Мотивированное изложение доказательства теоремы Тверберга

В. И. Ретинский, А. Д. Рябичев, А. Б. Скопенков*

Мы приводим мотивированное изложение доказательства теоремы Тверберга (см. формулировку ниже). Для понимания формулировки и доказательства достаточно владеть понятием d-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. По сути наше изложение аналогично [Ma02, § 8.3] (см. также [BO97]). Однако оно проще для восприятия, поскольку дополнительные построения (переход к $\mathbb{R}^{d+1}$ от $\mathbb{R}^d$, векторы $\varphi_{j,i}$ и цветная теорема Каратеодори, см. ниже) не вводятся немотивированно заранее, а естественно возникают при попытке построить нужное разбиение[1)]. Эта попытка основана на записи нескольких равенств между векторами в виде одного равенства между векторами большей размерности.

Выпуклой оболочкой конечного набора точек $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$ называется множество

$$\langle p_1, \ldots, p_n \rangle := \{\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n \colon \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0,\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1\}.$$

Теорема 1 (Радон). *Для любого d любые $d+2$ точки в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Теорема 2 (Тверберг). *Для любых d, r любые $(d+1)(r-1)+1$ точек в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

Мотивировки и историю см. в [Ma02, § 8]; о *топологической гипотезе Тверберга* см. [Sk16]. Здесь отметим лишь, что

- теорема Радона есть частный случай теоремы Тверберга для $r = 2$;
- числа $d+2$ и $(d+1)(r-1)+1$ в этих теоремах уменьшить нельзя.

---

* Частично поддержан грантом РФФИ № 19–01–00169.

1) Наше изложение показывает, что приведённое известное доказательство является несложной редукцией к цветной теореме Каратеодори, в которой вся нетривиальность и заключается.

К соответствующему аналогу теоремы Радона контрпримером являются $d+1$ вершин d-мерного симплекса. К соответствующему аналогу теоремы Тверберга контрпримером являются вершины d-мерного симплекса, взятые с кратностью $r-1$ (или любые $(d+1)(r-1)$ точек общего положения в $\mathbb{R}^d$; используйте формулу для размерности пересечения линейных подпространств в $\mathbb{R}^d$). Поэтому вместо запоминания чисел $d+2$ и $(d+1)(r-1)+1$ из теорем Радона и Тверберга можно понимать, что это наименьшие числа, для которых не подходят вышеприведённые простые контрпримеры.

Сначала продемонстрируем одну из идей доказательства теоремы Тверберга на примере доказательства теоремы Радона. Введём обозначение $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доказательство теоремы Радона. Обозначим данные точки через $p_1, p_2, \ldots, p_{d+2}$. Достаточно привести разбиение $[d+2] = A_1 \sqcup A_2$ и неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d+2}$, для которых

$$\sum_{i \in A_1} \alpha_i p_i = \sum_{i \in A_2} \alpha_i p_i \quad \text{и} \quad \sum_{i \in A_1} \alpha_i = \sum_{i \in A_2} \alpha_i, \tag{1}$$

причём $\sum_{i \in A_1} \alpha_i = 1$. Вместо последнего равенства достаточно потребовать отличность суммы от нуля. Обозначим

$$p_i^+ := (p_i, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad i \in [d+2], \qquad S_j^+ := \sum_{i \in A_j} \alpha_i p_i^+, \quad j = 1, 2.$$

Тогда два равенства (1) равносильны одному равенству $S_1^+ = S_2^+$.

Точки $p_1^+, p_2^+, \ldots, p_{d+2}^+ \in \mathbb{R}^{d+1}$ линейно зависимы, т. е. существуют μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_{d+2}$, не все равные нулю, для которых $\sum_{i=1}^{d+2} \mu_i p_i^+ = 0$. Среди μ_i есть и положительные, и отрицательные (действительно, рассмотрим последнюю координату). Перенесём в правую часть все слагаемые с отрицательными μ_i. Получим, что следующее разбиение и числа — искомые:

$$A_1 := \{i \in [d+2] : \mu_i \geqslant 0\},$$
$$A_2 := \{i \in [d+2] : \mu_i < 0\} \quad \text{и} \quad \alpha_i = |\mu_i|. \qquad \square$$

Доказательство теоремы Тверберга. Докажем теорему для $r=3$, доказательство общего случая аналогично. Обозначим данные точки через $p_1, p_2, \ldots, p_{2d+3}$. Достаточно привести разбиение $[2d+3] = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$ и неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2d+3}$, для которых

$$\sum_{i \in A_1} \alpha_i p_i = \sum_{i \in A_2} \alpha_i p_i = \sum_{i \in A_3} \alpha_i p_i \quad \text{и} \quad \sum_{i \in A_1} \alpha_i = \sum_{i \in A_2} \alpha_i = \sum_{i \in A_3} \alpha_i, \tag{1$'$}$$

причём $\sum_{i\in A_1}\alpha_i=1$. Вместо последнего равенства достаточно потребовать равенство $\sum_{i=1}^{2d+3}\alpha_i=1$ (разделим на 3 все α_i). Обозначим

$$p_i^+:=(p_i,1)\in\mathbb{R}^{d+1},\quad i\in[2d+3],\qquad S_j^+:=\sum_{i\in A_j}\alpha_i p_i^+1,\quad j=1,2,3.$$

