теореме 2, к доказательству которой мы наконец готовы перейти.

Доказательство теоремы 2. Пусть дан произвольный n-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с m рёбрами. Мы хотим показать, что при некотором $c > 0$ (не зависящем ни от чего, включая наш гиперграф) и $m \leqslant c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n$ выполнено равенство $\chi(H) = 2$. Согласно критерию Плухара достаточно доказать существование нумерации V без упорядоченных 2-цепей. Рассмотрим, как водится, случайную нумерацию. Иными словами, каждая нумерация выбирается с вероятностью $1/|V|!$. Пусть $f_1, f_2 \in E$ и пересечение этих рёбер состоит из одной вершины. Обозначим через A_{f_1,f_2} событие, состоящее в том, что в случайной нумерации рёбра f_1, f_2 образуют упорядоченную 2-цепь. Легко сообразить, что

$$\mathrm{P}(A_{f_1,f_2}) = \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

Далее, вероятность того, что найдутся два ребра, образующие упорядоченную 2-цепь, равна

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{f_1,f_2} A_{f_1,f_2}\Big) \leqslant \sum_{f_1,f_2} \mathrm{P}(A_{f_1,f_2}) < |E|^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = m^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

Остаётся лишь проверить, что при m вида $c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n$ с подходящей константой c выполнено неравенство

$$m^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} < 1. \qquad (3)$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \frac{(n!)^2 \cdot (2n)}{n^2 \cdot (2n)!} = \frac{2(n!)^2}{n \cdot (2n)!} \sim \frac{2}{n} \cdot \frac{\left(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\right)^2}{\sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n}} = \frac{2}{n} \cdot \sqrt{\pi n} \cdot 2^{-2n}.$$

В последней выкладке, помимо обычных равенств, есть одно асимптотическое. Как с ним бороться? Ну, точно можно сказать, что существует константа C, с которой при всех n выполнено неравенство

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} < \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot 2^{-2n}.$$

Значит, неравенство (3) заведомо будет выполнено, коль скоро

$$m^2 \leqslant \frac{\sqrt{n}}{C} \cdot 2^{2n},$$

откуда и получаем вожделенное неравенство $m \leqslant c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n$ с коэффициентом $c = 1/\sqrt{C}$. Теорема доказана. $\square$

§ 6. Дальнейшее улучшение нижней оценки $m(n)$ с помощью рандомизированного алгоритма перекраски

В этом параграфе мы используем иной вероятностный подход, нежели до сих пор, и докажем следующую теорему, полученную Й. Беком и Дж. Спенсером.

Теорема 3. *При всех достаточно больших n выполнено неравенство*

$$m(n) \geqslant \left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}\cdot 2^{n-1}\right].$$

Конечно, можно было написать в формулировке $1/4$ и 2^n, но так будет удобнее для доказательства, к которому на сей раз мы без всяких предисловий приступим.

Доказательство теоремы 3. Пусть $H=(V,E)$ — n-однородный гиперграф с $m=[x\cdot 2^{n-1}]$ рёбрами, где

$$x=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}.$$

Покажем, что существует раскраска в 2 цвета множества V, при которой все рёбра неодноцветны. Раскраску будем строить с помощью следующего рандомизированного алгоритма.

Шаг 1. Красим вершины независимо друг от друга, с вероятностью $1/2$ выбирая для каждой вершины один из двух цветов — красный или синий. Пусть D — случайное множество всех вершин, принадлежащих одноцветным рёбрам (объединение всех рёбер, которые оказались одноцветными). Это может быть, например, и пустое множество.

Шаг 2. Пусть $p\in[0,1]$ (мы для каждого n выберем конкретное p позднее). Рассматриваем только вершины из множества D. У каждой из них мы независимо от всех остальных вершин множества D меняем цвет на противоположный с вероятностью p и не меняем цвет с вероятностью $1-p$. Иными словами, у нас как бы есть монета со смещённым, вообще говоря, центром тяжести. При случайном бросании монета ложится решкой кверху с вероятностью p и орлом — с вероятностью $1-p$. Мы бросаем монету $|D|$ раз и, если в очередном бросании монета падает решкой кверху, меняем цвет соответствующей вершины из D; иначе не меняем.

Понятно, что шаг 1 — это обычная случайная раскраска, с помощью которой мы доказывали неравенство $m(n)\geqslant 2^{n-1}+1$. Таким образом, шаг 2 — это попытка исправить ошибки шага 1 за счёт того, что шаг 1 нечувствителен к виду исходного гиперграфа, а шаг 2 пытается учесть его структуру и повысить тем самым вероятность того, что на выходе все рёбра окажутся неодноцветными. Разумеется, качество шага 2 зависит от выбора p, и скоро мы увидим, как этот выбор осуществлять оптимально.

