Об инвариантах равносоставленности

И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов

Многие задачи решаются с помощью построения полной системы инвариантов, характеризующих некоторый тип математических объектов. Например, это понятие оказывается полезным в следующей задаче, опубликованной в «Математическом просвещении» (сер. 3, вып. 26, 2020, с. 266).

Задача 26.6. Две фигуры на плоскости называются *равносоставленными*, если одну из них можно *перекроить* в другую. Это означает, что фигуру можно разрезать на конечное число частей, из которых можно сложить вторую фигуру (части можно параллельно переносить и поворачивать, но не переворачивать на другую сторону). Если это можно сделать, перенося части параллельно самим себе, но не поворачивая, то фигуры называются *T-равносоставленными*. Для пространственных тел определения аналогичны.

а) Даны два многоугольника на плоскости (не обязательно выпуклых). При каком условии они T-равносоставлены? (*Фольклор*)

б) Докажите, что любые два параллелепипеда одинакового объёма T-равносоставлены. (*Г. Хадвигер*)

в) Даны две фигуры на плоскости, их границы — участки окружностей и отрезки. При каком условии эти фигуры равносоставлены? Тот же вопрос, когда к частям фигур можно дополнительно применять гомотетии. (*Фольклор*)

г) Можно ли круг перекроить в выпуклую фигуру, отличную от круга? Можно ли две выпуклые фигуры, чьи границы состоят из участков окружностей, перекроить в одну? (*И. А. Иванов-Погодаев*)

Решение. а) Укажем полную систему инвариантов, которая определяет T-равносоставленность. Прежде всего, это *площадь*. Далее, с каждым ориентированным направлением $\vec{L}$ свяжем *сумму длин сторон фигуры*,

Работа поддержана грантом Israel science foundation № 1994/20.

параллельных $\vec{L}$, со знаком: для стороны, лежащей слева от фигуры, если смотреть в направлении $\vec{L}$, знак будет плюс, в противном случае минус. Легко видеть, что стороны, параллельные $\vec{L}$, при разрезании фигуры возникают парами равной длины с противоположными знаками. Кроме того, наша сумма не меняется при параллельном переносе. Поэтому она — *инвариант*. Остаётся показать, что *площадь вместе с набором указанных сумм по всем $\vec{L}$ образует полную систему инвариантов*.

Выберем ортогональную систему координат XOY. Направления, параллельные осям координат, будем называть *осевыми*, а не параллельные — *косыми*. Считаем, что все изначальные направления сторон косые, так что инварианты, связанные с осевыми направлениями, — нулевые. Преобразуем фигуру следующим образом.

Шаг 1. Добиваемся, чтобы *в каждой из фигур у косых участков не было общих вершин* (вначале все вершины таковы). Если такая вершина есть, вырезаем около границы маленький прямоугольник со сторонами осевых направлений, диагональ которого имеет направление одного из участков, примыкающих к этой вершине. Разрезав прямоугольник по этой диагонали, приложим один из треугольников к данному участку.

Шаг 2. Для данного $\vec{L}$ берём в каждой фигуре граничный участок минимальной длины, параллельный $\vec{L}$, соединяем его концы близкой ломаной внутри фигуры со звеньями осевых направлений (для этого нам нужен шаг 1 — иначе два соседних граничных участка могут образовать острый угол, в котором нет осевых направлений, вырезаем полученную полоску и прикладываем к звену противоположного знака. Таким образом мы уменьшаем суммарную длину косых звеньев (сохраняя свойство, полученное на первом шаге). В итоге мы добьёмся того, что *все граничные косые звенья у обеих фигур Φ и Φ' — одного знака*.

Шаг 3. Для данного $\vec{L}$ берём в паре фигур Φ и Φ' звено s минимальной длины среди звеньев, параллельных $\vec{L}$ (пусть это звено фигуры Φ). Находим звено того же направления в фигуре Φ' и отмечаем на нём отрезок s', равный s. Соединяем концы каждого из звеньев s и s' близкими к ним ломаными b и b' соответственно, имеющими звенья осевых направлений и такими, чтобы фигурки, ограниченные контурами sb и $s'b'$, были равны (для этого нам снова нужен шаг 1 — если два граничных звена образуют острый угол, не содержащий осевого направления, у нас ничего не получится). Выбрасывая эти фигурки, мы сохраним итог первого и второго шага и уменьшим число косых граничных фрагментов. В итоге мы добьёмся того, что *все косые звенья у обеих фигур Φ и Φ' исчезнут*.

