# О задачах на линейное варьирование

А. Я. Канель-Белов

Рассмотрим вначале решения некоторых задач, опубликованных в «Математическом просвещении».

25.2 (выпуск 25, с. 167). Условие. Известно, что числа $x_1, \ldots, x_N$ удовлетворяют неравенствам:

$$x_1 + x_2 \geqslant 1, \quad x_2 + x_3 \geqslant 2, \quad \ldots, \quad x_N + x_1 \geqslant N.$$

Найдите минимум суммы $S = x_1 + \ldots + x_N$, если а) $N = 2019$; б) $N = 2020$.

(*Фольклор*)

Ответ: $\dfrac{1+\ldots+2019}{2} = 1\,019\,595$; б) $2(1+\ldots+1010) = 1\,021\,110$.

Решение. а) *Оценка* получается сложением всех неравенств:

$$2S = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_{2019} + x_1) \geqslant 1 + \ldots + 2019,$$

откуда $S \geqslant \dfrac{1+\ldots+2019}{2} = 1\,019\,595$.

Для построения *примера* достаточно показать, что все неравенства могут обратиться в равенства. Рассмотрим матрицу, отвечающую левой части соответствующей системы. Это ленточная матрица, где на главной диагонали стоит 1, сверху рядом с главной диагональю диагональ из единиц и в левом нижнем углу 1. Её определитель равен 2, поэтому система имеет единственное решение.

б) В отличие от предыдущего случая, все неравенства нельзя одновременно обратить в равенства: матрица системы будет вырождена.

*Оценка* получается сложением неравенств, начинающихся со слагаемых с чётным индексом:

$$x_2 + x_3 \geqslant 2, \quad x_4 + x_5 \geqslant 4, \quad \ldots, \quad x_{2020} + x_1 \geqslant 2020,$$

$$S = x_1 + \ldots + x_{2020} \geqslant 2(1 + \ldots + 1010) = 1010 \cdot 1011 = 1\,021\,110.$$

Работа поддержана грантом Israel science foundation № 1994/20.

*Пример* показывает, что равенство достижимо. Возьмём произвольные $x_2$ и $x_3$ такие, что $x_2+x_3=2$. Далее положим $x_{k+2}=x_k+1$ ($k=2,\ldots,2018$), $x_1=x_{2019}+1$. Все неравенства будут выполнены и при этом $S=1\,021\,110$.
(*А. Я. Канель-Белов*)

25.2′ (выпуск 26, с. 273)[1]. Условие. *На какую максимальную длину можно сдвинуть кирпичи в стенке из n кирпичей?*

*Кирпичи считаются двумерными (они имеют ненулевую длину и высоту, но нулевую ширину). Все кирпичи одинаковы. Кирпичи можно класть друг на друга (так что один может выступать над другим в длину). На каждый кирпич можно положить только один (на который, в свою очередь, можно положить ещё один, и т. д.).* (*Фольклор*)

В общем случае (когда на земле лежит один кирпич, но на каждый кирпич можно класть сколько угодно) ответ неизвестен. Было бы интересно получить асимптотику.

Ответ: на величину

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)}\right).$$

Решение. Пронумеруем кирпичи сверху вниз. Ясно, что первый кирпич может быть сдвинут относительно второго самое большее на $1/2$ — иначе он опрокинется. Система из $k$ верхних кирпичей может быть сдвинута относительно $(k+1)$-го так, чтобы её центр масс находился внутри этого кирпича, в крайнем случае на его границе. Эти условия можно записать на языке линейных неравенств:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} iS_i \leqslant \frac{1}{2}, \quad k=1,\ldots,n,$$

где $S_i$ — сдвиг $i$-го кирпича относительно $(i+1)$-го.

Будем сдвигать кирпичи в одну сторону, пока это возможно. В процессе движения некоторые наши неравенства превращаются в равенства, и мы это равенство сохраняем при дальнейшем движении. Если не все неравенства выродились в равенства, то ограничений меньше, чем параметров (т. е. сдвигов кирпичей) и можно продолжать движение. Ясно, что сколь угодно далеко (например, на расстояние больше $n$) верхний кирпич не выдвинуть, так что процесс закончится, т. е. все неравенства

[1] В ранее опубликованном условии имелась опечатка — упомянута высота вместо длины. Это классический сюжет, который обсуждается, в частности, в замечательной книге В. А. Уфнаровского «Математический аквариум» (М.: МЦНМО, 2017, с. 10–13). Правда, вопрос максимизации там не затрагивается.