Пусть $\mathscr{F}$ — событие, состоящее в том, что раскраска не удалась, т. е. существуют одноцветные рёбра. Как конкретное ребро f может оказаться одноцветным? Есть всего 6 вариантов:

1) $A_{f,1}$: ребро f красное после шага 1 и красное после шага 2;
2) $A_{f,2}$: ребро f красное после шага 1 и синее после шага 2;

3) $A_{f,3}$: ребро f синее после шага 1 и синее после шага 2;
4) $A_{f,4}$: ребро f синее после шага 1 и красное после шага 2;
5) $C_{f,1}$: ребро f неодноцветное после шага 1 и красное после шага 2;
6) $C_{f,2}$: ребро f неодноцветное после шага 1 и синее после шага 2.

Очевидно,

$$\mathscr{F} = \bigcup_{f \in E} (A_{f,1} \cup A_{f,2} \cup A_{f,3} \cup A_{f,4} \cup C_{f,1} \cup C_{f,2}),$$

$$\mathrm{P}(A_{f,1}) = \mathrm{P}(A_{f,3}), \quad \mathrm{P}(A_{f,2}) = \mathrm{P}(A_{f,4}), \quad \mathrm{P}(C_{f,1}) = \mathrm{P}(C_{f,2}).$$

Поэтому

$$\mathrm{P}(\mathscr{F}) \leqslant 2 \sum_{f \in E} \Big(\mathrm{P}(A_{f,1}) + \mathrm{P}(A_{f,2}) + \mathrm{P}(C_{f,1})\Big).$$

Оценим вероятности, стоящие в скобках под знаком суммирования. Совсем легко разобраться с первыми двумя:

$$\mathrm{P}(A_{f,1}) = 2^{-n} \cdot (1-p)^n, \quad \mathrm{P}(A_{f,2}) = 2^{-n} \cdot p^n.$$

А вот с третьей вероятностью намного труднее.

Как могло случиться, что ребро f было неодноцветным после шага 1, но стало красным после шага 2? Конечно, синие вершины ребра f, имевшиеся в нём после шага 1, должны были перекраситься. Но почему? Как они попали в множество D, если f неодноцветное и в формировании D не участвовало? Значит, было ещё хотя бы одно ребро φ, которое было синим после шага 1 и которое имеет непустое пересечение с f. Это именно следствие, не равносильность! Всё могло быть очень и очень хитро. Например, красные после шага 1 вершины ребра f тоже могли попасть в D и пытаться поменять цвет, но монетка легла орлом. И так далее. Но мы точно знаем, что следствие имеет место, а значит,

$$\mathrm{P}(C_{f,1}) \leqslant \mathrm{P}\Big(\bigcup_{\varphi} B_{f,\varphi}\Big),$$

где объединение берётся по всем $\varphi \in E$, которые имеют непустое пересечение с f, а $B_{f,\varphi}$ — событие, состоящее в том, что f неодноцветное после шага 1, f красное после шага 2 и φ синее после шага 1. Таким образом,

$$\mathrm{P}(C_{f,1}) \leqslant \sum_{\varphi} \mathrm{P}(B_{f,\varphi}),$$

и нам нужно оценить величину $\mathrm{P}(B_{f,\varphi})$.

Положим $h = |f \cap \varphi| \geqslant 1$. Посмотрим отдельно на $a = f \cap \varphi$, отдельно на $b = f \setminus \varphi$ и отдельно на $c = \varphi \setminus f$. С вершинами из a всё ясно. Они были синими и стали красными. Вероятность этого равна $2^{-h} \cdot p^h$. Так же просто всё и в случае c. Вершины там были синими, а что с ними стало, мы не знаем. Вероятность этого не больше чем $2^{-(n-h)} \cdot 1$. Интереснее всего обстоят дела с b. Пусть $v \in b$. Есть два варианта. Во-первых, вершина v могла быть синей и стать красной. Вероятность этого равна $(1/2) \cdot p$. Во-вторых, она могла быть красной и остаться красной. Как произошло последнее, мы не знаем: то ли v попала в D, но монетка легла орлом, то ли v не попала в D и просто не пыталась сменить цвет. В любом случае здесь вероятность не больше чем $(1/2) \cdot 1$. Итого для данной вершины $v \in b$ имеем оценку вероятности величиной, равной сумме оценок вероятностей первого и второго варианта, т. е. $p/2 + 1/2$. В целом по b за счёт независимости вероятность оценивается величиной $(p/2 + 1/2)^{n-h}$. Собирая все оценки вместе, получаем

$$\mathrm{P}(B_{f,\varphi}) \leqslant 2^{-h} \cdot p^h \cdot 2^{-(n-h)} \cdot \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-h} = 2^{h-2n} \cdot p^h \cdot (1+p)^{n-h}.$$

Очевидно, последняя величина принимает максимальное значение при $h = 1$ (она убывает по h). Значит, всегда выполнены неравенства

$$\mathrm{P}(B_{f,\varphi}) \leqslant 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^{n-1} < 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n.$$

