Разрезы и распилы

С. Б. Гашков

§ 1. Введение

Речь пойдёт о некоторых типах задач на разрезание плоских фигур и распиливание пространственных тел. Задач на разрезание очень много. Значительная их часть — это головоломки (задачи частного характера с искусственными формулировками в виде, скажем, различных ограничений или с использованием экзотических фигур). В большом количестве они представлены в сборниках головоломок и занимательных задач (см., например, [8, 11, 12, 21, 31]), но встречаются также в сборниках задач по геометрии (например, [13]) и в сборниках олимпиадных задач (см. [14–16]).

Далее рассматриваются некоторые задачи, представляющие математический, а иногда и определённый прикладной интерес. Они, как правило, имеют достаточно общий характер. Основное внимание уделяется задачам на преобразование фигур с помощью полигональных разрезаний (хотя некоторые приведённые далее утверждения верны и для криволинейных разрезов). К их числу относятся, например, задача Бойяи — Гервина о превращении одного многоугольника в другой и её частные случаи. Некоторые из них известны с незапамятных времён и, вероятно, возникли (одновременно с самой геометрией) как ответы на практические вопросы (например, о перекройке кусков материи или земельных участков). Поэтому такие задачи естественно формулировать в форме оптимизационных задач.

Напрашиваются различные варианты их постановки. Можно минимизировать число частей, на которые разрезается одна фигура для преобразования в другую путём перемещения этих частей. Можно также минимизировать не число частей, а число прямолинейных разрезов. Тогда опять возможны различные варианты:

— когда разрезы делаются последовательно и очередной кусок режется по прямой от края до края, причём полученные части не сдвигаются до окончания выполнения всех разрезов («гильотинные» разрезы или разрезы стеклорезом; в этом случае число получившихся частей на единицу больше числа разрезов — известная задачка для младших школьников о числе разломов шоколадки);

— когда разрезы делаются произвольно, т. е. общие границы получающихся частей могут быть ломаными линиями и под числом разрезов понимается общее число их звеньев, не лежащих на границе фигуры (например, в задачах 3, 5);

— в предыдущем варианте можно выделить отдельно случай, когда любые два соприкасающихся куска имеют только общую вершину или общая часть их границ является отрезком («стеклорезное» разрезание обладает таким свойством, но не любое разрезание с таким свойством — «стеклорезное»).

Во всех вариантах можно разрешить передвигать части перед тем, как сделать следующий разрез, тогда число вариантов удвоится. Ещё один вариант возникает в случае «стеклорезных» разрезаний: если два или несколько разрезов вдоль одной прямой можно заменить одним разрезом (рассекающим несколько кусков сразу), то его один и надо рассматривать вместо упомянутых нескольких.

Возможно, в некоторых случаях больший прикладной интерес представляет задача минимизации не числа разрезов или количества частей, а их суммарной длины (например, при перераспределении земельных участков или при перекройке кусков ткани).

Задачи о преобразовании фигур путём разрезания можно перенести и в трёхмерное, и даже в многомерное пространство. Часть из них представляют теоретический интерес и оказались очень трудными (о таких задачах идёт речь в третьей проблеме Гильберта, см., например, [3, 25]). Некоторые из таких задач имеют приложения в теории меры (см. [22]).

Задачи о разрезании можно рассматривать и в теоретико-множественной постановке, а именно, искать разрезание на части, которые не пересекаются как множества (в первоначальной формулировке разные части могли иметь частично общую границу). Такая постановка не имеет практического смысла (получающиеся в ней части являются не многоугольниками, а иногда довольно сложными точечными множествами), но любопытна с теоретической точки зрения (см. [23]). Минимизировать в ней можно только число частей. К таким задачам относится знаменитый парадокс Банаха — Тарского для многомерного пространства (см., например, [7, 29, 37, 39, 41]). На плоскости этого парадокса нет, и те же авторы доказали соответствующий вариант теоремы Бойяи — Гервина.

§ 2. Перекройка скатерти в ремень

Сначала предложим читателю несколько несложных задач на эту тему.

Задача 1. Превратите прямоугольник с отношением сторон 4:1 в квадрат, разрезав его на две части.

Задача 2. Преобразовать в квадрат прямоугольник со сторонами 1×2, 1×3, 2×3, 1×5, 2×5, 4×9.

Задача 3. Как превратить прямоугольник размера 6×60 в прямоугольник размера 5×72, 4×90, 3×120, разрезав его на две части?

В каком смысле понимать оптимальность перекройки? Можно минимизировать число частей, появившихся при разрезании, но мы рассмотрим задачу о минимизации суммарной длины разрезов. Начнём со следующей задачи, тридцать лет назад предложенной автором на Московскую математическую олимпиаду.

Задача 4 (LII Московская математическая олимпиада, 1989 г., 10 класс, задача 5). Вычислить с точностью до 2 наименьшую суммарную длину разрезов, которые необходимо сделать, чтобы перекроить единичный квадрат в прямоугольник с диагональю, равной 100.

Решение можно найти в [16], но для удобства читателя ниже приводятся два его варианта.

Первое решение. Обозначим через $L(a)$ наименьшую суммарную длину разрезов, необходимую для перекройки единичного квадрата в прямоугольник размера $a\times 1/a$, $a>1$ (тонкий вопрос о достижимости минимума далее не существенен и не обсуждается). Докажем, что

$$a+\frac{1}{a}-2\leqslant L(a)\leqslant a+\frac{1}{a},$$

что даёт решение задачи.

Нижняя оценка. Пусть квадрат разрезан на n многоугольников M_i с периметрами p_i, $i=1,\ldots,n$. Очевидно, сумма всех p_i равна $4+2L(a)$, так как эта сумма равна периметру квадрата, т. е. 4, плюс удвоенная суммарная длина разрезов. Действительно, в ней длина каждой стороны многоугольника M_i учитывается один раз, если сторона лежит на границе квадрата, и два раза, если она лежит внутри квадрата. В последнем случае она является общей стороной двух соседних многоугольников M_i, M_j, поэтому лежит на линии разреза и учитывается в его суммарной длине. Перемещая многоугольники M_i (без пересечений друг с другом по внутренним точкам), по условию можно составить из них прямоугольник размера $a\times 1/a$ с периметром $2a+2/a$. Так как при перемещениях периметры многоугольников не меняются, повторяя уже проведённое рассуждение, получаем, что сумма всех p_i равна $2a + 2/a + 2L'(a)$, где $L'(a)$ — сумма длин разрезов прямоугольника, которые дают указанное выше разбиение его на сдвиги многоугольников M_i. Отсюда

$$4+2L(a)=2a+\frac{2}{a}+2L'(a),$$

т. е.

$$L(a)=a+\frac{1}{a}+L'(a)-2>a+\frac{1}{a}-2$$

(можно доказать, что если $L'(a)$ — наименьшая суммарная длина разрезов, необходимая для перекройки прямоугольника размера $a\times 1/a$ в единичный квадрат, то

$$L(a)=a+\frac{1}{a}+L'(a)-2,$$

но это далее не понадобится).

Рис. 1. Жан-Этьен Монтюкла (1725–1799)

Верхняя оценка. Достаточно указать разрезание с длиной $a+1/a$. Его можно получить следующим образом (рис. 2). Это разрезание, по-видимому, впервые найдено известным французским математиком и историком математики Жаном-Этьеном Монтюкла (1725–1799) (об этом и о многом другом автор узнал, случайно купив книжку [21], впервые изданную ещё в начале двадцатого века, но переизданную только в 2000 г.).

Составим из $\lfloor\sqrt{a^2-1}\rfloor+1$ единичных квадратов прямоугольник размера $1\times\lfloor\sqrt{a^2-1}\rfloor+1$. Наложим на него параллелограмм единичной площади со сторонами 1 и a так, чтобы единичная сторона совпала с той

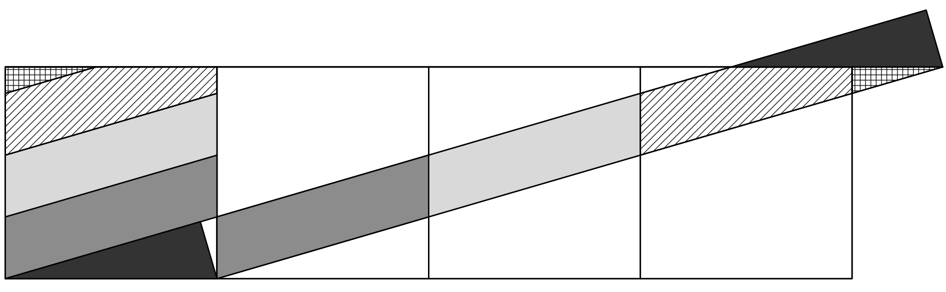

Рис. 2. Превращение единичного квадрата в прямоугольник размера $a\times 1/a$ с суммарной длиной разрезов $a+1/a$

стороной самого левого из квадратов, составляющих прямоугольник, которая лежит на длинной стороне прямоугольника, а другая единичная сторона лежала на противоположной стороне прямоугольника (вылезая за его пределы, если $\sqrt{a^2-1}$ — нецелое число). Квадраты, из которых составлен прямоугольник, разрезают указанный параллелограмм на $\lfloor\sqrt{a^2-1}\rfloor-1$ равных параллелограммов (если $a<\sqrt{2}$, то их вообще не будет), один пятиугольник и два треугольника (если $\sqrt{a^2-1}$ — целое число, пятиугольника не будет). Параллельно перенося указанные части параллелограмма, можно составить из них единичный квадрат (на рисунке он слева, одинаковые части покрашены одним цветом). Сумма длин разрезов единичного квадрата, после которых из его частей путём параллельного переноса можно составить указанный параллелограмм, равна длине боковой стороны параллелограмма a (это верно при любом $a>1$). Чтобы превратить параллелограмм в данный прямоугольник, достаточно провести ещё один разрез длины $1/a$ вдоль высоты параллелограмма, опущенной на боковую сторону так, чтобы эта высота разрезала треугольную часть параллелограмма на два подобных ей прямоугольных треугольника. Число частей, возникающих при указанном разрезании, равно $\lfloor\sqrt{a^2-1}\rfloor+3$ или на единицу меньше, если $\sqrt{a^2-1}$ — целое число. По условию задачи $a^2+1/a^2=100^2$, значит, число частей в этом разрезании равно 102.

Второе решение. Есть и другой способ разрезания (рис. 3).

