Одна задача о треугольниках, вписанных в конику

А. А. Заславский, А. И. Сгибнев

Статья посвящена решению задачи 26.5 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 26, 2020, с. 266).

Задача 26.5. Даны коника Γ и её хорда AB. Найдите геометрическое место ортоцентров вписанных в Γ треугольников ABC.

(*А. А. Заславский, А. И. Сгибнев*)

Для начала отметим известные частные случаи задачи.

Предложение 1. *Если* Γ *— окружность, то искомое ГМТ — окружность, симметричная* Γ *относительно* AB.

Для доказательства достаточно заметить, что точка, симметричная ортоцентру H относительно AB, лежит на окружности Γ.

Предложение 2. *Если* Γ *— равносторонняя гипербола, то искомое ГМТ совпадает с* Γ.

Несколько различных доказательств этого факта приведены в книге [1]. Например, можно воспользоваться теоремой о пучке коник и тем фактом, что в уравнении коники сумма коэффициентов при квадратах координат равна нулю в точности тогда, когда коника является равносторонней гиперболой или парой перпендикулярных прямых.

Перейдём к общему случаю. Качественный ответ на вопрос задачи можно дать с помощью следующей леммы (доказательство см. [1, с. 123]).

Лемма 1. *Пусть даны точки A, B и преобразование f, которое сопоставляет каждой прямой l, проходящей через A, прямую $f(l)$, проходящую через B, причём f проективно (т. е. сохраняет двойные отношения четвёрок прямых). Тогда геометрическим местом точек пересечения l и $f(l)$ является коника, проходящая через A и B. Если при этом $f(AB) = AB$, то коника распадается на две прямые, одна из которых совпадает с AB.*

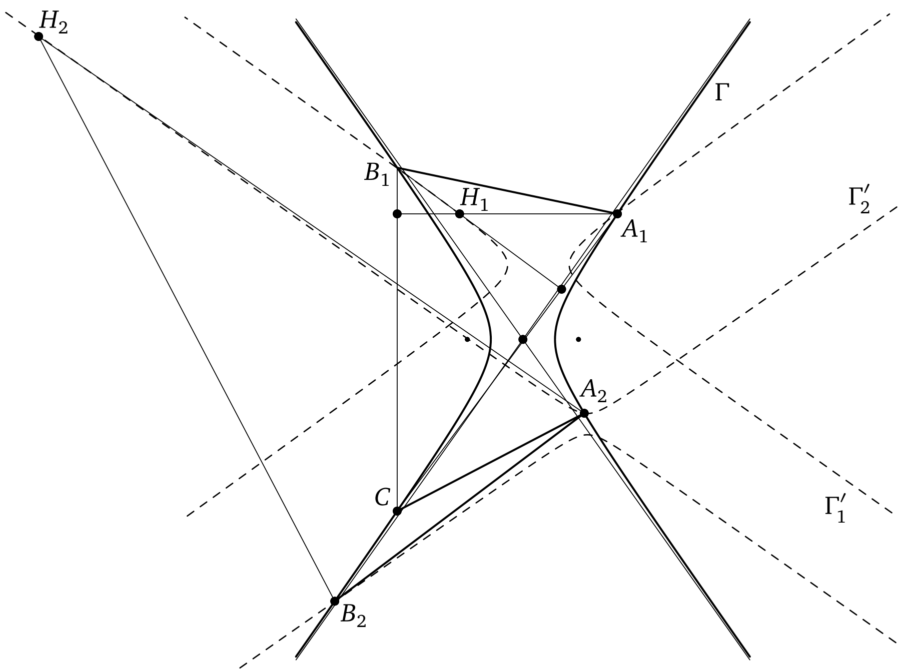

Рис. 1

Преобразование, ставящее в соответствие прямой AC прямую BC (где C — произвольная точка), проективно. Следовательно, соответствие между перпендикулярными прямыми AH и BH также проективно и из леммы 1 следует, что геометрическим местом ортоцентров также будет коника, обозначим её Γ'. Более того, асимптоты Γ' (действительные или мнимые) перпендикулярны асимптотам Γ, откуда получаем

Предложение 3. 1. *Если Γ — эллипс, то Γ' — эллипс, подобный Γ, причём большие оси Γ и Γ' перпендикулярны.*

2. *Если Γ — гипербола и хорда AB перпендикулярна одной из её асимптот, то Γ' — прямая, перпендикулярная второй асимптоте* (*саму прямую AB в этом случае логично тоже включать в ГМТ, так как при стремлении точки C к бесконечности обе прямые AH, BH стремятся к AB*). *В остальных случаях Γ' — гипербола с асимптотами, перпендикулярными асимптотам Γ. Действительные оси Γ и Γ' могут при этом быть как параллельными, так и перпендикулярными* (рис. 1).