Шаг 4. Итак, мы избавились от косых участков. Каждая фигурка без косых участков на границе разбивается на прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат. Остаётся проверить, что каждый набор из таких прямоугольников превращается в квадрат. Квадраты, полученные из фигурок Φ и Φ', окажутся равными в силу равенства площадей.

Возьмём квадрат нужной площади и разрежем его параллельно одной из сторон на прямоугольники, соответственно равновеликие данным. Достаточно показать, что равновеликие прямоугольники T-равносоставлены. Это доказано для любых равновеликих параллелограммов в статье С. Б. Гашкова «Разрезы и распилы» в настоящем выпуске (с. 216, задача 44).

Замечание. Утверждение п. а) обобщается на многомерный случай. Только инвариантом теперь является *флаг*: направление грани, направления граней этой грани, направления граней этой грани и т. д.

б) Решение этого пункта содержится в статье С. Б. Гашкова «Разрезы и распилы» опубликованной в этом выпуске (с. 219–221).

в) Решение похоже на решение п. а). Снова убеждаемся, что величина «*сумма длин выпуклых дуг минус сумма длин вогнутых дуг радиуса r*» является инвариантом для любого r. Добавим к этой системе инвариантов *площадь* и покажем, что *полученная система инвариантов полна*.

Шаг 1. Разрезав, если нужно, фигуры Φ и Φ', считаем, что у каждой из фигур есть прямолинейные участки границы. Пусть у одной из фигур есть и граничная дуга. Вырежем маленький прямоугольник (у прямолинейного участка границы), противоположные вершины которого соединены такой же дугой. Разрежем его по этой дуге и приложим к граничной дуге нужную половинку прямоугольника. Обработав все такие контакты, считаем, что *у граничных дуг нет общих вершин*.

Шаг 2. Для данного r берём дугу минимальной длины радиуса r, соединяем её концы близкой ломаной (для этого нам нужен шаг 1 — иначе две граничные дуги равного радиуса могут касаться и у нас ничего не получится) и прикладываем к дуге противоположного типа. Таким образом мы уменьшаем количество дуг (сохраняя свойство, достигнутое на первом шаге). В итоге мы добьёмся того, что *все граничные дуги у обеих фигур Φ и Φ' — одного знака*.

Шаг 3. Для данного r берём в паре фигур Φ и Φ' дугу s минимальной длины среди выпуклых или вогнутых радиуса r (пусть это дуга фигуры Φ), находим дугу того же направления в фигуре Φ' и откладываем на ней дугу той же длины s'. Соединяем концы каждой из дуг s и s' близкими к ним ломаными b и b' соответственно, так чтобы фигурки ϕ и ϕ', ограниченные контурами sb и $s'b'$, были равны. Для этого нам также нужен шаг 1: если две граничные дуги равного радиуса касаются, образуя остриё, то у нас ничего не получится. Выбрасывая фигурки ϕ и ϕ', мы сохраним итог первого и второго шага и уменьшим число криволинейных граничных фрагментов. В итоге мы добьёмся того, что *все граничные дуги у обеих фигур* Φ *и* Φ' *исчезнут*.

Шаг 4. Итак, мы избавились от криволинейных участков. Осталось применить знаменитую *теорему Бойяи — Гервина*, утверждающую, что *равновеликие фигуры с границами из прямолинейных участков равносоставлены*.

В ситуации, когда *разрешены гомотетии*, можно скопировать доказательство с небольшими измерениями, но мы сведём задачу к уже полученному результату. Для этого действуем так. Выполняем *шаг 1.* Далее режем каждую фигуру Φ_i на фигурки с единственным криволинейным участком границы и хотя бы одну фигурку с границей из прямолинейных участков.