превратятся в равенства. Индукцией по $k$ нетрудно показать, что тогда $S_k = 1/(2k)$, откуда следует ответ. (*А. Я. Канель-Белов*)

25.2$''$ (выпуск 26, с. 273). Условие. *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n, m$ — *вещественные числа. Число* $a_k$ *назовём* $m$-лидером, *если для некоторого* $t$, $1 \leqslant t \leqslant m$, *имеем* $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+t-1} \geqslant 0$. *Докажите, что сумма всех* $m$*-лидеров неотрицательна*[2]. (*Фольклор*)

Решение. Ясно, что выбрасывание нуля не меняет множество ненулевых $m$-лидеров, равно как и их сумму. Ясно также, что если остались ненулевые числа, то среди них есть положительное.

Пусть $a_k > 0$, $k > 1$. Заменим $a_{k-1}$ на $a_{k-1} + a_k$, а $a_k$ на 0. Непосредственно проверяется, что лидеры будут стоять на тех же позициях, что и раньше, и их сумма не изменится. Повторяя такую процедуру и выбрасывая нули, получаем, что останется не более одного положительного числа в самом начале, а все остальные числа отрицательны. Для этого случая задача очевидна. (*А. Я. Канель-Белов*)

Рассмотренные задачи 25.2, 25.2$'$, 25.2$''$ объединяет метод *линейного варьирования* (упомянутый в 26-м выпуске, с. 273). Он состоит в том, что если условия задачи заданы системой линейных уравнений или неравенств, то их можно «двигать», добиваясь максимального вырождения неравенств. (Полученное таким образом решение иногда «чистится», так что процедура линейного варьирования пропадает. То, что происходит с первоначальным решением в процессе «чистки», обсуждается в упомянутой книге В. А. Уфнаровского «Математический аквариум».)

Приведём ещё три примера задач на линейное варьирование.

**1.** Двое путешественников объезжают страну. Первый едет в самый дальний из городов, где он не был, второй — в самый ближний. Докажите, что маршрут первого не короче маршрута второго[3]. (*А. А. Берзиньш*)

Решение. Для начала *сведём ситуацию к случаю двух возможных расстояний*. Прибавив константу и отнормировав, можно считать, что все расстояния заключены в пределах от 100 до 101. Пусть $S_1$ — длина маршрута первого путешественника, $S_2$ — второго, и пусть $\Delta = S_2 - S_1 > 0$. Будем менять все расстояния между городами непрерывным образом и так, чтобы расстояния были в указанных пределах. Если расстояние стало равным 100 или 101, то мы его больше не меняем. Если какие-то расстояния стали одинаковыми, мы в дальнейшем меняем их одинаково.

---

[2] Как обычно в таких случаях, следует положить $a_{n+1} = a_1$ и т. д.

[3] В равносильной формулировке задача была предложена на 11-й Всесоюзной математической олимпиаде (1977 г., Таллин), 1 день, 9 класс, № 4.

Если при изменении каких-то расстояний $\Delta$ уменьшилось, то при противоположном изменении $\Delta$ увеличится. Будем действовать так, чтобы $\Delta$ не уменьшалось. Такой процесс можно продолжать, пока все расстояния не станут равными 100 или 101.

Первоначальные маршруты путешественников по-прежнему удовлетворяют условию задачи. Действительно, если условие нарушилось, то какие-то два расстояния $d$, $D$ с условием $d < D$ превратились в расстояния $d'$, $D'$ с условием $d' > D'$. Но в какой-то промежуточный момент они стали равными и после этого оставались равными — противоречие.