Пусть $n<a<n+1$. Параллельными прямыми разрежем единичный квадрат на $n-1$ прямоугольников размера $1/a\times 1$ и один прямоугольник размера $b\times 1$, $b=1-(n-1)/a>1/a$. Суммарная длина разрезов равна

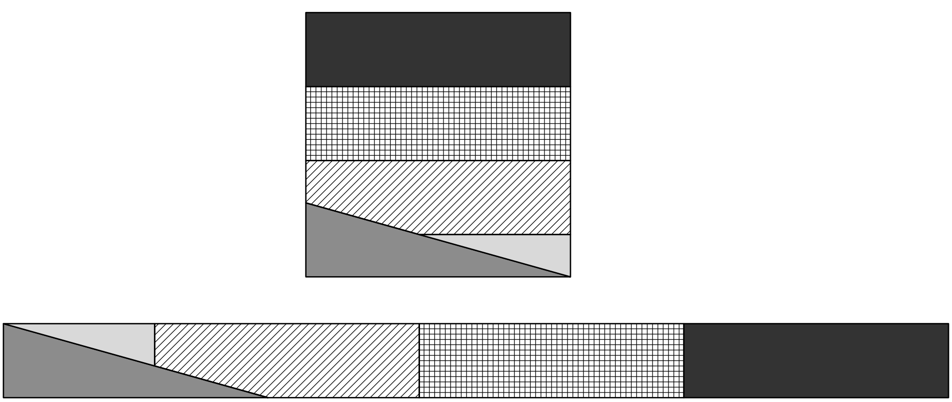

Рис. 3. Превращение единичного квадрата в прямоугольник размера $a\times 1/a$ с суммарной длиной разрезов $a+\sqrt{1+1/a^2}-1$

$n-1$. Последний прямоугольник разрежем на два треугольника и пятиугольник, проведя два разреза, один из которых отрезает прямоугольный треугольник с катетами 1 и $1/a$ (длина разреза равна его гипотенузе $\sqrt{1+1/a^2}$), а второй проводится параллельно единичной стороне и отрезает от оставшейся трапеции треугольник, подобный уже отрезанному, с катетами

$$b-\frac{1}{a}=1-\frac{n}{a},\quad a\left(b-\frac{1}{a}\right)=a\left(1-\frac{n}{a}\right)=a-n<1$$

(длина разреза равна катету $a-n$). Сдвигая параллельно полученные части, составим из них прямоугольник с высотой $1/a$ и длиной $1+(a-n)+$ $+(n-1)=a$. Суммарная длина разрезов равна

$$n-1+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+(a-n)=a-1+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}.$$

Так как $\sqrt{1+1/a^2}<1+1/a$ (гипотенуза меньше суммы катетов), суммарная длина указанных разрезов чуть меньше, чем в первом решении, и число полученных частей $n+2$ на одну меньше (в случае, если $\sqrt{a^2-1}$ — целое, число частей совпадает). В случае целого a очевидное разрезание на a равных прямоугольников имеет суммарную длину $a-1$, т. е. ещё меньше.

Указанную нижнюю оценку можно усилить: $L(a)\geqslant a-1$ для любого $a>1$. А для числа частей, полученных при разрезании, нижней оценкой является a. Обе оценки достигаются при целом a.

Сначала покажем, что справедлива

Лемма о транспозиции. *Пусть многоугольник периметра p_1 с помощью разрезов суммарной длины l_1 разрезан на n частей, после перемещения которых получен многоугольник периметра p_2. Тогда последний многоугольник можно разрезать с помощью разрезов суммарной длины $l_2=l_1+(p_1-p_2)/2$ на n частей, после перемещения которых можно получить исходный многоугольник периметра p_1.*

Доказательство. Пусть периметры получившихся фигур Q_i равны q_i, $i=1,\ldots,n$. Тогда справедливо равенство

$$q_1+\ldots+q_n=p_1+2l_1,$$

так как длины частей границ фигур Q_i, лежащих на границе многоугольника p_1, учитываются в сумме один раз, а длины частей их границ, лежащих на линиях разреза, — два раза.

Так как при перемещении фигур их периметры не меняются, справедливо аналогичное равенство

$$q_1+\ldots+q_n=p_2+2l_2,$$

откуда следует, что

$$p_1 + 2l_1 = p_2 + 2l_2.$$

Доказательство очевидно справедливо также для криволинейных разрезов и для криволинейных фигур. □

Следствие. *Если l_i — минимальная суммарная длина разрезов, нужных, чтобы перекроить данный многоугольник M_i периметра p_i в данный многоугольник (той же площади, конечно) периметра p_{3-i}, $i = 1, 2$, то справедливо равенство*

$$p_1 + 2l_1 = p_2 + 2l_2.$$

Доказательство. Предполагаем, что минимум длины разреза существует, в противном случае в формулировке следствия надо минимум заменить точной нижней гранью.

Пусть минимум l_1 достигается на некотором разрезе, который перекраивает M_1 в M_2. Тогда согласно лемме существует разрез длины $l_2 = l_1 + (p_1 - p_2)/2$, который перекраивает M_2 в M_1. Если бы существовал разрез меньшей длины l_2' для той же цели, то согласно той же лемме существовал бы разрез длины

$$l_1' = l_2' + \frac{p_2 - p_1}{2} < l_2 + \frac{p_2 - p_1}{2} = l_1,$$

перекраивающий M_1 в M_2, что невозможно.

Докажем теперь, что $L(a) \geqslant a - 1$ для любого $a > 1$. Пусть разрезами суммарной длины $L(a)$ можно разрезать единичный квадрат на части Q_i, $i = 1, \ldots, n$, из которых после перемещения составлен прямоугольник $a \times 1/a$, $a > 1$. Перемещённые фигуры Q_i по-прежнему обозначаем Q_i. Обозначим через q_i суммарную длину частей границы фигуры Q_i, не лежащих на границе прямоугольника $a \times 1/a$. Очевидно, $q_1 + \ldots + q_n$ равно удвоенной длине $l(a)$ разреза, делящего прямоугольник $a \times 1/a$ на части Q_i. Согласно лемме справедливо равенство

$$2L(a) + 4 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right) + 2l(a),$$

откуда $L(a) = a + 1/a - 2 + l(a)$. Докажем, что $l(a) \geqslant 1 - 1/a$, откуда будет следовать неравенство $L(a) \geqslant a - 1$. Очевидно, что при целом a указанная оценка точная (она достигается, если делать разрезы параллельно меньшей стороне прямоугольника на равных расстояниях друг от друга) Обозначим через s_i суммарную длину частей границы фигуры Q_i, лежащих на сторонах прямоугольника длины $1/a$ (возможно, $s_i = 0$), а через h_i — ширину минимальной полосы, накрывающей эту фигуру и имеющей края, параллельные стороне прямоугольника длины a. Рассмотрим две линии, ограничивающие фигуру Q_i вместе с краями указанной полосы. Очевидно, длина каждой из этих линий не меньше h_i, так как концы линии лежат на противоположных краях полосы и поэтому расстояние между ними не меньше h_i. Следовательно, $q_i \geqslant 2h_i - s_i$, так как указанные линии лежат на границе фигуры Q_i и за исключением своих частей суммарной длины s_i не лежат на границе прямоугольника $a \times 1/a$. Значит,

$$2l(a) = q_1 + \ldots + q_n \geqslant 2(h_1 + \ldots + h_n) - (s_1 + \ldots + s_n) \geqslant 2(h_1 + \ldots + h_n) - \frac{2}{a},$$

так как $s_1 + \ldots + s_n \leqslant 2/a$ (эти части не пересекаются и лежат на сторонах длины $1/a$). Остаётся доказать, что $h_1 + \ldots + h_n \geqslant 1$. Каждая из указанных полос ширины h_i накрывает фигуру Q_i. Так как после перемещения этих фигур они составляют единичный квадрат, указанные полосы после соответствующего перемещения покрывают тот же квадрат, а значит, и вписанный в него круг единичного диаметра.

Но, согласно известной теореме Тарского, сумма ширин дощечек, накрывающих круглое отверстие не меньше его диаметра. Значит,

$$h_1 + \ldots + h_n \geqslant 1$$

и неравенство $L(a) \geqslant a - 1$ доказано. Заметим ещё, что $h_i \leqslant 1/a$, так как каждый Q_i накрывается полосой ширины $1/a$, поэтому

$$\frac{n}{a} \geqslant h_1 + \ldots + h_n \geqslant 1,$$

откуда $n \geqslant a$. □

Для удобства читателя далее приводится доказательство теоремы Тарского о дощечках (приписываемое известному польскому математику Гуго Штейнгаузу). Это доказательство можно найти в [9, с. 75–100], в [17, с. 214–218] и в [20], там же приведены доказательства обобщающей теорему Тарского теоремы Банга, высказанной Тарским в качестве гипотезы, а также много других интересных фактов.

Рассмотрим сферу единичного диаметра и её проекцию на экваториальное сечение (т. е. на круг того же диаметра, являющийся сечением шара плоскостью, проходящей через его центр). Пусть этот круг покрыт n полосами ширины h_i, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим область сферы, проектирующуюся на полосу ширины h_i. Эта область является сферическим слоем (кольцом) ширины h_i. Согласно известной теореме элементарной стереометрии (известной ещё Архимеду), площадь сферического кольца радиуса R и ширины h равна $2\pi Rh$, а площадь всей сферы (являющейся слоем ширины $2R$) равна $4\pi R^2$. При $R = 1/2$ получаем, что площадь сферы равна π, а площади колец ширины h_i равны πh_i. Очевидно, указанные кольца накрывают в совокупности сферу, так как их проекции (полосы) накрывают круг (экваториальное сечение). Поэтому сумма их площадей $\pi(h_1 + \ldots + h_n)$ не меньше площади сферы, равной π.

§ 3. Альфред Тарский и разрезание прямоугольников

Выдающийся польский математик, логик и философ Альфред Тарский (живший потом в США), известный, например, своей теоремой об «арифметической невыразимости арифметической истины» (т. е. о том, что множество всех истинных формул арифметики само не является арифметическим множеством), в молодости преподавал геометрию и активно интересовался геометрией всю жизнь.

Рис. 4. Альфред Тарский (1901–1983)

Например, он разработал свою (компактную и удобную) аксиоматику евклидовой стереометрии, основанную только на одном тернарном отношении $J(A, B, C)$, которое истинно тогда и только тогда, когда треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Тарский показал, что аксиоматику планиметрии нельзя построить, используя только это отношение (см. об этом в [18]). Вместе с Банахом он открыл знаменитый парадокс Банаха — Тарского и доказал теоретико-множественную версию теоремы Бойяи — Гервина (см. § 8).

Из статьи [9] автор узнал, что Тарский в молодёжном польском математическом журнале в 30-е годы опубликовал статью [40], в которой оценил по порядку точно число частей, на которые надо разрезать квадрат, чтобы превратить его в равновеликий прямоугольник с отношением сторон $a^2 : 1$. Чуть позже Х. Мёзе [35] уточнил оценку Тарского и получил точную формулу в случае целого a (англ. перевод этих статей см. в [30, с. 135–151]). В его доказательстве в неявном виде и появилась впервые теорема Тарского о покрытии круга дощечками.

Обобщением задачи 3 является

Задача 5 (Тарский). Докажите, что прямоугольник с отношением сторон $(n+1)^2/n^2$, где n — целое число, можно превратить в квадрат, сделав один ломаный разрез (который делит прямоугольник на две части).

Указание. Общая граница двух частей будет ломаной с углами поворота 90 градусов.

