По мотивам задачника

Задача о 3-секущих

Д. Й. Каминский, А. Я. Канель-Белов, М. Тайхер

Статья посвящена решению задачи 11.8 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 11, 2007, с. 163).

Задача 11.8. В пространстве даны две гладкие кривые C_1 и C_2. Рассматривается множество S прямых $l = (A, B)\colon A \in C_1$, $B \in C_2$. Докажите, что если некоторая кривая C_3, не пересекающаяся с $C_1 \cup C_2$, пересекает каждую прямую из S, то обе кривые C_1 и C_2 лежат в одной плоскости[1].

(*A. Kanel-Belov, J. Kaminsky, M. Taicher*)

Достаточно рассмотреть два непересекающихся интервала s_1 и s_2 кривых C_1 и C_2 соответственно. Если любые пары таких интервалов лежат в одной плоскости, то и кривые C_1 и C_2 целиком лежат в той же плоскости. Множество L прямых, соединяющих s_1 и s_2, есть двумерное гладкое многообразие, и каждая из этих прямых пересекает одномерное гладкое многообразие C_3. Пространство прямых, касающихся кривой C_3, не более чем одномерно (прямая определяется точкой касания). В случае общего положения (когда соответствующая прямая не касается C_3) зависимость точки пересечения от прямой гладкая. Поэтому для любой прямой, соединяющей точки интервалов s_1 и s_2, найдётся сколь угодно близкая к ней прямая из L, которая пересекается с ней в точке кривой C_3. Это означает, что справедливо

Работа поддержана грантом Israel science foundation № 1994/20.

[1] *Три-секущая* множества D есть прямая, пересекающая D в трёх точках. В нашем случае $D = C_1 \cup C \cup C_2$ есть объединение трёх кривых.

Предложение 1. *Для любых точек $A_1 \in s_1$, $B_1 \in s_2$ найдутся сколь угодно близкие к ним точки $A_2 \in s_1$, $B_2 \in s_2$ соответственно, для которых диагонали $[A_1B_1]$ и $[A_2B_2]$ четырёхугольника $A_1A_2B_2B_1$ пересекаются.*

Воспользуемся хоть и тривиальным, но полезным наблюдением:

Предложение 2. *Если диагонали четырёхугольника пересекаются, то все его вершины лежат в одной плоскости.*

Поскольку направление малой дуги ds гладкой кривой стремится к касательной при $|ds| \to 0$, получаем

Следствие 3. *Пусть $\vec{e}_1$ — касательный вектор к кривой C_1 в некоторой точке P, а $\vec{e}_2$ — касательный вектор к кривой C_2 в некоторой точке Q. Тогда векторы e_1, e_2 и PQ лежат в одной плоскости.*

Продолжим *решение задачи* 11.8. Рассмотрим плоскость α, проходящую через касательную к кривой C_1 в точке P, а также через точку Q. Далее, рассмотрим бесконечно малый сдвиг Q' точки Q. Вектор QQ' стремится к касательному вектору к кривой C_2 в точке Q. В силу следствия 3 этот касательный вектор лежит в плоскости α, поэтому скорость изменения направления плоскости α нулевая при любом Q. Следовательно, при движении точки Q вдоль кривой C_2 направление плоскости α не меняется. Значит, не меняется и сама плоскость α, так как она проходит через фиксированную точку P. Поэтому $\alpha \supset C_2$. Аналогично $\alpha \supset C_1$. Задача решена.

Задача допускает *обобщение*:

Даны три n-мерных гладких многообразия M_1, M_2 и M_3 в k-мерном пространстве. Известно, что любая прямая, соединяющая точки M_1 и M_2, пересекает M_3. Тогда M_1 и M_2 лежат в $(n+1)$-мерном аффинном подпространстве.

Идея решения. Многообразие прямых, соединяющих M_1 с M_2, имеет размерность $2n$. Как и для одномерных многообразий, рассмотрим области ds_1 и ds_2 на M_1 и M_2 соответственно, найдём точку на M_3 такую, что через неё проходит n-параметрическое семейство прямых. Вместо предложения 2 воспользуемся несколько более общим фактом: *если $n+1$ отрезков проходят через одну точку, то они содержатся в некотором $n+1$-мерном пространстве*. Аналогично случаю кривых получаем, что касательные n-мерные аффинные многообразия к M_i в точках $P \in M_1$ и $Q \in M_2$, а также вектор PQ лежат в одном $(n+1)$-мерном подпространстве. Рассуждения с последовательным движением точек P и Q также аналогичны случаю кривых. (Движение точки Q вдоль M_2 не меняет подпространства, натянутого на $\vec{PQ}$ и касательного к M_1 в точке P. Аналогичным образом можно двигать P.)

Комментарии. 1. Задача связана с обработкой изображений.

2. Задача 11.8 обобщается и на кусочно-гладкий случай (соображения предельного перехода), а также для кривых (алгебраических многообразий) над полем произвольной характеристики. Подробности, а также обобщения и различные сюжеты, связанные с задачей, см. [2–5].

3. Решение задачи 11.8 можно сформулировать, опираясь на важное понятие внешнего произведения. *Внешнее произведение набора векторов* $\bigwedge$ есть элемент пространства, на них натянутого. Этот элемент можно представлять как ориентированный параллелепипед. Численная величина внешнего произведения есть ориентированный объём. При перестановке двух векторов внешнее произведение меняет знак. Внешнее произведение параллелепипедов Π_i, заданных наборами векторов $\{\vec{e_{ij}}\}$, есть внешнее произведение $\wedge_{ij}\vec{e}_{ij}$.

Внешнее произведение набора векторов равно нулю в точности тогда, когда векторы не находятся в общем положении. Поэтому утверждение следствия 3 можно сформулировать так:

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{PQ} = 0.$$

В доказательстве для многомерного случая равно нулю внешнее произведение векторов касательной плоскости в точке P, вектора $\vec{PQ}$ и произвольного касательного вектора к M_2 в точке Q.

Для освоения понятия внешнего произведения советуем обратиться к очень хорошей книге И. М. Гельфанда [1]. Рекомендуем также разобрать решение А. Скутина («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 19, 2015, с. 263) задачи 17.10 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 17, 2013, с. 197). Внешнее произведение обсуждается также в решении задачи («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 26, 2020, с. 266) на с. 266–267 настоящего выпуска.

Список литературы

[1] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, 1998.

[2] *Kanel-Belov A., Kaminski J., Teicher M.* Multi-Secant Lemma // Israel Journ. of Math. 2010. Vol. 177, № 1. P. 253–267.

[3] *Каминский Д. Й., Канель-Белов А. Я., Тайхер М.* Лемма о 3-секущих для многообразий с компонентами различной размерности // Фундамент. и прикл. матем. 2006. Т. 12, № 2. С. 71–87.

[4] *Nilov F., Skopenkov M.* A surface containing a line and a circle through each point is a quadric // Geometriae Dedicata. 2013. Vol. 163, № 1. P. 301–310.
[5] *Zak F.* Tangents and Secants of Algebraic Varieties. Providence: AMS, 1992.

Джереми Йирмеяху Каминский, Холонский технологический институт
kaminsj@hit.ac.il

Алексей Яковлевич Канель-Белов, университет Бар-Илана
kanel@mccme.ru

Мина Тайхер, университет Бар-Илана
teicher@math.biu.ac.il