Теперь решим задачу *для случая двух возможных расстояний*. Рассмотрим множество $S_1$ городов, из которых выходят короткие (длиной 100) переходы первого путешественника, вместе с городом, который он посетил последним. Все попарные расстояния между этими городами равны 100. Действительно, если между какими-то из этих городов $C_1$ и $C_2$ есть длинный переход (длиной 101), причём вначале путешественник посетил $C_1$, то он пойдёт не в следующий город на расстоянии 100 от $C_1$, а направится в $C_2$, так что переход из $C_1$ окажется длинным, что противоречит выбору города $C_1$. Теперь построим множество $S_2$ городов, из которых выходят короткие переходы второго, вместе с последним городом, который он посетил. Аналогично все расстояния между городами из $S_2$ равны 101. Поэтому никакие два города не могут принадлежать одновременно множеству $S_1$ и множеству $S_2$.

Пусть $K_i$ есть число коротких переходов $i$-го путешественника, $L_i$ — число длинных переходов $i$-го ($i = 1, 2$). Тогда $K_i + L_i = n - 1$ (где $n$ — число городов). И поскольку путь первого оказался короче, $K_1 > K_2$, т. е. $K_1 \geqslant K_2 + 1$. Отсюда

$$|S_1| + |S_2| = (K_1 + 1) + (L_2 + 1) \geqslant K_2 + L_2 + 3 = n + 2.$$

Но тогда множества $S_1$ и $S_2$ пересекаются не менее чем по двум элементам, что, как мы видели, невозможно. Задача решена[4)].

**2** (Международная студенческая интернет-олимпиада по математике 2020 г. `https://www.ariel.ac.il/wp/i-olymp`, задача 9). Дан выпуклый четырёхугольник. Впишите в него параллелограмм так, чтобы его стороны имели данные направления. (*А. Я. Канель-Белов*)

---

[4)] Ещё одно решение, которое также использует линейное варьирование, см. в книге: *Башмаков М. И., Беккер Б. М., Гольховой В. М.* Задачи по математике. Алгебра и анализ. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. С. 191. Другое решение этой задачи см.: *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. С. 217.

Решение. Возьмём точку $P$ на стороне четырёхугольника $m$. Проведём из $P$ прямые данных направлений до пересечения с соседними сторонами. Полученный треугольник достроим до параллелограмма. Его вершина $P'$, противоположная $P$, не обязательно лежит на четвёртой стороне $n$ четырёхугольника. Однако если двигать $P$ с постоянной по стороне $m$, то точка $P'$ тоже движется с постоянной скоростью по прямой.

Поэтому берём на стороне $m$ две точки $P_1, P_2$, строим точки $P_1', P_2'$ и проводим прямую $P_1'P_2'$. Если она пересекает сторону $n$ в точке $P'$, то $P'$ — вершина искомого параллелограмма. Предоставляем читателю проанализировать, при каких условиях точка $P'$ попадает на продолжение стороны $n$, а также когда прямая $(P_1'P_2')$ параллельна прямой $(CD)$.

**3** (Теорема Холла для нагруженных графов). *Имеется $n$ юношей и $n$ девушек, каждому юноше нравятся несколько девушек* (*возможно, одна*) *и наоборот. Суммарная сила симпатии у каждого равна единице. Сила симпатии A к B равна силе симпатии B к A. Докажите, что можно поженить юношей с девушками так, чтобы между супругами была ненулевая симпатия.*

Доказательство. Пусть $X_1$ — юноша, ему нравится девушка $Y_1$, она симпатизирует ещё юноше $X_2$, $X_2$ симпатизирует $Y_2$ и т. д. Если цепочка кончится тупиком (человеком, которому никто не нравится, кроме предыдущего), то предыдущему человеку нравится только последний и на самом деле это изолированная пара, которую можно выбросить. В противном случае появляется цикл. Пусть $L$ — минимальная сила симпатии в этом цикле, ей отвечает ребро $E$. Вычтем $L$ из нагрузки (силы симпатии) ребра $E$ (тем самым его уничтожив), равно как и из нагрузки рёбер с номерами той же чётности в порядке прохождения цикла. В то же время прибавим $L$ к нагрузке рёбер с номерами противоположной чётности. Условие баланса сохранится, мы перешли к графу с меньшим числом рёбер и дальше действуем аналогично. □

Построенный алгоритм позволяет эффективно строить паросочетание и в частном случае — классической теореме Холла. Как видите, для построения эффективного алгоритма иногда бывает выгодно задачу обобщить.

Упражнения.