3. *Если Γ — парабола и хорда AB перпендикулярна её оси, то Γ' — прямая, параллельная AB* (*саму прямую AB в этом случае логично тоже включать в ГМТ*). *В остальных случаях Γ' — парабола с осью, перпендикулярной оси Γ* (рис. 2).

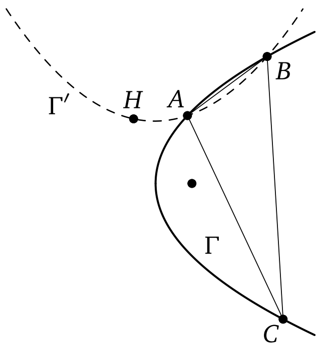

Рис. 2

Для более точного описания коники Γ' используем аналитический подход. Выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс совпала с прямой AB. Тогда уравнение коники примет вид

$$(x-x_A)(x-x_B)+y(ax+by+c)=0. \qquad (1)$$

Ортоцентр H треугольника ABC имеет координаты (x_C, h), где h находится из условия перпендикулярности прямых AH и BC, т. е.

$$(x_C-x_A)(x_C-x_B)+y_Ch=0.$$

Если $b=0$ (т. е. у Γ есть асимптота, параллельная оси ординат), то $h=-(ax_C+c)$ и H лежит на прямой, перпендикулярной второй асимптоте (при $a=0$ оси параболы). При $a\neq 0$ эта прямая пересекает AB в точке, являющейся проекцией центра гиперболы.

При $b\neq 0$ прямая $x=x_C$ вторично пересекает Γ в точке с координатами (x_C, y') и по теореме Виета $(x_C-x_A)(x_C-x_B)=by_Cy'$. Следовательно, $h=-by'$, т. е. *коника* Γ' *является образом* Γ *при сжатии к прямой* AB. Заметим, что коэффициент сжатия, равный $-b$, не меняется при параллельном переносе системы координат, следовательно, размеры коники Γ' зависят только от направления хорды AB. Точнее, можно сформулировать следующее

Предложение 4. *Пусть* A_1B_1, A_2B_2 *— две параллельные хорды коники* Γ, *а* H_1, H_2 *— ортоцентры треугольников* A_1B_1C, A_2B_2C. *Тогда вектор* H_1H_2 *не зависит от точки* C (рис. 3).

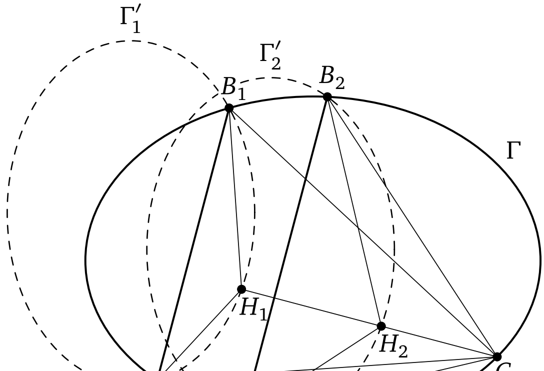

Рис. 3

Если Γ — не парабола, то коэффициент b в уравнении (1) равен отношению квадратов диаметров, параллельного и перпендикулярного хорде AB (для гиперболы один или оба диаметра могут быть мнимыми). Это позволяет получить ещё одно описание коники Γ'.

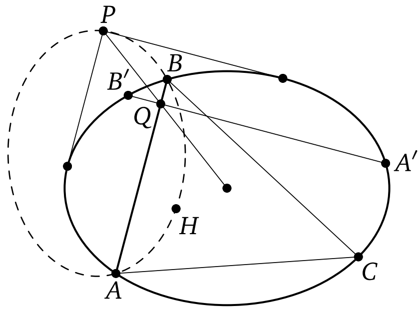

Рис. 4

Предложение 5. *Проведём касательные к* Γ, *параллельную и перпендикулярную* AB. *Пусть* P — *точка их пересечения,* Q — *точка пересечения* AB *с диаметром, проходящим через* P, $A'B'$ — *хорда, проходящая через* Q *и перпендикулярная* AB. *Тогда поворотная гомотетия с центром* Q, *переводящая* $A'B'$ *в* AB, *переводит* Γ *в* Γ' (рис. 4).

Для гиперболы коэффициент поворотной гомотетии может оказаться мнимым. В этом случае направления действительных осей Γ и Γ' совпадают. Для параболы предложение 5 также будет справедливо, если заменить диаметр на прямую, параллельную оси.

В заключение отметим, что если Γ — окружность или равносторонняя гипербола, то коэффициент сжатия равен соответственно -1 и 1, что позволяет получить альтернативные доказательства предложений 1 и 2.

Список литературы

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН, МЭИ

zaslavsky@mccme.ru

Алексей Иванович Сгибнев, школа «Интеллектуал» (Москва)

a.i.sgibnev@gmail.com