Тогда равенства (1′) равносильны следующим:

$$S_1^+=S_2^+=S_3^+\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}S_1^+=S_3^+,\\ S_2^+=S_3^+\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}1\cdot S_1^++0\cdot S_2^+-S_3^+=0,\\ 0\cdot S_1^++1\cdot S_2^+-S_3^+=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad(S_1^+,0)+(0,S_2^+)+(-S_3^+,-S_3^+)=0.$$

Обозначим

$$\varphi_{1,i}=(p_i^+,0)\in\mathbb{R}^{2d+2},\quad\varphi_{2,i}=(0,p_i^+)\in\mathbb{R}^{2d+2},\quad\varphi_{3,i}=(-p_i^+,-p_i^+)\in\mathbb{R}^{2d+2}.$$

Тогда равенства $S_1^+=S_2^+=S_3^+$ равносильны следующему:

$$\sum_{i\in A_1}\alpha_i\varphi_{1,i}+\sum_{i\in A_2}\alpha_i\varphi_{2,i}+\sum_{i\in A_3}\alpha_i\varphi_{3,i}=0.\tag{2}$$

Осталось применить следующую теорему.

Теорема (Барань; цветная теорема Каратеодори; [Ba82], [Ma02, § 8.2]). *Пусть точка $0\in\mathbb{R}^n$ лежит в выпуклой оболочке каждого из $n+1$ конечных множеств $M_1,M_2,\ldots,M_{n+1}\subset\mathbb{R}^n$. Тогда существуют точки $m_i\in M_i$ $(i=1,\ldots,n+1)$, для которых $0\in\langle m_1,m_2,\ldots,m_{n+1}\rangle$.*

Так как

$$0=\frac{\varphi_{1,i}+\varphi_{2,i}+\varphi_{3,i}}{3}\in\langle\varphi_{1,i},\varphi_{2,i},\varphi_{3,i}\rangle,$$

можно применить эту теорему к $n=2d+2$ и $M_i=\{\varphi_{1,i},\varphi_{2,i},\varphi_{3,i}\}$. Получим точки $m_i\in M_i$, для которых $0\in\langle m_1,m_2,\ldots,m_{n+1}\rangle$. Для $j=1,2,3$ обозначим $A_j:=\{i\in[2d+3]: m_i=\varphi_{j,i}\}$. Так как $0\in\langle m_1,m_2,\ldots,m_{n+1}\rangle$, существуют $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2d+3}\geqslant 0$, для которых выполнено равенство (2) и

$$\sum_{i=1}^{2d+3}\alpha_i=1.\qquad\square$$

Приложение: другое доказательство теоремы Радона

Приведём доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности. По сути оно совпадает с приведённым в [Ko18], но изложено без лишних обозначений.

Доказательство. Индукция по d. База $d=0$ очевидна. Докажем переход от d к $d+1$ при $d\geqslant 0$.

Существует d-мерная гиперплоскость $\alpha \subset \mathbb{R}^{d+1}$, для которой ровно одна точка O из данного набора $d+3$ точек лежит по одну сторону от α, а остальные — по другую. Обозначим через M множество этих остальных точек. Для любой точки $A \in M$ обозначим $A' := \alpha \cap OA$.

Воспользуемся теоремой Радона для множества $M' := \{A' : A \in M\}$ из $d+2$ точек в d-мерном пространстве α. Получим разбиение на два множества U_1' и U_2', выпуклые оболочки которых пересекаются в точке X'. Обозначим $U_1 := \{A : A' \in U_1'\}$ и $U_2 := \{A : A' \in U_2'\}$.

Ясно, что $U_1' \subset \langle O, U_1 \rangle$. Следовательно, $X' \in \langle O, U_1 \rangle$, и, более того, весь отрезок OX' содержится в $\langle O, U_1 \rangle$. Обозначим через X_1 точку, для которой прямая OX' пересекает $\langle O, U_1 \rangle$ по отрезку OX_1. Тогда $X_1 \in \langle U_1 \rangle$ и $X' \in OX_1$.

Аналогично через X_2 обозначим такую точку, что прямая OX' пересекает $\langle O, U_2 \rangle$ по отрезку OX_2. Тогда $X_2 \in \langle U_2 \rangle$ и $X' \in OX_2$.

Точки X_1 и X_2 лежат на луче OX'. Не умаляя общности предположим, что X_2 лежит между O и X_1. Тогда $X_2 \in \langle O, U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$, что и требовалось. □

Список литературы

[Ba82] *Bárány I.* A generalization of Caratheodory's theorem // Discrete Math. 1982. Vol. 40, iss. 2–3. P. 141–152.

[BO97] *Bárány I., Onn S.* Colourful linear programming and its relatives // Math. Oper. Res. 1997. Vol. 22, № 3. P. 550–567.

[Ko18] *Колпаков Е.* Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23. М.: МЦНМО. 2019. С. 130–133. arXiv:1903.11055.

[Ma02] *Matoušek J.* Lectures on Discrete Geometry. New York: Springer, 2002.

[Sk16] *Skopenkov A.* A user's guide to the topological Tverberg Conjecture // Russian Math. Surveys. 2018. Vol. 73, № 2. P. 323–353. arXiv:1605.05141.

Вадим Игоревич Ретинский, ВШЭ

viretinskiy@gmail.com

Андрей Дмитриевич Рябичев, ВШЭ, НМУ

ryabichev@179.ru

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ

https://users.mccme.ru/skopenko