Вернёмся к оценке вероятности $C_{f,1}$. Ясно, что

$$\mathrm{P}(C_{f,1}) \leqslant \sum_{\varphi} \mathrm{P}(B_{f,\varphi}) < |E| \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n = m \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n \leqslant$$
$$\leqslant x \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n = x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathscr{F}) &\leqslant 2 \sum_{f \in E} \big(\mathrm{P}(A_{f,1}) + \mathrm{P}(A_{f,2}) + \mathrm{P}(C_{f,1})\big) \leqslant \\
&\leqslant 2 \sum_{f \in E} \big(2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n\big) = \\
&= 2m\big(2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n\big) \leqslant \\
&\leqslant x \cdot 2^n \big(2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n\big) = \\
&= x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n.
\end{aligned}$$

Полученный результат можно трактовать так: «Пусть дано n, и пусть x — максимальное число, для которого существует $p \in [0, 1]$, удовлетворяющее неравенству

$$x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n < 1.$$

Тогда $m(n) \geqslant x \cdot 2^{n-1}$». Теорема 3 лишь говорит нам, что для

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}$$

такое p действительно есть. Какое же оно? Вот такое:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n}.$$

Впечатляет? Ещё красивее выглядит проверка (пользуемся свойством логарифма):

$$\begin{aligned}
&x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n = \\
&\quad = x \cdot e^{n\ln(1-p)} + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot e^{n\ln(1+p)} \leqslant x \cdot e^{-pn} + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot e^{pn} <
\end{aligned}$$

(при достаточно больших n)

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3} \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot\ln(n/\ln n)} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln n}{n} \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot\ln(n/\ln n)} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{-1/3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3} \cdot \frac{\ln n}{n} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} < 1.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Заметим, что в рамках метода можно улучшить константы, но нельзя увеличить по порядку кубический корень. Попробуйте осознать это!

§ 7. Самая сильная известная нижняя оценка

В этом параграфе мы соберём вместе идею случайной раскраски и идею жадного алгоритма. В результате мы докажем следующую теорему.

Теорема 4. *При всех достаточно больших n выполнено неравенство*

$$m(n) \geqslant \left[\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n\right].$$

С точностью до константы это самый лучший известный результат! Доказав теорему 4, мы окажемся на самой вершине современного знания в области, ведь и верхняя оценка величиной порядка $n^2 \cdot 2^n$ — это лучшее, что сейчас известно.

У теоремы 4 очень любопытная история. В 2002 году её доказали Дж. Радхакришнан и А. Сринивасан. Их рассуждение можно прочесть в книге [14]. А в 2013 году Д. Д. Черкашин и Я. Козик придумали иной алгоритм, ещё более простой и изящный. Именно его мы здесь и изложим. Черкашин и Козик работали совершенно независимо друг от друга. Но в итоге они буквально с разницей в одну неделю подали свои статьи в один и тот же журнал! Удивительное совпадение.

Ещё немного знаний из математического анализа потребуется нам для понимания выкладок. А именно, нужно знать, что

$$e^x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^t}{t!}. \tag{4}$$

Опять же, этот факт можно найти в любом стандартном учебнике.

Доказательство теоремы 4. Дан n-однородный гиперграф $H=(V,E)$ с

$$m = \left[\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n\right]$$

рёбрами. Действуем на стыке методов. Положим (сразу!)

$$p = \frac{\ln(4n \ln^2 n)}{2n}.$$

Шаг 1. Красим вершины независимо друг от друга, с вероятностью $(1-p)/2$ выбирая для каждой вершины один из двух цветов — красный или синий, — а с вероятностью p делая её же бесцветной. Пусть W — случайное множество всех бесцветных вершин.

Шаг 2. Берём случайную нумерацию вершин из W. Как из этой нумерации сделать раскраску и что вообще мы будем красить, поймём совсем скоро.

Для каждого ребра $f \in E$ есть следующие и только следующие «плохие» варианты после шага 1:

1) $A_{f,1}$: ребро f красное после шага 1;
2) $A_{f,2}$: ребро f синее после шага 1;
3) $A_{f,3}$: после шага 1 в ребре f только одна бесцветная вершина, а все остальные вершины красные;
4) $A_{f,4}$: после шага 1 в ребре f только одна бесцветная вершина, а все остальные вершины синие;
5) $A_{f,5}$: после шага 1 в ребре f не менее двух и не более $n-1$ бесцветных вершин, а все остальные вершины красные;
6) $A_{f,6}$: после шага 1 в ребре f не менее двух и не более $n-1$ бесцветных вершин, а все остальные вершины синие;
7) $A_{f,7}$: после шага 1 в ребре f все вершины бесцветные.

Как мы скоро увидим, все события, кроме 5-го и 6-го, имеют крайне маленькие вероятности. Шаг 2 борется именно с 5-м и 6-м случаями. А именно, если для f выполнилось условие $A_{f,5}$, то рассмотрим множество $f \cap W$ и присвоим ему «метку» 1. Если же для f выполнилось условие $A_{f,6}$, то также рассмотрим множество $f \cap W$ и присвоим ему «метку» 2.

Скажем, что в данной нумерации множества W пара $f \cap W$ и $f' \cap W$ образует *сильную упорядоченную* 2-*цепь*, если она образует упорядоченную 2-цепь, причём у $f \cap W$ метка 1, а у $f' \cap W$ метка 2. Имеет место аналог критерия Плухара, который доказывается совершенно аналогично.