§ 4. Перекройка простыни в платки

Первым эту задачу, по-видимому, изучал персидский математик Абул-Вафа (940–998). Она имеет понятный прикладной смысл: как сшить из трёх маленьких платков один большой? Обратная задача тоже представляет прикладной интерес.

Задача 6 (Абул-Вафа). Разрежьте квадрат на 9 частей и сложите из них три равных квадрата.

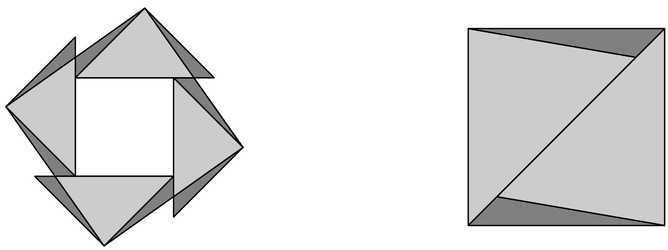

Рис. 5. Превращение квадрата в три равных квадрата и обратно способом Абул-Вафы

На рис. 5 справа показано, как разрезать два квадрата на 4 части каждый (эти разрезания одинаковы), при этом третий квадрат резать не надо. В обратном преобразовании квадрат режется на те же 9 частей, но число разрезов уже не 6, а девять. Способ Абул-Вафы очень красив, но не оптимален ни по числу частей, ни по суммарной длине разрезов. В этом можно убедиться, решив следующую задачу.

Задача 7 (Г. Дьюдени). Как разрезать квадрат на 6 частей и сложить из них три равных квадрата?

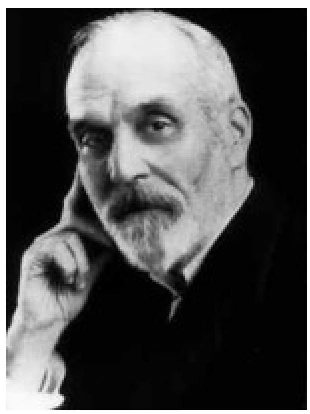

Рис. 6. Генри Дьюдени (1843–1930)

Решение этой задачи известного английского составителя головоломок Дьюдени (1843–1930) можно найти в его книге [8]. На самом деле оно получается, если переделать квадрат в прямоугольник с отношением сторон 3 : 1 способом, указанным во втором решении задачи 4, а потом разрезать прямоугольник на 3 квадрата (фактически это метод Монтюкла). При этом все части переносятся параллельно (рис. 7).

Обозначим через $p(n)$ минимальное число частей, на которые надо разрезать квадрат, чтобы из них можно было составить n равных квад-

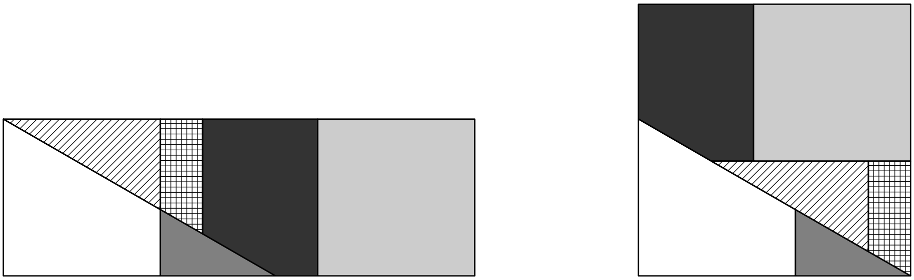

Рис. 7. Превращение квадрата в три равных квадрата и обратно способом Дьюдени

ратов (той же суммарной площади). Через $r(n)$ обозначим наименьшее число прямолинейных разрезов, которые нужно сделать, чтобы решить предыдущую задачу (при этом полученные части не передвигаются до окончания всех разрезаний). Через $l(n)$ обозначим наименьшую суммарную длину всех разрезов, решающих предыдущую задачу для квадрата со стороной единица.

Сначала несколько простых задач.

Задача 8. Докажите, что $p(2) \leqslant 4$.

Задача 9. Докажите, что $p(n) \geqslant n$, причём $p(n) = n$, если $n = m^2$ (n — полный квадрат).

Задача 10. Докажите, что если $n = m^2$, то

$$r(n) \leqslant 2(m-1), \quad l(n) \leqslant 2(m-1).$$

Следующая задача уже не столь проста.

Задача 11. Докажите, что

$$n \leqslant p(n) \leqslant n + 2\sqrt{n} - 2{,}5, \quad \sqrt{n} \leqslant r(n) \leqslant 8\sqrt{n},$$
$$2\sqrt{n} - 2 \leqslant l(n) \leqslant 2\sqrt{n} + 3.$$

Решение. Хотя одинаковые значения $p(n), r(n), l(n)$ могут достигаться при разных разрезаниях, для получения верхних оценок мы применим одну и ту же схему разрезания (она имеется в [19], но применяется с другой целью).

Выберем целое m такое, что $\sqrt{n} - m < 1$, и сделаем $2m$ разрезов суммарной длины $2m^2/\sqrt{n}$, вырезав из данного единичного квадрата m^2 квадратов со стороной $1/\sqrt{n}$, составляющих вместе квадрат, один из углов которого совпадает с углом исходного квадрата. Оставшуюся Г-образную часть разделим разрезом длины $1 - m/\sqrt{n}$ на две части, из которых

составим прямоугольник размера
$$\left(1-\frac{m}{\sqrt{n}}\right)\times\left(1+\frac{m}{\sqrt{n}}\right).$$
Разделим его на $n-m^2$ равных прямоугольников размера
$$\left(1-\frac{m}{\sqrt{n}}\right)\times\frac{1+m/\sqrt{n}}{n-m^2},$$
сделав $n-m^2-1$ разрезов с суммарной длиной
$$(n-m^2-1)\left(1-\frac{m}{\sqrt{n}}\right).$$
Отношение сторон полученных прямоугольников равно
$$\frac{1+m/\sqrt{n}}{(n-m^2)(1-m/\sqrt{n})}=\frac{1}{n(1-m/\sqrt{n})^2}=\frac{1}{(\sqrt{n}-m)^2}.$$
Применяя задачу 4 при $a=1/(\sqrt{n}-m)$, превращаем каждый из этих прямоугольников в квадрат, разделив его двумя разрезами суммарной длины
$$\frac{1-1/a+\sqrt{1+1/a^2}}{\sqrt{n}}$$
на три части. Суммарная длина сделанных $3(n-m^2)+2m$ разрезов равна
$$\frac{2m^2}{\sqrt{n}}+(n-m^2)\left(1-\frac{m}{\sqrt{n}}\right)+\frac{(n-m^2)\left(1-1/a+\sqrt{1+1/a^2}\right)}{\sqrt{n}}=$$
$$=\frac{2m^2}{\sqrt{n}}-\frac{(n-m^2)m}{\sqrt{n}}+\frac{(n-m^2)\left(2+m-\sqrt{n}+\sqrt{1+(\sqrt{n}-m)^2}\right)}{\sqrt{n}}.$$

На рис. 8–13 представлен описанный выше алгоритм разрезания квадрата на 21 равный квадрат.

Задача 12. Применяя указанный выше способ разрезания, докажите, что при $n=m^2+1$
$$l(n)<2\sqrt{n}-1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Задача 13. Применяя метод Монтюкла, докажите, что
$$p(n)\leqslant n+\sqrt{n}-2,\quad l(n)<2\sqrt{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Этот метод лучше предыдущего за исключением числа разрезов: здесь $r(n)=O(n)$ (но в частном случае — в задаче 12 — оценка для $l(n)$ чуть лучше.)

Приведём ещё один метод разрезания на n квадратов, пригодный для случая, когда n равно сумме квадратов двух натуральных чисел. В книжке [21] этот метод приписывается Абул-Вафе.

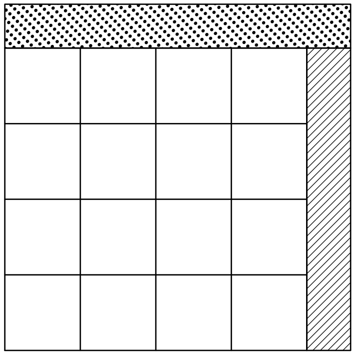

Рис. 8. Первый шаг: вырезание 16 квадратов и двух прямоугольников

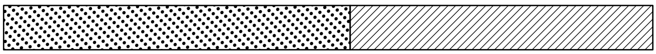

Рис. 9. Второй шаг: склеивание двух прямоугольников в один прямоугольник

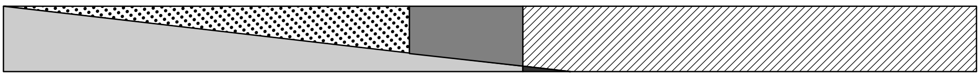

Рис. 10. Третий шаг: перекройка полученного прямоугольника в прямоугольник с отношением сторон 5 : 1

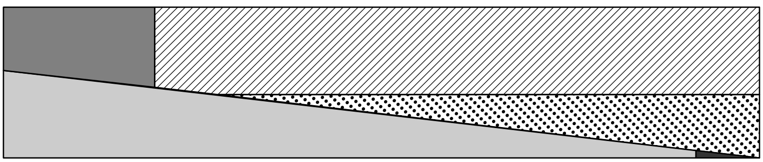

Рис. 11. Четвёртый шаг: сдвиг полученных частей и превращение прямоугольника рис. 9 в прямоугольник с отношением сторон 5:1

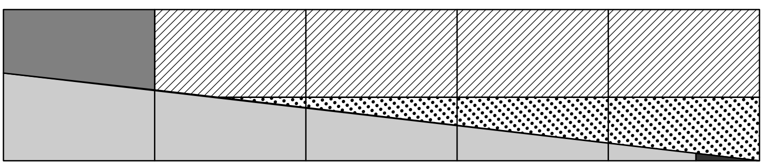

Рис. 12. Пятый шаг: разрезание прямоугольника с отношением сторон 5 : 1 на 5 равных квадратов

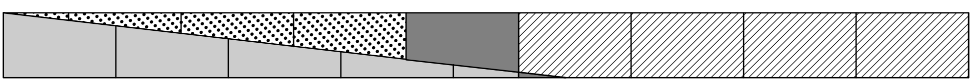

Рис. 13. Шестой шаг: разрезание прямоугольника рис. 9 на 5 равных квадратов

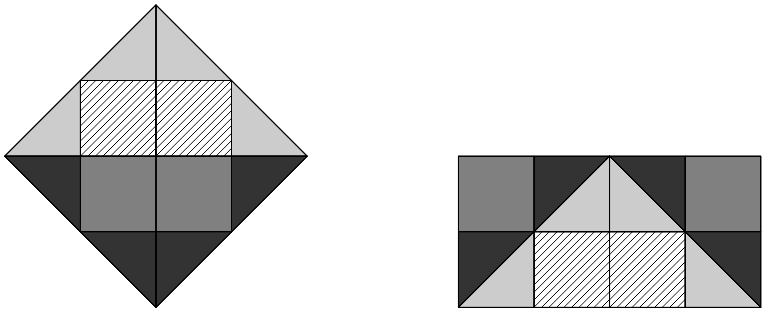

Рис. 14. Пример разрезания на $2m^2$ квадратов при $m = 2$. Слева схема разрезов, справа — схема сдвигов и склеек, после которых возникает 8 квадратов

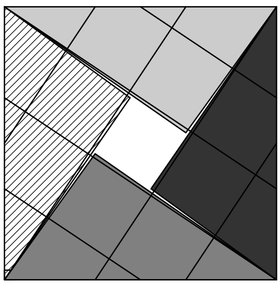

Рис. 15. Разрезание квадрата на 13 равных квадратов

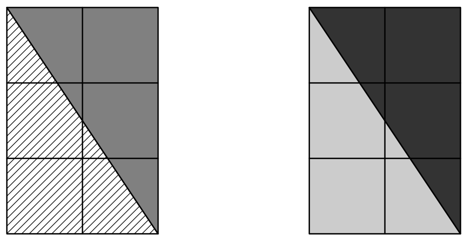

Рис. 16. Составление 12 равных квадратов после разрезания рис. 15 (один квадрат уже есть на рис. 15)

Сначала рассмотрим пример разрезания для $n = 2m^2$ (рис. 14).