Теперь гомотетией приведём фигурки с криволинейным участком к одному и тому же радиусу кривизны. Все граничные инварианты у преобразованных фигурок Φ_i совпадут. Осталось разобраться с площадями. Для этого выберем из разбиения каждой Φ_i по одной фигурке ϕ_i с только прямолинейными границами. Растянув их подходящим образом, обеспечим совпадение площадей, не изменив остальные инварианты. Остаётся воспользоваться уже решённой задачей о полноте системы инвариантов для евклидовых движений без гомотетий.

г) Покажем, что *круг нельзя перекроить в выпуклую фигуру* Φ, *отличную от круга*. Пусть это возможно. В силу только что доказанного, граница фигуры будет составлена из дуг, образующих полную окружность, и прямолинейных участков (если бы таких участков не было, выпуклая фигура являлась бы кругом). При обходе дуг касательный вектор поворачивается в сумме на 2π. На прямолинейных участках он не поворачивается, а на стыках участков может поворачиваться только в одну сторону ввиду выпуклости фигуры. Но суммарный поворот при обходе выпуклой фигуры равен 2π, поэтому на стыках участков касательный вектор не поворачивается, т. е. соседние участки имеют на стыке одинаковое направление.

Убедимся, что площадь Φ строго больше площади круга. Для этого снимем с Φ и с круга «шкуру» толщины ε. Возникнет фигура с тем же свойством, при этом около криволинейных участков границы снимется столько же, сколько с круга (с учётом того, что соседние граничные участки касаются). Ещё что-то снимется с прямолинейных участков, т. е. в итоге снимется больше, чем с круга. Процесс продолжается до исчезновения граничных участков. К этому моменту от фигуры отнимется строго больше чем площадь круга. Поэтому и площадь фигуры строго больше.

Замечание 1. Фактически мы доказали, что если у выпуклой фигуры граница состоит из прямолинейных участков и полного набора дуг круга, то фигура есть сумма по Минковскому круга и выпуклого множества (например, отрезка).

Замечание 2. Решение задачи вытекает также из формулы, позволяющей по границе выпуклой фигуры определять её площадь. Разобьём границу фигуры на бесконечно малые участки ds_i. Тогда её площадь будет равна

$$\sum_{ij} |ds_i \wedge ds_j| \quad \text{или} \quad \iint d\vec{s} \wedge d\vec{l},$$

где $\wedge$ обозначает *внешнее произведение*. О понятии внешнего произведения см. `https://ru.wikipedia.org/wiki/Внешняя_алгебра`, а также: *Каминский Дж. Й., Канель-Белов А. Я., Тайхер М.* «Задача о 3-секущих» (настоящий выпуск, с. 171–174).

Для многомерного случая общая формула имеет вид

$$V = \frac{1}{2^n} \iint \ldots \int \Big| \bigwedge d\vec{n}_i \Big|.$$

Приведём теперь *примеры, когда две выпуклые фигуры, чьи границы состоят из участков окружностей, можно перекроить в одну.*

Пример 1. Разрезав криволинейный шестиугольник с дугами в качестве сторон, можно сложить криволинейный «квадрат» и линзу (рис. 1).

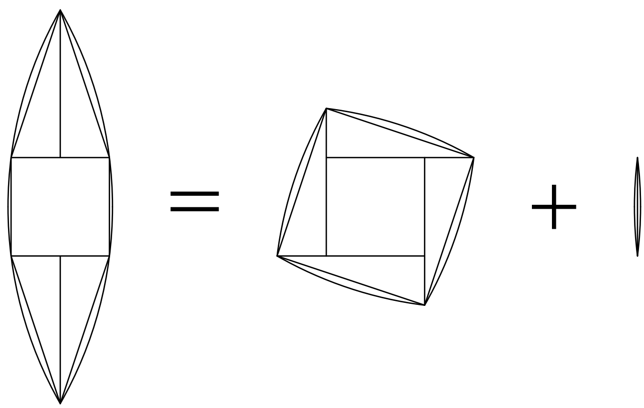

Рис. 1

Пример 2. Рассмотрим трапецию $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = 1$ и площадь равна площади правильного треугольника со стороной 1. Известно, что из любого многоугольника, разрезав его на подходящие части, можно сложить любой другой многоугольник той же площади; разрежем