Аналог критерия Плухара. *Множество W можно так покрасить в красный и синий цвета, чтобы каждое подмножество вида $f \cap W$ с меткой* 1 *не было целиком красным и каждое подмножество вида $f \cap W$ с меткой* 2 *не было целиком синим, если и только если существует нумерация его вершин, в которой нет сильных упорядоченных* 2-*цепей.*

В чём тут дополнительная хитрость? В том, что нам не нужно красить W так, чтобы все «обрубки» $f \cap W$ были неодноцветными. Достаточно добиться того, чтобы их цвета были не такими, как у $f \setminus W$!

Остаётся убедиться в том, что при достаточно больших n сумма вероятностей всех плохих событий меньше единицы.

Для первых двух типов событий сумма вероятностей оценивается величиной

$$2m \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \cdot 2^{-n} \cdot e^{-pn} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot e^{-\ln(4n\ln^2 n)/2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n},$$

которая стремится к нулю и, стало быть, при больших n значения не имеет.

Для третьего и четвёртого типов событий оценка слегка ухудшается из-за необходимости выбрать бесцветную вершину:

$$2m \cdot np\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \cdot \frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2} \cdot 2^{-n+1} \cdot \frac{e^{-pn}}{1-p}.$$

Величина $1-p$ стремится к единице, а

$$\frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2} \sim \frac{\ln n}{2}.$$

Поэтому при всех больших n можно, например, написать

$$\frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2} \cdot \frac{1}{1-p} < \ln n,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \cdot \frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2} \cdot 2^{-n+1} \cdot \frac{e^{-pn}}{1-p} < \\ < \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot (\ln n) \cdot e^{-pn} = \sqrt{n\ln n} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n} \to 0.$$

Наконец, для событий 7-го типа имеем оценку mp^n, и эта величина стремится к нулю с космической скоростью.

Для получения оценки в случае 5-го и 6-го типов событий нужно зафиксировать произвольную 2-цепь (это делается заведомо не более чем m^2 способами). Пусть $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ суть $|f \cap W|$ и $|f' \cap W|$ соответственно. Тогда искомая вероятность оценивается следующим произведением:

$$\left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b} \cdot p^{a+b-1} \cdot C_{n-1}^{a-1} \cdot C_{n-1}^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Здесь первый множитель отвечает вершинам из $(f \setminus W) \cup (f' \setminus W)$, второй множитель отвечает вершинам из $(f \cap W) \cup (f' \cap W)$, третий и четвёртый множители отвечают выбору из f и f' тех вершин, которые окажутся бесцветными (единственная общая вершина 2-цепи заведомо должна стать бесцветной, поэтому выбор осуществляется из $n-1$ по $a-1$ и по $b-1$), последний множитель — это вероятность того, что в случайной нумерации на шаге 2 наша 2-цепь окажется сильной упорядоченной. Сумма вероятностей не превосходит

$$m^2 \sum_{a,b \geqslant 2} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b} \cdot p^{a+b-1} \cdot C_{n-1}^{a-1} \cdot C_{n-1}^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Сделаем замену $t = a+b-2$. Учтём также, что

$$C_{n-1}^{a-1} = \frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-a+1)}{(a-1)!} < \frac{n^{a-1}}{(a-1)!},$$

откуда

$$C_{n-1}^{a-1} \cdot C_{n-1}^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} \leqslant \frac{n^t}{(t+1)!}$$

и (при данном t числа a, b фиксируются не более чем t способами)

$$m^2 \sum_{a,b \geqslant 2} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b} \cdot p^{a+b-1} \cdot C_{n-1}^{a-1} \cdot C_{n-1}^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} <$$
$$< m^2 \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-t-2} \cdot p^{t+1} \cdot \frac{n^t}{(t+1)!} <$$
$$< m^2 \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-2} \cdot p \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{-t} \cdot p^t \cdot \frac{n^t}{t!} <$$

(с учётом выбора m, свойства логарифма, формулы (4) и того факта, что при больших n величина p не больше $(\ln n)/n$)

$$< \frac{1}{16} \cdot \frac{n}{\ln n} \cdot 2^{2n} \cdot 2^{-2n+2} \cdot e^{-2pn+2p} \cdot \frac{\ln n}{n} \cdot e^{2pn/(1-p)} = \frac{1}{4} \cdot e^{-2pn+2p+2pn/(1-p)}.$$

Поскольку $p \to 0$, при больших n имеем $\frac{1}{1-p} \leqslant 1+2p$, так что

$$e^{-2pn+2p+2pn/(1-p)} < e^{-2pn+2p+2pn+4p^2n} = e^{4p^2n+2p}.$$

В свою очередь, $p^2 n \to 0$ и $p \to 0$, а значит, при больших n мы имеем

$$e^{4p^2n+2p} < 2,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{4} \cdot e^{-2pn+2p+2pn/(1-p)} < \frac{1}{2}.$$

Складывая последнюю оценку с тремя оценками, стремящимися к нулю, при больших n получаем, что наш алгоритм завершится неудачей с вероятностью, меньшей единицы. Тем самым теорема доказана. □