Задача 14. Докажите, что в указанном методе $l(n) = 2\sqrt{n}$ при $n = 2m^2$.

Задача 15. (Абул-Вафа) Превратите пять равных квадратов в один квадрат, разрезав их на 8 частей (один квадрат оставив неразрезанным).

Далее приводится пример разрезания на $n = a^2 + b^2$ квадратов при $a \neq b$ (рис. 15, 16).

Задача 16. Докажите, что в указанном методе

$$l(n) = 2\sqrt{n}, \quad r(n) < 2\sqrt{2n} + O(1) \quad \text{для } n = a^2 + b^2.$$

Для произвольного n в силу теоремы Лагранжа (доказательство см. в [10, с. 124–127]). можно найти натуральные a, b, c, d, такие, что $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Положим $n_1 = a^2 + b^2$, $n_2 = c^2 + d^2$. Разрезав квадрат на части, из которых можно сложить два квадрата с отношением сторон $\sqrt{n_1/n_2}$ (см. задачу 18), сведём задачу к разрезаниям полученных двух квадратов на n_1 и n_2 квадратов соответственно.

В следующих двух задачах речь идёт о доказательстве теоремы Пифагора с помощью разрезаний. Первое из них предложено древнекитайским математиком.

Задача 17 (Лю Хуэй). Превратите два квадрата в один, разрезав их на 6 частей.

Второй способ широко известен.

Задача 18. Превратите два квадрата в один, разрезав их на 5 частей. Если их стороны равны a, b, $a^2 + b^2 = 1$, то суммарная длина разрезов равна 2. Суммарная длина разрезов при обратном преобразовании равна $2(a+b) \leqslant 2\sqrt{2}$.

Задача 19. Докажите, что в указанном методе Абул-Вафы

$$l(n) < 2\sqrt{n} + 2\sqrt{2} \quad \text{при любом } n.$$

Указание. Примените задачи 16, 18. Равенство возможно было бы только при $n_1 = a^2 + b^2 = n_2 = c^+ d^2$, но тогда

$$n = 2n_1 = 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2,$$

и можно применить задачу 16 без задачи 18.

Задача 20. Докажите, что в методе Абул-Вафы

$$r(n) < 4\sqrt{n} + O(1), \quad p(n) = n + O(\sqrt{n}) \quad \text{при любом } n.$$

Указание. Примените задачи 16, 18 и неравенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2(x+y)}.$$

Если n представимо в виде суммы большого квадрата и трёх малых, то оценка $r(n)$ будет ближе к $2\sqrt{n}$.

Оценка для $r(n)$ в этом методе лучше, чем в двух предыдущих. Оценка для $l(n)$ в общем случае тоже чуть лучше, чем в первом методе, хотя чуть хуже, чем в задачах 12, 13.

Разрезания в этом методе делать просто, но затруднительно быстро найти представление большого числа в виде суммы четырёх квадратов (несколько проще найти разложение в сумму двух квадратов). В двух предыдущих методах используется число $1/\sqrt{n}$, точнее отрезок такой длины. Его надо предварительно построить, прежде чем выполнить построения всех разрезающих прямых; в [6] (задача 15.33) показано, что это можно сделать, проведя $o(\log_2 n)$ линий. Остальные построения используют $O(\sqrt{n})$ линий в первом методе и $O(n)$ линий во втором; для проведения этих построений предварительные вычисления не требуются. В методе Абул-Вафы построения тоже требуют проведения $O(\sqrt{n})$ линий.

Ситуация, в которой перед разрезаниями нужно проводить обширные вычисления, встречается довольно редко Поэтому, отвлекаясь немного в сторону, остановимся на этом подробнее. Тем более, что задача о разложении числа в сумму квадратов кажется чисто теоретической, а изложенный выше способ разрезания квадрата можно рассматривать как пример её прикладного применения.

§ 5. Представление чисел суммами квадратов

Следующая теорема была получена Пьером Ферма в XVII веке. Не знакомый с ней читатель может попробовать доказать её самостоятельно.

Задача 21. Докажите, что число n представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда все его простые делители вида $4k+3$ входят в его разложение на простые множители в чётных степенях.

Впоследствии Карл Якоби даже нашёл формулу для числа всех таких представлений, так же как и для числа представлений в виде суммы четырёх квадратов. Трудный вопрос о представимости чисел в виде суммы трёх квадратов решил Карл Фридрих Гаусс.

Для нахождения какого-нибудь представления числа n в виде суммы двух квадратов достаточно найти его разложение на множители, и задача сводится к той же задаче для простых вида $4k+1$, если воспользоваться тождеством Фибоначчи.

Задача 22. Докажите тождество Фибоначчи

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2.$$

Задача 23. Для простых $n=4k+1$ разложение в сумму двух квадратов единственно (с точностью до перестановки слагаемых).

В книге [2, с. 26–31] есть два красивых элементарных доказательства существования такого разложения. Но из них не вытекает никакой алгоритм поиска этого разложения, кроме перебора всех квадратов, меньших числа n. Стандартное доказательство можно найти, например, в [10, с. 115–118].

Задача 24. Покажите, что разложение в сумму двух квадратов можно выполнить за $O(\sqrt{n}M(\log_2 n))$ операций над нулями и единицами, где $M(k)$ — число операций для умножения двух k-разрядных двоичных чисел[1)].

[1)] Недавно было доказано, что $M(n)=O(n\log_2 n)$.

Но есть и более быстрый алгоритм, принадлежащий французскому математику Серре (см. [10, с. 120–124]), где приведены четыре явные формулы для представления простого в виде суммы двух квадратов, но способ Серре из них самый эффективный в смысле объёма вычислений). Кратко изложим его. Вначале находим квадратичный невычет по модулю p — иными словами, такое число a, что $a^{(p-1)/2} = -1 \bmod p$. Это можно сделать перебором натуральных чисел начиная с 2.

Задача 25. Докажите, что вычетов и невычетов среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$ поровну.

Это означает, что на невычет мы наткнёмся скоро.

Задача 26. Докажите, что для вычисления $a^n \bmod p$ достаточно

$$O(\log_2 nM(\lceil \log_2 p \rceil))$$

операций с нулями и единицами (называемых далее битовыми операциями).

Указание. См., например, [6, задачи 15.23–25, 17.53].

В частности, при $p = 2017$ первый невычет будет 5. Если a является невычетом, то $b = a^{(p-1)/2}$ удовлетворяет равенству $b^2 = -1 \bmod p$ (является корнем из минус единицы). Например, при $p = 2017$ имеем $b = 229$. В случае простых $p = 8k+5$ первый невычет всегда будет 2 согласно квадратичному закону взаимности: из него следует, что двойка является квадратичным невычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $(p^2-1)/8$ нечётно, т. е. в случаях $p = 8k+3, 8k+5$, а в случаях $p = 8k+1, 8k+7$ двойка является вычетом (например, $2 \equiv 3^2 \pmod 7$, $2 \equiv 6^2 \pmod{17}$).

Далее согласно алгоритму Серре раскладываем p/a в цепную дробь. Например,

$$\frac{2017}{229} = 8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{4} + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{8}}}}.$$

В общем случае можно доказать, что число элементов в дроби будет чётно и вторая половина совпадает с первой с точностью до перестановки в обратном порядке.

Задача 27. Число элементов цепной дроби для числа $\frac{m}{n}$ равно $O(\log_2 n)$.

Указание. См., например, [5].

Задача 28. Число операций для разложения $\frac{m}{n}$ в цепную дробь равно $O(\log_2^2 n)$.

Указание. Достаточно оценить число операций при применении алгоритма Евклида к паре чисел (m, n). Совсем просто доказывается чуть более слабая оценка $O(\log_2 nM(\lambda(n)))$, где $\lambda(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Используя быструю версию алгоритма Евклида (предложенную Арнольдом Шенхаге и дополненную Фолкером Штрассеном), можно число этих операций оценить как $O(\log_2 \log_2 n)M(\lambda(n))$. Далее берём две подходящие дроби для этой цепной дроби с числом этажей $k-1$ и k, где $2k$ — число этажей всей цепной дроби для p/a. Сумма квадратов их числителей оказывается равной n. В рассматриваемом примере это $8 + 1/(1 + 1/4) = 44/5$ и $8 + 1/1 = 9/1$. Тогда $44^2 + 9^2 = 2017$.

Число операций для этих вычислений можно оценить как $\log_2 pM(\lambda(p))$. В реальности число операций может быть меньше, так как число этажей в дроби может быть небольшим. В среднем оно скорее $O(\lambda(\lambda(p)))$. В нашем примере оно равно 5 и довольно велико в сравнении с $\lambda(2017) = 12$. Впрочем, потом вычисления проводятся с дробями вдвое меньшей этажности.