1. Матрица с неотрицательными коэффициентами называется *бистохастической*, если сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 1. *Матрица перестановки* есть матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой один элемент равен единице, а остальные нулю. Докажите, что бистохастическая матрица есть линейная

комбинация матриц перестановок с неотрицательными коэффициентами[5].

2. Известно, что сумма модулей попарных разностей набора неотрицательных чисел равна 1. Найдите наименьшее возможное значение суммы этих чисел.
3. Последовательность целых чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$ такова, что $x_0 = 0$ и $|x_n| = |x_{n+1} + 1|$ для каждого натурального $n$. Каково наименьшее возможное значение выражения $|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{1985}|$?
4. На складе 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых. При этом левых и правых поровну. Докажите, что 50 пар сапог можно составить.
5. Докажите, что площадь треугольника, вписанного в параллелограмм, не превосходит половины площади последнего.
   Более общий факт:
6. Докажите, что вершины максимального по площади $k$-угольника, вписанного в $n$-угольник, лежат на вершинах последнего.
7. Каждая диагональ пятиугольника отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей треугольников больше площади пятиугольника.
8. Внутри куба находится выпуклое тело, проекции которого на грани куба полностью их покрывают. Докажите, что минимальный объём этого тела — не менее 1/3 объёма куба.
9. На окружности отмечено $k$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$; при этом $a_1 = 1$, а сумма всех чисел равна нулю.
   а) Докажите, что найдутся два числа, отличающиеся не менее чем на $4/k$.
   б) Докажите, что найдётся число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее, чем на $8/k^2$. На какую наибольшую константу можно заменить число 8?
10. Какова максимальная площадь объединения $n$ треугольников, вписанных в единичную окружность?
11. Известно, что $a_0 + a_1 \cdot \cos x + \ldots + a_n \cdot \cos nx \geqslant -1$ при всех $x$. Докажите, что $a_0 + a_1 + \ldots + a_n \leqslant n$.
12. Докажите, что уравнение $x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n = 0$ при любых $a_i \geqslant 0$ не может иметь двух положительных корней.
13. *Округление* числа — это замена его любым из целых, между которыми оно заключено. Докажите, что можно так округлить числа из таблицы $n \times k$, чтобы суммы по строкам и по столбцам также округлились.

[5] Сравните с только что разобранной теоремой.

(Данная задача принадлежит А. П. Савину. Её развитием послужил проект А. В. Шаповалова «Округление сумм» на X Летней конференции Турнира городов: X Летняя конференция Турнира Городов. Информационный центр Турнира городов. М.: МЦНМО, 1999. С. 45–49 (условия), 133–144 (решения) `https://www.turgor.ru/lktg/1998/lktg1998.pdf`.)

14. Докажите, что можно так округлить $n$ произвольных чисел, чтобы сумма любого их множества после округления отличалась от его суммы до округления не более чем на $(n+1)/4$.
15. Пусть $\sum x_i = 1$ и $\forall\, i\ x_i \geqslant 0$. Найдите максимум
    а) $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1$;
    б) $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$.
16. Положительные числа $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_n$ таковы, что $a_1 + \ldots + a_k = b_1 + \ldots + b_n$. Докажите, что в прямоугольной таблице $k \times n$ можно расставить неотрицательные числа так, чтобы суммы чисел в строках равнялись $a_1, \ldots, a_k$, а в столбцах $b_1, \ldots, b_n$, причём нулей в таблице будет не менее $(k-1)(n-1)$.
17. Дана невозрастающая последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ такая, что $a_1 = 1/(2k)$, $\sum a_i = 1$. Докажите, что существует $k$ чисел, из которых самое маленькое больше половины самого большого.

Замечание. Метод линейного варьирования используется и в задачах 1.6 (выпуск 1, с. 194, см. решение: выпуск 5, с. 221–223; выпуск 10, с. 274) и 24.11 (выпуск 24, с. 177). См. также: *Канель А.*, *Ковальджи А.* Треугольники и катастрофы // Квант. 1992. № 11. С. 42–50; `https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Робертса_о_треугольниках`.

---

Алексей Яковлевич Канель-Белов, университет Бар-Илана
kanel@mccme.ru