§ 8. Задача об уклонении: постановка и некоторые результаты

В этом параграфе мы расскажем об одном интересном уточнении задачи о раскраске. А именно, зачастую важно не просто добиться того, чтобы все рёбра были неодноцветными, но ещё и постараться сделать так, чтобы количества красных и синих вершин в каждом ребре были примерно одинаковыми. Для формализации новой постановки удобно считать, что красный цвет — это 1, а синий цвет — это -1, т. е. раскраска — это отображение χ, при котором каждой вершине присваивается одно из двух значений. В таких терминах для каждого $H = (V, E)$ и для раскраски χ нас интересует величина

$$\operatorname{disc}(H, \chi) = \max_{f \in E} |\chi(f)|, \quad \chi(f) = \sum_{v \in f} \chi(v),$$

называемая *уклонением* (обозначение происходит от английского слова «discrepancy»). Положим также

$$\operatorname{disc}(H) = \min_{\chi} \operatorname{disc}(H, \chi).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать не только однородные гиперграфы. Приведём и прокомментируем основные известные результаты.

Теорема 5. *Пусть $H = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Тогда*

$$\operatorname{disc}(H) \leqslant \sqrt{2n \ln(2m)}.$$

Теорема 5 во многих ситуациях даёт весьма хорошую оценку. Действительно, если m не слишком велико (например, не больше какого-нибудь многочлена от n), а рёбра гиперграфа достаточно большие (например, порядка n), то получается, что не просто можно всегда сделать все рёбра неодноцветными, но можно ещё и сделать так, чтобы разница между количествами вершин разного цвета в каждом ребре не превосходила корня из его размера, умноженного на логарифм его размера. Таким образом, оптимальное уклонение бесконечно мало по сравнению с числом вершин в каждом ребре.

Теорему 5 мы доказывали в книге [15]. Но там мы дали не совсем аккуратное и довольно-таки неэлементарное доказательство. В следующем параграфе мы приведём другое, более замкнутое в себе рассуждение, обосновывающее теорему 5. В случае $m = n$ теорема 5 допускает уточнение.

Теорема 6. *Пусть* $H = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = n$. *Тогда* $\operatorname{disc}(H) \leqslant 6\sqrt{n}$.

Теорема 6 доказана в книге [14]. По сложности она несколько превосходит всё, о чём мы здесь пишем. Поэтому в этой статье мы её доказывать не станем.

Теорема 6 точна по порядку величины.

Теорема 7. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при каждом* $n > n_0$ *найдётся гиперграф* $H = (V, E)$, *у которого* $|V| = n$, $|E| = n$ *и*

$$\operatorname{disc}(H) \geqslant (1-\varepsilon) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Теорема 7 доказана вероятностным методом в книге [15] и линейно-алгебраическим — в книге [12]. Для полноты картины мы в § 10 воспроизведём второе (чуть более аккуратное и красивое) доказательство.

§ 9. Доказательство теоремы 5

9.1. Вспомогательное неравенство из теории вероятностей

Материал этого параграфа есть в книге [16]. Мы приводим его для полноты доказательства.

Теорема 8. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *независимые случайные величины, принимающие значения* ± 1 *с вероятностью* $1/2$. *Тогда для любого* $a > 0$ *выполнено неравенство*

$$\mathrm{P}(|\xi_1 + \ldots + \xi_n| > a) \leqslant 2e^{-a^2/(2n)}.$$

Фактически в теореме 8 речь идёт о совершенно классическом объекте теории вероятностей — о случайном блуждании на прямой. В шуточной интерпретации, которую я обычно рассказываю на лекциях, в точке 0 на прямой находится кабак. Из него выходит пьяница, который с вероятностью $1/2$ перемещается в точку 1 и с такой же вероятностью идёт в точку -1. Дальше он снова выбирает направление движения случайно. Так вот, теорема говорит о том, что крайне мала вероятность, с которой пьяница уйдёт сравнительно далеко от родного кабака. Например, при $n = 10^6$, $a = 10^4$ вероятность не больше $2e^{-50}$, т. е. сделав миллион шагов, пьяница удалится от «сияющего центра» на расстояние, равное всего лишь десяти тысячам шагов, с вероятностью, не превосходящей чудовищно малой величины $2e^{-50}$.

Доказательство теоремы 8. Ввиду симметрии достаточно убедиться в том, что

$$\mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n > a) \leqslant e^{-a^2/(2n)}.$$

Положим $\lambda = a/n$. Имеем

$$\mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n > a) = \mathrm{P}(\lambda(\xi_1 + \ldots + \xi_n) > \lambda a) = \mathrm{P}(e^{\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n)} > e^{\lambda a}).$$

Воспользуемся неравенством Маркова (см. [5]) и независимостью случайных величин:

$$\mathrm{P}(e^{\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n)} > e^{\lambda a}) \leqslant e^{-\lambda a} \cdot \mathrm{E}e^{\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n)} = e^{-\lambda a} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}e^{\lambda \xi_i} = e^{-\lambda a} \cdot \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^n =$$