Для вычисления представления простого $p = 4k + 1$ в виде суммы двух квадратов можно применять и стандартный алгоритм (см. [10, с. 117–120]). Начнём с пары (x_1, y_1), где $y_1 = 1$, $x_1 = b$, $b^2 = -1 \bmod p$, и положим $r_1 = (x_1^2 + y_1^2)/p$, $r_1 < p$. Далее положим

$$x_2 = \frac{x_1 \cdot x_1' + y_1 \cdot y_1'}{r_1}, \quad y_2 = \frac{x_1 \cdot y_1' - y_1 \cdot x_1'}{r_1},$$

где $x_1' = x_1 \bmod r_1$, $|x_1'| \leqslant r_1/2$. Тогда

$$y_2 = 0 \bmod r_1, \quad x_2 = x_1^2 + y_1^2 \bmod r_1 = pr_1 \bmod r_1 = 0,$$

поэтому в силу тождества Фибоначчи

$$x_2^2 + y_2^2 = \frac{(x_1^2 + y_1^2)((x_1')^2 + (y_1')^2)}{r_1^2} \leqslant \frac{pr_1 r_1^2/2}{r_1^2} = \frac{pr_1}{2},$$

откуда $r_2 = (x_2^2 + y_2^2)/p$ целое и $r_2 \leqslant r_1/2$ (в случае $r_1 > 2$ можно доказать и строгое неравенство). Дальше повторяем эти вычисления. Последовательность r_i не позднее, чем за $\lambda(p)$ шагов, закончится единицей. Значит, $x_k^2 + y_k^2 = p$, $k \leqslant \lambda(p)$. Оценим число необходимых в указанных вычислениях операций. Воспользуемся известными оценками числа битовых операций для умножения m-битного числа на n-битное: $M(m, n) = O(mM(n)/n)$, и для деления m-битного числа на n-битное: при $n < m < 2n$

$$D(m, n) = O\Big(\frac{nM(m-n)}{m-n} + 4M(m-n)\Big),$$

а при $m > 2n$

$$D(m,n) = O\Big(\frac{nM(m-n)}{m-n}\Big).$$

Очевидно, что $|x_i|, |y_i| \leqslant \sqrt{pr_i}$, $|x_i'|, |y_i'| \leqslant r_i/2$, поэтому число битовых операций во всех вычислениях на i-м шаге равно по порядку

$$\frac{\lambda(p)M(\lambda(r_i))}{\lambda(r_i)} + \lambda(r_i)M\Big(\frac{\lambda(p)}{\lambda(p)}\Big).$$

Суммируя и пользуясь при $m > n$ неравенством $M(n)/n \leqslant M(m)/m$, получаем такую же окончательную оценку $\lambda(p)M(\lambda(p))$, что и в алгоритме Серре. В реальности оценка может быть меньше, так как число шагов алгоритма может быть небольшим. Например, в уже рассмотренном случае $p = 2017$ этот алгоритм даёт ответ уже на втором шаге:

$$\begin{aligned} &x_1 = 229, \quad y_1 = 1, \quad\ \ r_1 = 26,\\ &x_2 = 44, \quad\ \ y_2 = -9, \quad r_2 = 1, \quad 44^2 + 9^2 = 2017. \end{aligned}$$

Последний алгоритм выглядит более быстрым и не требует разложения в непрерывную дробь, а все деления в нём выполняются нацело. Однако общее количество выполненных операций умножения, деления и сложения в обоих алгоритмах оказалось одинаковым и равным 10, причём во втором алгоритме числа в выполняемых операциях больше (после возведения в квадрат и суммирования они больше $p = 2017$, и делить приходится на p). Поэтому для выяснения, какое из вычислений короче, надо кропотливо подсчитать битовые операции, что мы оставляем желающим.

Если же n не простое, то стандартный способ его представления в виде суммы двух квадратов или хотя бы выяснения возможности такого представления требует разложения n на простые множители в силу задачи 21, а для этой задачи пока неизвестны достаточно быстрые алгоритмы.

Стандартный алгоритм для представления в виде суммы четырёх квадратов также требует предварительного разложения на простые множители (и к тому же ещё простые вида $4k + 3$ надо разлагать в сумму четырёх квадратов, а это дольше, чем разложение простых вида $4k+1$, для которых можно найти представление в виде суммы двух квадратов) Однако потом вычисления проводятся с использованием тождества Эйлера для произведения двух сумм четырёх квадратов, и их можно выполнить быстро.

Опишем кратко стандартный алгоритм Эйлера — Лагранжа разложения числа в сумму четырёх квадратов.

Задача 29 (тождество Эйлера). Проверьте, что

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2,$$

где

$$X_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, \quad X_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3,$$
$$X_3 = x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_4 - x_4y_2, \quad X_4 = x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2.$$

Достаточно указать алгоритм разложения только для простых вида $4k + 3$.

Задача 30. Пусть $p = 4k + 3$. Докажите, что найдутся два квадратичных вычета, сумма которых — невычет.

Указание. В противном случае вычеты вместе с нулём образуют группу относительно сложения, но тогда минус вычет является вычетом, откуда следует, что минус единица — вычет, что противоречит равенству $(-1)^{(p-1)/2} = -1$.

Замечание. В действительности утверждение верно для любого простого $p > 2$.

Задача 31. Выведите из задачи 30 разрешимость сравнения

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \bmod p.$$

Решать его приходится перебором. На самом деле число его решений (число точек на «окружности мнимого радиуса» над полем из p элементов) равно $p+O(1)$, поэтому перебор имеет в худшем случае размер $O(p)$. Дальше алгоритм напоминает приведённый выше для суммы двух квадратов.

Начинаем с четвёрки ($x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = 1$, $w_1 = 0$) такой, что

$$r_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2}{p}$$

— целое число, вычисляем x_1' такое, что $|x_1'| \leqslant r_1/2$, $x_1' = x_1 \bmod r_1$, аналогично находим y_1', z_1', w_1' и вычисляем

$$x_2 := \frac{x_1x_1' + y_1y_1' + z_1z_1' + w_1w_1'}{r_1},$$
$$y_2 := \frac{x_1y_1' - y_1x_1' + z_1w_1' - w_1z_1'}{r_1},$$
$$z_2 := \frac{x_1z_1' - z_1x_1' + y_1w_1' - w_1y_1'}{r_1},$$
$$w_2 := \frac{x_1w_1' - w_1x_1' + y_1yz_1' - z_1y_1'}{r_1},$$
$$r_2 := \frac{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + w_2^2}{p}.$$

Далее итерации повторяются, пока не получится $r_k = 1$.

Задача 32. Докажите корректность алгоритма.

Указание. То, что x_2 — целое число, следует из равенства

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = pr_1.$$

Для y_2, z_2, w_2 это очевидно. Далее, из тождества Эйлера следует, что

$$r_2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2)\frac{(x_1')^2 + (y_1')^2 + (z_1')^2 + (w_1')^2}{pr_1^2} = \\ = \frac{(x_1')^2 + (y_1')^2 + (z_1')^2 + (w_1')^2}{r_1} \leqslant r_1.$$

Равенство $r_2 = r_1$ при $r_1 > 4$ невозможно, так как тогда

$$x_1, y_1, z_1, w_1 = 0 \bmod \frac{r_1}{2},$$

откуда

$$pr_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = 0 \bmod \frac{r_1^2}{4}.$$

При $r_1 = 2$

$$x_1, y_1, z_1, w_1 = 1 \bmod 2,$$

но тогда

$$2p = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = 0 \bmod 4.$$

При $r_1 = 4$

$$x_1, y_1, z_1, w_1 = 2 \bmod 4,$$

но тогда

$$4p = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = 0 \bmod 16.$$

Поэтому последовательность r_i убывает, $r_1 \leqslant (p-3)/2$, значит, число итераций не больше $(p-5)/2$. Очевидная оценка числа битовых операций в этом алгоритме $O(pM(\lambda(p)))$. Такая же оценка получается и для решения сравнения $x^2 + y^2 + 1 = 0 \bmod p$. Видно, что в случае четырёх квадратов алгоритм работает медленнее.

Задача 33. Число операций для представления n в виде суммы двух или четырёх квадратов в предположении, что разложение на множители выполнено и для них такие представления уже найдены, оценивается как $O(\log_2 \log_2 n)M(\lambda(n))$.

Указание. Разобьём число n на два множителя n_1, n_2, разложения которых на простые имеют по возможности почти одинаковую длину (в случае двух квадратов нужно ещё, чтобы они имели такие разложения). Можно предполагать, что это сделано «бесплатно» (так как разложение на простые уже нам известно). Обозначим минимальное число битовых операций, используемых для получения разложения в сумму квадратов, через $S(\lambda(n))$. Тогда справедливо рекуррентное соотношение

$$S(\lambda(n)) \leqslant S(\lambda(n_1)) + S(\lambda(n_2)) + O(M(\lambda(n))).$$

Используя его и неравенство

$$M(m_1) + M(m_2) \leqslant M(m_1 + m_2),$$

получаем, что

$$S(\lambda(n)) = O(\lambda(k)M(\lambda(n)),$$

где k — число сомножителей в разложении n на простые. Очевидно, $2^k \leqslant n$, т. е. $k \leqslant \lambda(n)$.

§ 6. Теоремы Бойяи — Гервина и Хадвигера — Глюра

Фаркаш Бойяи — отец знаменитого Яноша Бойяи. Гервин — немецкий офицер и любитель математики, независимо доказавший ту же теорему. Когда-то в связи с этой теоремой упоминали только их, но сейчас вспоминаются также Уоллес (Wallace) и Лаур (Lowre), которые, похоже, пришли к ней даже раньше.

Сначала рассмотрим некоторые частные случаи.

Задача 34 (Дьюдени). Превратите правильный треугольник в равновеликий квадрат, разрезав его на 4 части.

Решение этой задачи есть во многих книгах, в частности в [1, 10, 24]. Оно интересно тем, что части разрезания можно скрепить шарнирами и при повороте в одну сторону они сложатся в треугольник, а при повороте в другую — в квадрат. В интернете [42] можно найти соответствующую анимацию, а также аналогичные анимации, в которых шестиугольник превращается в треугольник и обратно, а шестиугольник превращается в квадрат.

Далее слово «равновеликий» в формулировках опускается.

Следующие задачи несложные и также имеются во многих книгах, например в [13].

Задача 35. Превратите треугольник в прямоугольник, разрезав его на три части.

Указание. Выберите наибольшую среднюю линию и продолжите её до пересечения с перпендикулярами к параллельной стороне, восстановленными из её концов. Треугольные части при этом передвигаются с поворотом на 180 градусов.

Задача 36. Превратите равнобедренный треугольник в прямоугольник, разрезав его на две части.

Задача 37. Превратите параллелограмм в прямоугольник, разрезав его на две части.

Указание. Опустите высоты на наибольшую сторону из противоположных вершин.

Задача 38. Превратите прямоугольник с отношением сторон, меньшим 9/4, в квадрат, разрезав его на три части и перенеся их параллельно.

Указание. См. решение задачи 4.

Задача 39. Превратите правильный шестиугольник в прямоугольник, разрезав его на три части.

Указание. Сначала разрежьте пополам и составьте параллелограмм.

Задача 40. Превратите правильный шестиугольник в квадрат, разрезав его на шесть частей четырьмя разрезами так, что части будут переноситься параллельно.

Указание. Примените задачи 39, 38.

Задача 41. Превратите правильный шестиугольник в квадрат, разрезав его на пять частей четырьмя разрезами так, что части будут переноситься параллельно.

Решение: «смотри».