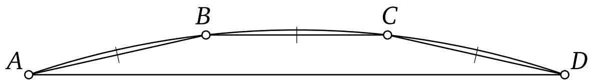

Рис. 2

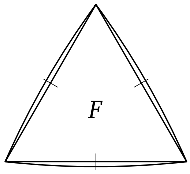

Рис. 3

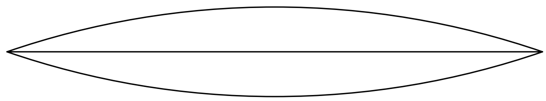

Рис. 4

трапецию на несколько многоугольников и сложим из них правильный треугольник. Проведём теперь дугу окружности через вершины трапеции. Отрезав от сегмента, ограниченного дугой и отрезком AD, три маленьких сегмента по сторонам трапеции AB, BC, CD (рис. 2) и приставив их к сторонам правильного треугольника, получим выпуклую фигуру F (рис. 3), ограниченную тремя дугами окружностей. Тогда фигуру, составленную из двух таких сегментов, симметричных относительно общей хорды (рис. 4), можно разрезать на части и сложить из них две фигуры, равные F.

Пример 3 (набросок). Основная идея построения — сначала создать два многоугольника, множество сторон которых эквивалентно множеству сторон другого многоугольника.

Рассмотрим два правильных 10-угольника с единичными сторонами и правильный 20-угольник также с единичными сторонами. Нетрудно видеть, что площадь 20-угольника превосходит суммарную площадь 10-угольников. Возьмём 20-угольник за две противоположные стороны и будем тянуть в противоположных направлениях, не меняя длины сторон, а меняя лишь величины углов. Пусть углы вершин, за которые мы тянем, уменьшаются, а остальные углы увеличиваются. Очевидно, площадь такого всё более сужающегося 20-угольника уменьшается, поэтому в какой-то момент она сравняется с суммарной площадью двух 10-угольников. В этот момент мы процесс заканчиваем и выбираем радиус окружности настолько большим, чтобы её сегменты с хордой 1, приклеенные к сторонам 20-угольника и 10-угольников, не нарушали выпуклость. Для обклеивания 20-угольника и 10-угольников понадобится одинаковый набор таких сегментов. Осталось применить теорему о равносоставленности любых многоугольников одинаковой площади.

Замечание 3. Приведём подборку задач на *полноту системы инвариантов*.

1. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета? Докажите, что для проверки этой возможности достаточно совпадения попарных разностей количеств хамелеонов разных цветов по модулю 3.
2. По кругу стоят 44 дерева, на каждом — по чижу. За каждую секунду один чиж смещается на 1 по часовой стрелке, а другой — против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве? Когда от одного расположения чижей можно перейти к другому?
3. В клетках квадратной таблицы $m \times m$ расставлены плюсы и минусы. Известно, что в каждом подквадратике 2×2 стоит чётное число плюсов. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что все знаки можно сделать плюсами.
4. Имеется несколько лампочек и несколько кнопок, каждая кнопка соединена с некоторыми из лампочек. Нажатие кнопки меняет состояние соединённых с ней лампочек на противоположное. Известно, что для каждого набора лампочек найдётся кнопка, соединённая с нечётным числом лампочек из данного набора. Докажите, что все лампочки можно погасить.
5. Имеется несколько лампочек и несколько кнопок, каждая кнопка соединена с некоторыми из лампочек. Нажатие кнопки меняет состояние соединённых с ней лампочек на противоположное. Назовём инвариантом такой набор лампочек, что каждая кнопка соединена с чётным числом лампочек из данного набора. Докажите, что если изначально в каждом инварианте горит чётное число лампочек, то все лампочки можно погасить.

Илья Анатольевич Иванов-Погодаев, МФТИ
ivanov-pogodaev@mail.ru

Алексей Яковлевич Канель-Белов, университет Бар-Илана
kanel@mccme.ru