(по формуле (4))

$$= e^{-\lambda a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}\right)\right)^n = e^{-\lambda a} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\right)^n \leqslant$$

(за счёт того, что $(2k)! \geqslant 2^k \cdot k!$)

$$\leqslant e^{-\lambda a} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{2^k \cdot k!}\right)^n =$$

(по формуле (4))

$$= e^{-\lambda a} \cdot e^{\lambda^2 n/2} = e^{-a^2/(2n)}.$$

Теорема 8 доказана. □

9.2. Теорема 8 и раскраска

Нам дан гиперграф $H = (V, E)$ с $V = \{1, \ldots, n\}$ и $|E| = m$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины из теоремы 8. С помощью них построим случайную раскраску χ, полагая $\chi(i) = \xi_i$. Покажем, что с положительной вероятностью для каждого $f \in E$ выполнено неравенство

$$|\chi(f)| \leqslant a, \quad \text{где } a = \sqrt{2n \ln(2m)},$$

что и завершит доказательство теоремы 5. Но это равносильно тому, что с вероятностью, меньшей единицы, найдётся $f \in E$, для которого $|\chi(f)| > a$. Для каждого отдельного ребра f имеем

$$\mathrm{P}(|\chi(f)| > a) = \mathrm{P}\left(\left|\sum_{i\in f} \xi_i\right| > a\right) \leqslant$$

(по теореме 8)

$$\leqslant 2e^{-a^2/(2|f|)} \leqslant 2e^{-2n\ln(2m)/(2n)} = \frac{1}{m}.$$

и этом $|f|$ может равняться n лишь для одного $f \in E$, откуда следует, что

$$\mathrm{P}(\exists\, f : |\chi(f)| > a) \leqslant \sum_{f\in E} \mathrm{P}(|\chi(f)| > a) < \frac{|E|}{m} = 1,$$

и теорема 5 доказана.

§ 10. Доказательство теоремы 7

Сначала нам потребуются нетривиальные сведения из линейной алгебры.

Матрицы Адамара. Квадратная матрица размера $n \times n$ называется матрицей Адамара, если все её элементы суть плюс и минус единицы, а строки её попарно ортогональны. Априори неясно даже, существует ли такая матрица, но заведомо понятно, что с тем же успехом можно было потребовать попарной ортогональности её столбцов (вышло бы эквивалентное определение[2)]) и что домножение всех элементов любой строки (любого столбца) матрицы Адамара на -1 сохраняет «адамаровость». Упомянутые факты позволяют считать, что, скажем, все элементы первого столбца и первой строки матрицы Адамара суть единицы. Обозначим такую матрицу H_1.

Что касается существования матриц Адамара, то гипотеза, которая до сих пор не доказана, состоит в том, что эти матрицы существуют при $n = 1, 2$ и $n = 4k$. Известно, тем не менее, достаточно много. Так, например, установлено существование матриц при $n = 2^k$, $n = p^k + 1$, где p простое, а n делится на 4, при $n = 92, 116, 172$ и при различных других специальных значениях n (см. [17]). В конечном счёте множество тех n, для которых матрицы Адамара точно найдутся, «плотно» в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ между n и $n(1+\varepsilon)$ имеется порядок матрицы Адамара.

[2)] Действительно, то и другое свойство равносильно тому, что произведение матрицы на транспонированную — диагональная матрица.

Основная лемма. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, где n_i — порядок матрицы Адамара. Рассмотрим для каждого $n = n_i$ матрицу H_1 порядка n. Возьмём, кроме того, матрицу J, состоящую из одних единиц, и положим

$$H^* = \frac{H_1 + J}{2}$$

(H^* — это $(0,1)$-матрица). Считая, что $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор в $\mathbb{R}^n$, определим его *норму* в пространстве l_p как

$$|\mathbf{x}|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p} \quad \text{при } p \in [1, \infty)$$

и как

$$|\mathbf{x}|_\infty = \max_i |x_i| \quad \text{при } p = \infty.$$

Выполнена следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого вектора $\boldsymbol{x}$, координаты которого суть плюс и минус единицы, имеет место оценка*

$$|H^*\boldsymbol{x}|_\infty \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из формулировки леммы. Тогда

$$H_1\mathbf{x} = x_1\mathbf{h}_1 + \ldots + x_n\mathbf{h}_n,$$

где $\mathbf{h}_i$ — вектор-столбцы матрицы H_1. Полагая $H_1\mathbf{x} = (L_1, \ldots, L_n)$, получаем

$$L_1^2 + \ldots + L_n^2 = |H_1\mathbf{x}|_2^2 = x_1^2|\mathbf{h}_1|_2^2 + \ldots + x_n^2|\mathbf{h}_n|_2^2 = n + \ldots + n = n^2,$$

поскольку векторы $\mathbf{h}_i$ попарно ортогональны. Значит, некоторое L_i^2 оценивается снизу величиной n, и, стало быть,

$$|H_1\mathbf{x}|_\infty \geqslant \sqrt{n}.$$

Теперь пусть $h_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, — элементы матрицы H_1. Тогда

$$L_1 + \ldots + L_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j h_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} h_{i,j}\right) = x_1 \cdot n = \pm n,$$

поскольку сумма элементов матрицы H_1, стоящих в первом столбце, есть, очевидно, n, а сумма элементов в остальных столбцах равна нулю (числа единиц и минус единиц в них одинаковы, ведь они должны быть ортогональны первому столбцу, в котором одни единицы).