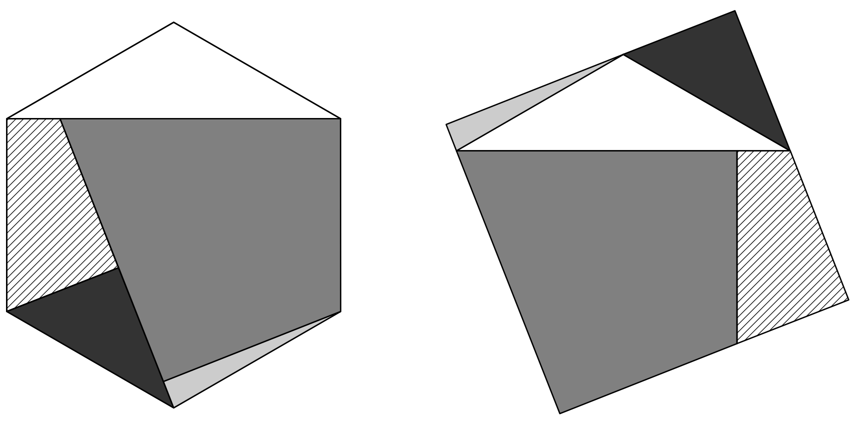

Рис. 17. Превращение правильного шестиугольника в квадрат четырьмя разрезами

В задачах на разрезание полезна

Задача 42 (лемма о трёх фигурах). Пусть фигуру F_1 преобразовали в фигуру F_2, разрезав на n частей, а фигуру F_3 переделали в F_2, разрезав на m частей. Тогда из F_1 можно получить F_3, разрезав не более чем на nm частей.

Эта лемма справедлива, конечно, и для теоретико-множественных разрезаний (доказательство можно найти в [23], но оно достаточно очевидно).

Задача 43 (теорема Бойяи — Гервина). Докажите, что любые два многоугольника равной площади равносоставлены[2)].

Указание. Возьмите один многоугольник, разрежьте на треугольники, переделайте их в прямоугольники, сведите эти прямоугольники к прямоугольникам заданной ширины, например единичной, и составьте из них большой прямоугольник той же ширины. Со вторым многоугольником сделайте то же самое. Потом примените задачу 42.

Теорему Бойяи — Гервина можно усилить, наложив ограничения на перемещения частей после разрезания.

Будем говорить, что две фигуры S-равносоставлены, если одну из них можно разрезать на части и, подвергая их преобразованиям центральной симметрии, составить из них вторую фигуру. Аналогично определим отношение T-равносоставленности, заменяя центральные симметрии на параллельные переносы (это определение имеет смысл и для пространственных тел). Лемма о трёх фигурах очевидно верна и для S- и T-равносоставленности.

Следующая задача имеется в книге [22], написанной известным швейцарским геометром Гуго Хадвигером.

Задача 44 (Хадвигер). На плоскости даны два равных квадрата. Превратить один в другой, разрезав его не более чем на 5 частей и параллельно передвинув некоторые из них. То же самое сделать и с любыми равновеликими параллелограммами (только число частей может быть больше).

Рис. 18. Гуго Хадвигер (1908–1981)

2) То есть их можно сложить из одного и того же конечного набора плоских фигур, причём у фигур нет общих внутренних точек.

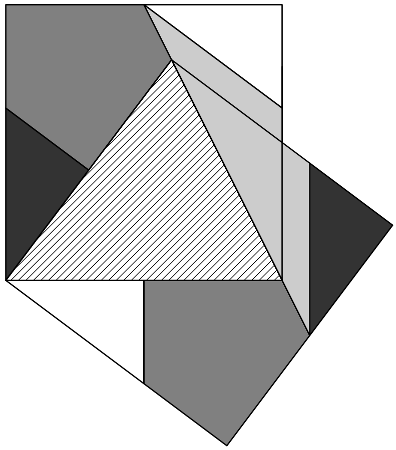

Рис. 19. *T*-равносоставленность двух квадратов

Указание. Примените преобразование, указанное на рис. 19, и задачу 42. Преобразования квадрата в параллельно расположенный прямоугольник из секции 2 очевидно доказывают их *T*-равносоставленность.

Задача 45. Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

Задача 46. Превратите два центрально-симметричных треугольника в прямоугольник, перенося части параллельно.

Указание. Параллельно перенеся один из них, получаем параллелограмм, который потом можно превратить в прямоугольник параллельным переносом частей.

Доказательство следующей теоремы имеется в [25, с. 162–166] (статья В. Г. Болтянского), поэтому она предлагается в виде задачи.

Задача 47 (Хадвигер — Глюр). Докажите, что любые два многоугольника равной площади *S*-равносоставлены.

Указание. Примените задачи 35, 4, 44, 45, 42. Сначала разрезаем один из многоугольников на треугольники, потом их превращаем в прямоугольники, при этом некоторые треугольные части подвергаются центральной симметрии. Далее прямоугольники преобразуются в прямоугольники с единичным основанием, поворачиваются параллельно друг другу и из них составляется один прямоугольник. Потом его можно превратить и в квадрат. При этом все части переносятся параллельно, а параллельный перенос выполняется посредством двух симметрий согласно задаче 45. Поэтому все части подвергаются только преобразованиям центральной симметрии. Такое же преобразование делаем со вторым многоугольником. В заключение применяем задачу 42.

Задача 48 (Хадвигер — Глюр). Докажите, что любые два центрально-симметричных многоугольника равной площади T-равносоставлены.

Указание. Примените задачи 46, 44, 42. Сначала разрезаем один из многоугольников на пары центрально-симметричных треугольников с общей вершиной в его центре симметрии, потом каждую пару превращаем в прямоугольник. Далее действуем как в указании к задаче 47.

Ещё одно усиление теоремы Бойяи — Гервина имеется в [28]. Там доказано, что преобразование любого многоугольника в любой равновеликий можно выполнить подобно решению Дьюдени задачи 34, соединив части шарнирами.

Количественный вариант теорем Бойяи — Гервина и Хадвигера — Глюра, близкий к оптимальному, получить непросто. Некоторая работа в этом направлении сделана в [32]. Там рассмотрен случай преобразования правильного m-угольника в правильный n-угольник. Через $p(m,n)$ авторы обозначили наименьшее число многоугольных частей, на которые надо разрезать правильный m-угольник, для того чтобы его превратить в правильный n-угольник (общие границы разных частей при этом могут быть ломаными линиями). Был рассмотрен также второй вариант задачи, а именно, когда части можно получать только делая последовательно разрезы стеклорезом, то есть прямолинейные разрезы от края и до края (не передвигая части между разрезаниями). В этом случае минимальное число необходимых частей авторы обозначили через $g(m,n)$. Очевидно, что $p(m,n)=p(n,m)$ и $p(m,n)\leqslant g(m,n)$, но функция $g(m,n)$ не обязана быть симметричной. Очевидно также, что минимальное число разрезов стеклорезом равно $g(m,n)-1$.

Задача 49. Покажите, что треугольник можно преобразовать в некоторую трапецию и обратно с помощью двух разрезов стеклорезом (разрезав на три части). Покажите, что правильный треугольник нельзя преобразовать в трапецию с углами 30 градусов при основании, равном его удвоенной стороне, с помощью двух разрезов стеклорезом, но обратное преобразование можно выполнить таким образом (т. е. разрезав трапецию на три части двумя разрезами).

В [32] получены следующие довольно точные оценки при $m\leqslant n$:

$$\max\left\{\left\lceil\frac{n-m}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\right\}\leqslant g(m,n)\leqslant\frac{m+n}{2}+o(n),$$

$$\left\lceil\frac{n-m}{4}\right\rceil+1\leqslant p(m,n)\leqslant\frac{m+n}{2}+o(n),$$

в частности

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \leqslant p(4,n) \leqslant \frac{n}{2} + o(n), \quad \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \leqslant g(n,4) \leqslant \frac{n}{2} + o(n),$$

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 2 \leqslant g(n,4) \leqslant \frac{n}{2} + o(n).$$

Доказательства слишком сложные, чтобы их приводить здесь.

§ 7. Параллельная равносоставленность параллелепипедов

Теорема Бойяи — Гервина не переносится на трёхмерное пространство. Бывает, что даже простые тела равного объёма нельзя преобразовать друг в друга, разрезая на части. Гильберт предположил, что такими телами могут быть правильный тетраэдр и куб. Это доказал его ученик Макс Ден спустя несколько лет после того, как Гильберт включил этот вопрос в число своих знаменитых проблем.

Теорему Дена можно сформулировать так: правильный тетраэдр не равносоставлен кубу того же объёма.

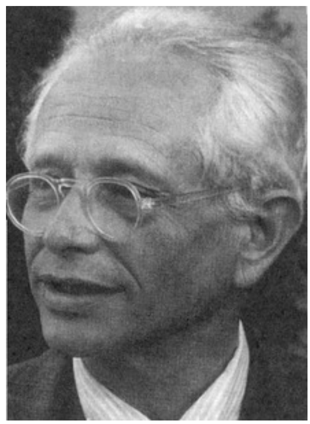

Рис. 20. Макс Ден (1878–1952)

Доказательство впоследствии было упрощено профессором мехмата МГУ В. Ф. Каганом.

Ещё позднее Хадвигер и Сидлер нашли условия, которым должны удовлетворять пары многогранников для того, чтобы они не были равносоставлеными.

Доказательства их результатов можно найти в интересной и сравнительно просто написанной книге [3], а также в [22].

В [22] доказано, что параллелепипеды равного объёма в пространстве любой размерности даже T-равносоставлены. В частности, куб и тот же куб, повёрнутый произвольным образом, можно преобразовать друг в друга, разрезав на части и затем передвигая их только параллельно. Этот факт использовался в [22] для простого доказательства инвариантности жорданова объёма при произвольном движении.

Лемма о трёх фигурах (задача 42) очевидно переносится и на трёхмерное (и многомерное) пространство:

Задача 50 (лемма о трёх телах). Пусть тело K_1 является n-равносоставленным с телом K_2 (т. е. преобразуется в него при разрезании не более чем на n частей), а тело K_3 является m-равносоставленным с K_2. Тогда K_1 является nm-равносоставленным с K_3.

Эта лемма справедлива и для теоретико-множественных разрезаний, и для *T*-равносоставленности.

Задача 51. Докажите, что можно превратить произвольный параллелепипед в равнообъёмный ему прямоугольный, разрезав не более чем на 8 частей и параллельно их передвинув.

Указание. Сначала сделаем основание параллелепипеда прямоугольным, разрезав его на две части с помощью результата задачи 37 (одна из них будет треугольной, а другая — четырёхугольной призмой) и перенеся первую из них параллельно. Такое преобразование назовём «перекосом». Сделав ещё один перекос, преобразуем параллелепипед в такой, у которого два ребра, выходящие из одной вершины, будут перпендикулярны третьему (композицию обоих перекосов можно выполнить, разрезав параллелепипед на 4 части и их параллельно передвигая). Далее делаем ещё один перекос и получаем прямоугольный параллелепипед, который будет *T*-равносоставлен с исходным при разбиении не более чем на 8 частей.

Далее слово «равнообъёмный» в формулировках опускается.

Задача 52. Докажите, что прямоугольный параллелепипед *T*-равносоставлен любому параллельно расположенному параллелепипеду, в частности кубу.