Положим, далее, $\lambda = x_1 + \ldots + x_n$, так что $J\mathbf{x} = (\lambda, \ldots, \lambda)$. Соответственно

$$(H_1 + J)\mathbf{x} = (L_1 + \lambda, \ldots, L_n + \lambda).$$

Следовательно,

$$|(H_1+J)\mathbf{x}|_2^2=\sum_{i=1}^{n}(L_i+\lambda)^2=\sum_{i=1}^{n}(L_i^2+2L_i\lambda+\lambda^2)=n^2\pm 2n\lambda+n\lambda^2.$$

У нас n чётно, так как матриц Адамара нечётного порядка, конечно же, не бывает (исключение составляет вырожденный случай $n=1$). Величина λ, будучи, стало быть, суммой чётного числа плюс и минус единиц, есть тогда чётное целое. Квадратичная форма (по λ) $n^2\pm 2n\lambda+n\lambda^2$ достигает минимума при $\lambda=\pm 1$, но, как мы только что выяснили, λ обязано быть чётным, и посему реальный минимум находится в множестве $\lambda\in\{-2,0,2\}$. Из этого рассуждения следует оценка

$$|(H_1+J)\mathbf{x}|_2^2\geqslant n^2.$$

Как это уже было однажды, последнее неравенство означает, что

$$|(H_1+J)\mathbf{x}|_\infty\geqslant\sqrt{n},$$

т. е. $|H^*\mathbf{x}|\geqslant\sqrt{n}/2$, и лемма доказана. □

Завершение доказательства теоремы 7. Обозначим строки матрицы H^* через $\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_n$. Это $(0,1)$-векторы, которые мы превратим в подмножества $M_1,\ldots,M_n$ множества $V=\{1,\ldots,n\}$ по следующему принципу: $i\in M_j$ тогда и только тогда, когда i-я координата вектора $\mathbf{g}_j$ равна 1. Возникает гиперграф $H=(V,\{M_1,\ldots,M_n\})$, и мы покажем, что для него

$$\operatorname{disc}(H)\geqslant\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Пусть χ — произвольная раскраска. Ей однозначно соответствует $(-1,1)$-вектор $\mathbf{x}$, состоящий из «цветов». Нетрудно видеть, что

$$|H^*\mathbf{x}|_\infty=\operatorname{disc}(H,\chi).$$

В самом деле,

$$H^*\mathbf{x}=((\mathbf{g}_1,\mathbf{x}),\ldots,(\mathbf{g}_n,\mathbf{x})),$$

но

$$(\mathbf{g}_\nu,\mathbf{x})=\sum_{i\in M_\nu}\chi(i),\qquad \nu=1,\ldots,n,$$

и всё в порядке. Раскраска χ была выбрана наугад, и потому

$$\operatorname{disc}(H)=\min_\chi\operatorname{disc}(H,\chi)=\min_{\mathbf{x}}|H^*\mathbf{x}|_\infty\geqslant\frac{\sqrt{n}}{2}$$

ввиду леммы 1. Теорема доказана для любого n, служащего порядком матрицы Адамара.

Во всей же своей полноте теорема немедленно следует из упомянутой выше плотности порядков матриц Адамара. □

§ 11. Несколько слов о нескольких цветах

До сих пор мы говорили исключительно о раскрасках в два цвета. Однако ясно, что всё с этого только начинается: абсолютно естественно работать с произвольным количеством цветов. Ниже мы дадим лишь самые первоначальные сведения о возникающих проблемах, и читателю уже станет очевидным всё разнообразие задач, которое здесь открывается.

Пусть $m(n, r)$ — это минимальное возможное число рёбер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом, строго большим r. Ясно, что $m(n) = m(n, 2)$.

Легко показать, что величина $m(n, r)$ конечна при любых значениях $n \geqslant 2$, $r \geqslant 2$. Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \ldots, r(n-1)+1\}$, а E — совокупность всех n-элементных подмножеств множества V. Согласно принципу Дирихле, в любой r-цветной раскраске множества V найдутся n вершин, покрашенных в один цвет, т. е. найдётся одноцветное ребро. Следовательно, $\chi(H) > r$ и

$$m(n, r) \leqslant |E| = C^n_{r(n-1)+1}. \tag{5}$$

В частности, при $r = 2$ имеем давно известную нам оценку $m(n) \leqslant C^n_{2n-1}$. Как мы хорошо помним, эта оценка отнюдь не точна, и мы её значительно улучшили с помощью вероятностного метода. Однако при $n = 2$, т. е. в случае обычного графа (помните формулу (2)?) $m(2) = 3 = C^2_3$, так что здесь уточнений как раз не предвидится. Оказывается, для любого $r \geqslant 2$ выполнено $m(2, r) = C^2_{r+1}$. Достаточно показать, что для любого графа G, имеющего менее C^2_{r+1} рёбер, выполнено неравенство $\chi(G) \leqslant r$. Проведём индукцию по числу вершин в графе.

Если $G = (V, E)$ и $|V| \leqslant r$, то очевидно, что $\chi(G) \leqslant r$.

Пусть для $v > r$ доказано, что любой граф $G = (V, E)$ с условиями $|V| < v$ и $|E| < C^2_{r+1}$ имеет хроматическое число, не превосходящее r. Рассмотрим произвольный граф $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ с условиями $|\widetilde{V}| = v$ и $|\widetilde{E}| < C^2_{r+1}$. В силу очевидных неравенств

$$v \min_{u \in \widetilde{V}} \deg u \leqslant \sum_{u \in \widetilde{V}} \deg u = 2|\widetilde{E}| < r(r+1)$$

получаем, что $\widetilde{G}$ содержит вершину $u \in \widetilde{V}$ степени строго меньше r. Рассмотрим граф $G' = (V', E')$, где $V' = \widetilde{V} \setminus \{u\}$, а $E' = \{e \in \widetilde{E} : u \notin e\}$. По предположению индукции $\chi(G') \leqslant r$. Следовательно, для G' существует правильная раскраска в r цветов. Коль скоро нам нужно из неё получить искомую раскраску для $\widetilde{G}$, следует так подобрать цвет для вершины u, чтобы все рёбра, содержащие u, были неодноцветными. Но количество этих рёбер строго меньше r, поэтому необходимый нам цвет найдётся. Утверждение доказано.

Как, однако, и следовало ожидать, в общем случае оценка (5) допускает усиления. По аналогии с неравенствами для $m(n)$ несложно доказать следующие оценки величины $m(n,r)$:

$$r^{n-1} \leqslant m(n,r) \leqslant \frac{e}{2} n^2 (r-1) r^{n-1} (\ln r) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{6}$$

И, приложив небольшие усилия, читатель может убедиться в том, что при фиксированных r и достаточно больших n указанная верхняя оценка гораздо сильнее оценки (5). Правда, если, напротив, зафиксировать n (не только $n=2$), а r устремить к бесконечности, то окажется, что уже оценка (5) торжествует победу над верхней оценкой в (6)… Хитро всё устроено! Эрдёш было предположил, что при больших значениях r именно оценка (5) оптимальна: для любого $n \geqslant 3$ существует такое натуральное число $r_0(n)$, что для любого $r > r_0(n)$ выполняется равенство $m(n,r) = C^n_{r(n-1)+1}$. Однако и это оказалось неверно…

Сейчас имеется масса различных нижних и верхних оценок для $m(n,r)$ при разных соотношениях между параметрами. Разумеется, и нижняя оценка в (6) уточнена многими способами. Например, одним из сравнительно недавних прорывов (2013 год) было обобщение теоремы 4 на случай произвольного r: существует такая константа $c > 0$, что для любых r, n выполнено неравенство

$$m(n,r) \geqslant c \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{(r-1)/r} r^{n-1}.$$

Однако точные значения и тем более формулы получены лишь в редких случаях. Область настолько бурно развивается, что за последние 10 лет только в «Успехах математических наук» опубликованы целых два обзора! Заинтересованный читатель может обратиться к ним для дальнейшего погружения в проблематику: см. [18, 19].

Список литературы

[1] *Райгородский А. М.* Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2015.

[2] *Райгородский А., Воронов В., Савватеев А.* Прорыв в задаче о раскраске плоскости // Квант. 2018. № 11. С. 2–9.

[3] *Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.* Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2019.

[4] *Глибичук А. А., Ильинский Д. Г., Мусатов Д. В., Райгородский А. М., Чернов А. А.* Основы комбинаторики и теории чисел: задачник. Долгопрудный: Интеллект, 2019.

[5] *Райгородский А. М.* Комбинаторика и теория вероятностей. Долгопрудный: Интеллект, 2013.

[6] https://www.coursera.org/learn/kombinatorika-dlya-nachinayushchikh

[7] https://www.coursera.org/learn/modern-combinatorics

[8] https://www.coursera.org/learn/teoriya-grafov

[9] *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

[10] *Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г., Купавский А. Б., Райгородский А. М., Скопенков А. Б., Чернов А. А.* Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016.

[11] https://www.coursera.org/learn/probability-theory-basics

[12] *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[13] *Райгородский А. М.* Задачи о раскрасках. М.: МЦНМО, 2020.

[14] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2013.

[15] *Райгородский А. М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[16] *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2016.

[17] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[18] *Райгородский А. М., Черкашин Д. Д.* Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов // УМН. 2020. Т. 75, № 1. С. 95–154.

[19] *Райгородский А. М., Шабанов Д. А.* Задача Эрдёша — Хайнала о раскрасках гиперграфов, её обобщения и смежные проблемы // УМН. 2011. Т. 66, № 5. С. 109–182.

Андрей Михайлович Райгородский, МФТИ

mraigor@yandex.ru