Указание. В силу утверждения задачи 50 достаточно доказать это для куба. Преобразуем прямоугольный параллелепипед, не меняя высоты и площади основания, в такой прямоугольный параллелепипед, у которого одно из рёбер основания равно ребру куба. Для этого применяем результат задачи 4, достраивая получающиеся там части основания до прямоугольных призм с высотой, равной высоте данного параллелепипеда. Параллельно перенося эти призмы, получаем новый параллелепипед. Применим к нему тот же приём (и задачу 50), взяв за основание грань, перпендикулярную ребру, равному ребру куба. Получаем куб, *T*-равносоставленный данному параллелепипеду. Количество полученных частей будет зависеть от отношения между длинами рёбер исходного параллелепипеда.

Задача 53 (удвоение куба). Докажите, что прямоугольный параллелепипед размера $1\times1\times2$ можно преобразовать в куб, разрезав на 9 частей и параллельно их передвинув.

Указание. Примените задачи 52, 38, 4, 50.

В [1] есть аналогичная задача (№ 301), но про произвольную равносоставленность. Число частей там равно 8.

Задача 54. Докажите, что любые два прямоугольных параллелепипеда (не обязательно параллельно расположенных) T-равносоставлены.

Указание. Преобразуйте их в кубы. Для доказательства T-равносоставленности двух кубов примените результат задачи 44. Достаточно совместить параллельным переносом их вершины и перевести один куб в другой, сделав два поворота вокруг рёбер (в механике этот трюк называется поворотами на углы Эйлера).

Согласно задачам 44, 50 число используемых частей не больше 25.

Результаты задач 51, 54, 50 дают решение задачи 26.6б (см. [36, с. 246]): *Докажите, что любые два равнообъёмных параллелепипеда T-равносоставлены.*

§ 8. Разбиения на непересекающиеся множества

В этом параграфе мы понимаем равносоставленность в теоретико-множественном смысле, т. е. предполагаем, что части разбиения не должны иметь общих точек (в обычных разбиениях соседние части имеют общие граничные точки). Справедлива следующая теорема Банаха — Тарского: два многоугольника равносоставлены (в теоретико-множественном смысле) тогда и только тогда, когда они имеют равную площадь.

В её доказательстве используется теорема Кантора — Бернштейна — Банаха: если множества A и B таковы, что A является m-равносоставленным с $B' \subset B$, а B является n-равносоставленным с $A' \subset A$, то A является mn-равносоставленным с B.

Тарский поставил также вопрос: можно ли подобным образом преобразовать круг в квадрат (квадратура круга по Тарскому)?

Оказалось, что можно, и это было доказано Миклошем Лацковичем в 1990 г. [33]. На самом деле он доказал, что любой многоугольник T-равносоставлен кругу. Позднее появилось упрощённое доказательство [34], но оно всё ещё слишком сложно для изложения здесь.

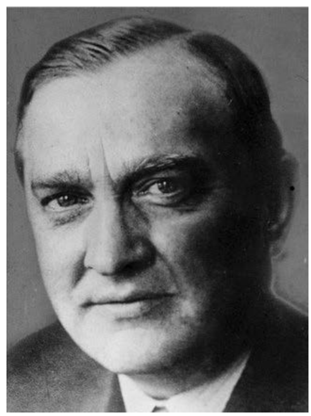

Рис. 21. Стефан Банах (1892–1945)

В трёхмерном пространстве подобная теорема оказалась неверной: Банах и Тарский доказали, что можно разбить шар на несколько частей и, передвинув их, получить два шара того же радиуса (парадокс Банаха — Тарского). Более того, они показали, что любое множество, содержащее в себе шар любого радиуса, можно таким же образом превратить в шар любого заданного радиуса. Разумеется, это возможно только при разбиении на очень сложно устроенные подмножества, которые, в частности, не измеримы, т.ė. им нельзя разумным способом приписать объём (разумным — это значит, что объём должен сохраняться при движениях и складываться при объединении непересекающихся по внутренним точкам множеств).

Доказательства этих утверждений всё ещё остаются сложными, но их можно прочитать, например в [7, 27].

Доказательство теоремы Банаха — Тарского о равновеликости равносоставленных многоугольников тоже непросто. Но доказательство равносоставленности равновеликих многоугольников не так сложно (его можно найти в [7]) и далее оно будет изложено в виде цепочки задач.

Для построения соответствующего разрезания используется

Задача 55. Пусть $K_\alpha(R)$ — множество полуинтервалов с началом в нуле и концами в точках $e^{2n\pi i\alpha}R$, $n = 0, 1, \ldots$, где α иррационально («колесо радиуса R с бесконечным числом спиц»). Обозначим через $K_{\alpha,n}(R)$ это же «колесо» с удалёнными первыми n «спицами» $e^{2k\pi i\alpha}R$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Докажите, что $K_\alpha(R)$ получается из $K_{\alpha,n}(R)$ поворотом на угол $2\pi n\alpha$ и оба множества всюду плотны в круге радиуса R с центром в нуле (последнее утверждение далее не понадобится).

Из этой задачи следует, что «колесо» $K_\alpha(R)$ является $n+1$-равносоставленным с тем же колесом, объединённым с n не пересекающимися с ним и друг с другом, а в остальном произвольно расположенными на плоскости полуинтервалами длины R. Действительно, само «колесо» $K_\alpha(R)$ можно представить в виде объединения «колеса без n спиц» $K_{\alpha,n}(R)$ и n полуинтервалов длины R. Очевидно, что такое же утверждение верно для «колеса без обода», состоящего не из полуинтервалов, а из интервалов той же длины (и в его формулировке полуинтервалы заменяются на интервалы).

Следующие две классические задачи не связаны с дальнейшим изложением, но трудно удержаться от того, чтобы не привести их здесь.

Задача 56 (Штейнгауз). Докажите, что «спицы колеса» $K_\alpha(R)$ разбивают его «обод» (окружность радиуса R с центром в нуле) на дуги только трёх различных длин, причём длина большей дуги равна сумме длин обеих меньших.

Задача 57. Докажите, что десятичная запись чисел последовательности 2^n может начинаться с любой комбинации цифр. Докажите, что с цифры 1 она начинается чаще, чем с 2.

Задача 58. Докажите, что квадрат равносоставлен тому же квадрату и точке (или полуинтервалу, или отрезку) вне его.

Указание. Примените задачу 55.

Задача 59 (Серпинский). Докажите, что квадрат 15-равносоставлен равнобедренному прямоугольному треугольнику.

Указание. Примените задачу 55. Решение есть в [23].

Задача 60. Докажите, что квадрат можно разбить на конечное число подмножеств, сдвинув которые, можно получить прямоугольник с отношением сторон 4 : 1. Оцените число частей в этом разбиении.

Указание. Примените задачу 55.

Задача 61. Для любого n можно найти числа $1, a_1, \ldots, a_n$, все попарные отношения которых иррациональны.

Указание. Например, $a_i = \sqrt{p_i}$, $i = 1, \ldots, n$, где все p_i — различные простые числа. Можно даже найти n чисел, линейно независимых над полем рациональных чисел.

Задача 62. Докажите, что n-угольник без границы («ободранный») периметра p, у которого максимальный радиус лежащего внутри круга равен r, равносоставлен равному ему n-угольнику с границей, причём разбиение содержит не более чем $2+2n+\lfloor p/r \rfloor$ частей.

Указание. Разобьём каждую сторону n-угольника (их считаем полуинтервалами) на не более чем a/r полуинтервалов длины $r-\varepsilon$ и один более короткий, тогда всего их будет не более чем $p/r+n$. Обозначим их длины через R_i, где $R_1 = r-\varepsilon$, $R_i < R_1$, $i > 1$, и рассмотрим «колёса без нескольких спиц»

$$K_{\alpha_1, \lfloor p/r \rfloor}(R_1),\ K_{\alpha_i, 1}(R_i), \quad i = 2, 3, \ldots, n+1,$$

«насаженные на одну ось», которая проходит через центр круга радиуса $R_1 = r-\varepsilon$, лежащего внутри n-угольника. Чтобы спицы у разных колёс не совпадали (а значит, и не пересекались, так как центры колёс им не принадлежат), выберем α_i с помощью результата задачи 61. Добавим к каждому «колесу без нескольких спиц» недостающие спицы, коих всего будет $\lfloor p/r \rfloor + n$. Вместе с «колёсами без нескольких спиц» получим $\lfloor p/r \rfloor + 2n + 1$ непересекающихся подмножеств. Ещё одно подмножество получим, удалив из «ободранного» n-угольника $K_{\alpha_1}(R_1) \bigcup \bigcup_{i=2}^{n+1} K_{\alpha_i}(R_i)$ — объединение рассматриваемых концентрических «колёс». Оставляя это подмножество неподвижным, поворачивая «колёса без спиц» на углы $n_i \alpha_i$, где n_i — число недостающих спиц (при этом у них спицы откуда ни возьмись вырастут, и из них получатся полные колёса со всеми спицами $K_{\alpha_i}(R_i)$) и передвигая $\lfloor p/r \rfloor + n$ спиц так, чтобы из них составилась ломаная граница n-угольника, получаем, что «ободранный» n-угольник $(2+2n+\lfloor p/r \rfloor)$-равносоставлен n-угольнику с границей.

Пусть многоугольник M обычным образом разрезан на несколько частей, тогда их внутренности не пересекаются и образуют в объединении открытое множество M_0.

Задача 63. Докажите, что граница множества M_0 может быть представлена в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых ломаных и незамкнутых ломаных, из которых удалены концы. Далее, её можно разбить на попарно не пересекающиеся полуинтервалы и интервалы.

Указание. Ломаные можно выбирать последовательно. Если ломаная пересекается с ранее построенными, то, удалив из неё точки пересечения, получим несколько «ломаных без концов».

Пусть граница множества M_0 состоит из n попарно непересkающихся полуинтервалов и интервалов с суммарной длиной P, а круг, который лежит в M и не пересекается с границей M_0, но возможно касается её, имеет радиус r.

Задача 64. Докажите, что многоугольник M и множество M_0 являются $(2+2n+\lfloor P/r \rfloor)$-равносоставленными.

Указание. Решение аналогично задаче 62, но некоторые колёса могут быть «ободранными» — их спицы являются нужными нам интервалами, а не полуинтервалами.

Теперь можно доказать лёгкую часть теоремы Банаха — Тарского даже без использования теоремы Кантора — Бернштейна.

Пусть многоугольники M_1, M_2 равновелики. Согласно теореме Бойяи — Гервина они N-равносоставлены при некотором N. Разрежем их на N попарно равных (конгруэнтных) частей и рассмотрим соответствующие множества $M_{1,0}$, $M_{2,0}$. Очевидно, они N-равносоставлены в теоретико-множественном смысле. Согласно задаче 62 множества M_i и $M_{i,0}$ являются $(2+2n_i+\lfloor P_i/r \rfloor)$-равносоставленными, где n_i — число отрезков границы, а P_i — их суммарная длина (эти числа могут быть разными у множеств M_i, но r — одинаковое). Применяя результат задачи 42, получаем, что M_1 и M_2 равносоставлены при разбиении не более чем на

$$\left(2+2n_1+\left\lfloor \frac{P_1}{r} \right\rfloor\right)\left(2+2n_2+\left\lfloor \frac{P_2}{r} \right\rfloor\right)N$$

частей. Но на самом деле число частей не больше

$$N+1+\left\lfloor \frac{P}{r} \right\rfloor+2n_1+2n_2,$$

где $P=\max\{P_1,P_2\}$. Действительно, превращение M_1 в M_2 выглядит так: разбиваем границу $M_{1,0}$ на $n_1+\lfloor P_1/r\rfloor$ интервалов и переносим их на n_1+1 концентрических колёс с центром в круге радиуса $r-\varepsilon$, лежащем в одной из N частей множества $M_{1,0}$. Эти колёса, приняв добавленные спицы, превращаются в n_1+1 полных колёс. Кроме них, есть ещё N частей (одна из которых получена удалением из неё этих колёс). Объединение всех этих частей равно $M_{1,0}$. Передвигаем их так, чтобы они образовали множество $M_{2,0}$. Для превращения $M_{2,0}$ в M_2 в той части, которая содержала n_1+1 концентрических колёс, выделим ещё n_2+1 колёс подходящего радиуса с тем же центром, что и первая система колёс, и $n_2+\lfloor P_2/r\rfloor$ спиц. Перенося эти спицы, составим из них границу $M_{2,0}$, а поворачивая колёса, заполним щели, оставшиеся от передвинутых спиц, и в результате получим многоугольник M_2. Для того, чтобы обе системы колёс не пересекались, подбираем углы поворота с помощью результата задачи 61. Впрочем, колёса одинакового радиуса $R_1=r-\varepsilon$ могут совпадать или содержать одно другое, поэтому их можно выбрать с одинаковым углом между спицами α_1. Тогда вместо двух колёс $K_{\alpha_1,\lfloor P_1/r\rfloor}(R_1)$, $K_{\alpha_1,\lfloor P_2/r\rfloor}(R_1)$ и $\lfloor P_1/r\rfloor+\lfloor P_2/r\rfloor$ недостающих в них спиц можно взять одно колесо $K_{\alpha_1,\lfloor P/r\rfloor}(R_1)$ и $\lfloor P/r\rfloor$ спиц, где $P=\max\{P_1,P_2\}$. Поэтому общее число используемых частей будет равно $N+1+\lfloor P/r\rfloor+2n_1+2n_2$.

Задача 65. Докажите, что величина P_i будет больше у того многоугольника, у которого больше периметр.

Указание. Если суммарные длины разрезов в многоугольниках равны l_i, а их периметры p_i, то

$$P_i=p_i+l_i,\quad p_1+2l_1=p_2+2l_2.$$

Для радиуса r, участвующего в приведённых выше оценках, в некоторых случаях можно получить оценку снизу, зависящую только от числа N частей в разбиении.

Задача 66. Если разрезы в многоугольнике сделаны стеклорезом, число частей равно N, а радиус наибольшего круга, лежащего в многоугольнике, равен R, то наибольший радиус r круга, лежащего в одной из получившихся частей, будет не меньше R/N.

Указание. Если обозначить через r_i радиусы максимальных кругов в полученных N частях, то $r_1+\ldots+r_N\geqslant R$. Последнее неравенство доказывается по индукции. Шаг индукции основан на том, что если круг радиуса R разделить прямой на два сегмента, то их максимальные радиусы удовлетворяют неравенству $R_1 + R_2 \geqslant R$.

§ 9. Разрезания с перемещением частей

Такие задачи рассматривались в [19]. Речь идёт о том, что после каждого разреза полученные части можно передвинуть, перед тем как сделать новый разрез. Эти разрезы, конечно, делаются стеклорезом, то есть мы режем по прямой от края одного куска до края другого, в результате каждый из этих кусков разрезается на две части. Есть и «усовершенствованные» способы разрезания: куски можно накладывать друг на друга, перед тем как сделать разрез. За счёт этого можно ещё уменьшить число разрезаний. Например:

Задача 67. Покажите, как из трёх равных квадратов сделать один большой квадрат, выполнив лишь два разреза.

Указание. Воспользуйтесь приёмом Абул-Вафы из задачи 20.

Задача 68. Квадрат можно разрезать на a^2 единичных квадратов 2α разрезами, где $2^{\alpha-1} < a \leqslant 2^{\alpha}$.

Указание. Сначала квадрат режем на прямоугольники размера $1 \times a$, сделав α разрезов. Для этого режем квадрат пополам или почти пополам (на части размера $a \times \lceil a/2 \rceil$, $a \times \lfloor a/2 \rfloor$,), потом, прикладывая их друг к другу в длину, режем разрезом длины $2a$ оба куска пополам или почти пополам и т. д. Сложив a полученных прямоугольников размера $1 \times a$ опять в квадрат, повторяем ту же процедуру, делая разрезы в перпендикулярном направлении к старым. Потребуется ещё α разрезов. Полученные куски при этом передвигаются только параллельно. Число разрезов, как видим, сильно уменьшается, но их суммарная длина остаётся такой же. Её тоже можно сильно уменьшить, если разрешить накладывать части друг на друга. Тогда суммарная длина разрезов будет равна $2\alpha a = O(a \log_2 a)$. Но из-за увеличения толщины многослойных кусков делать разрезы будет с каждым разом всё труднее.

Так как при каждом разрезе число кусков не более чем удваивается, меньше чем $2\alpha - 1$ разрезами обойтись нельзя. Если известно, что все разрезы делаются параллельно сторонам квадрата, то нельзя обойтись меньше чем 2α разрезами.

Конечно, если разрешать каждый раз резать только один из получившихся кусков, то число разрезов будет на единицу меньше числа кусков.

Задача 69. Для того чтобы перекроить квадрат в прямоугольник $a \times 1/a$, $2^{k-1} \leqslant a < 2^k$, где a — целое, достаточно сделать $k+2$ разреза и необходимо не менее $k/2$ разрезов.

В [19] рассматривалась также следующая задача о распиле прямоугольного параллелепипеда (и написано, что она может иметь применения в сыроварении).

Задача 70. Параллелепипед размера $a \times b \times c$ можно разрезать на единичные кубики, сделав $\alpha + \beta + \gamma$ разрезов, где $2^{\alpha-1} \leqslant a < 2^{\alpha}$, $2^{\beta-1} \leqslant b < 2^{\beta}$, $2^{\gamma-1} \leqslant c < 2^{\gamma}$, но затраченное время (пропорциональное суммарной площади распилов) такое же, как при тривиальном отпиливании кубик за кубиком.

Очевидно, что эта задача решается аналогично предыдущей.

Задача 71. Квадрат можно разрезать на n равных квадратов не более чем $k + O(1)$ разрезами, где $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$. Менее чем за $k-1$ разрезов это сделать нельзя.

Указание. Примените алгоритмы задач 68 и 20.

§ 10. Разрезания прямоугольника на квадраты и полосы

В [5], в частности, рассматривался вопрос о разрезании прямоугольников с целыми сторонами на не обязательно равные квадраты (и без передвижения частей). Как ни странно, результат тоже оказывается любопытным.

Например, это можно сделать фактически с помощью алгоритма Евклида. Действительно, работу алгоритма Евклида можно представить следующим образом: в прямоугольник размерами $l_1 \times l_2$ укладываем a_1 квадратов размера $l_2 \times l_2$, в оставшийся прямоугольник размерами $l_2 \times l_3$ укладываем a_2 квадратов размера $l_3 \times l_3$ и т. д., пока не покроем прямоугольник размера $l_1 \times l_2$ квадратами k разных размеров в общем количестве $a_1 + \ldots + a_k$ штук (см. §8). Обозначим через $l(r)$ сумму элементов цепной дроби, представляющей рациональное число r. Число квадратов в покрытии прямоугольника размерами $m \times n$, которое строится алгоритмом Евклида, равно $l(m/n)$.

Если считать целью алгоритма Евклида покрытие прямоугольника квадратами, то он действует как *жадный алгоритм*: на каждом шаге помещает в прямоугольник на свободное место квадрат максимальных размеров.

На первый взгляд кажется, что алгоритм Евклида всегда разрезает на минимальное число квадратов. Но это не так.

Наименьшее число квадратов, на которое можно разрезать прямоугольник размером $m \times n$, обозначим через $L(m, n)$.

Задача 72. Докажите, что $L(5, 6) = 5$, $l(5/6) = 6$.

Почему рассматриваются прямоугольники с целыми сторонами? Потому, что справедлива *теорема Дена*: если прямоугольник разрезан произвольным образом на квадраты, то его стороны соизмеримы.

Задача 73 (VII Московская математическая олимпиада, 1941 г., второй тур). а) Докажите, что из 5 попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник (7–8 класс, № 1).

б) Докажите, что из шести попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник (9–10 класс, № 1).

Задача 74. Докажите, что имеются только два разных разбиения прямоугольника не более чем на девять разных квадратов (и более чем на один).

Задача 75. а) Разрежьте прямоугольник размера 11×10 на 6 квадратов (не обязательно равных).

б) Разрежьте прямоугольник размера $\dfrac{2 \cdot 4^n + 1}{3} \times \dfrac{2 \cdot 4^n - 2}{3}$ на $3n$ квадратов (не обязательно равных).

Можно рассмотреть более широкий класс разрезаний прямоугольника. Разрежем прямоугольник на два прямоугольника, потом какой-нибудь из них разрежем на два прямоугольника и т. д. до тех пор, пока не получим разбиение исходного прямоугольника на квадраты. Такие разбиения назовём *последовательно-параллельными* (сокращённо П) разбиениями (покрытиями) и обозначим минимальное число квадратов в П-разбиении прямоугольника $m \times n$ через $L_\Pi(m, n)$.

Задача 76. Докажите, что

$$l\left(\frac{m}{n}\right) \geqslant L_\Pi(n, m) \geqslant \left[\log_\phi\left(\sqrt{5}\left(\max(m, n) - \frac{1}{2}\right)\right)\right] \geqslant \left[\log_\phi\left(\sqrt{5}\left(l\left(\frac{m}{n}\right) - \frac{1}{2}\right)\right)\right],$$

а для $q = F_n F_{n+1}$ или $F_n F_{n+2}$, $n \geqslant 2$,

$$L_\Pi(q+1, q) = \left[\log_\phi\left(\sqrt{5}\left(l\left(\frac{q+1}{q}\right) - \frac{1}{2}\right)\right)\right] = \left[\log_\phi\left(\sqrt{5}\left(\max(q+1, q) - \frac{1}{2}\right)\right)\right].$$

Задача 76 показывает, в частности, что $L_\Pi(n, m)$ может быть гораздо меньше $l(m/n)$, и устанавливает точное неравенство между ними.

Задача 77. Докажите, что $L(m, n)$ может быть меньше $L_\Pi(n, m)$.

Задача 78. Докажите, что для некоторых последовательностей m_k и n_k

$$\frac{L(m_k, n_k)}{L_{\Pi}(m_k, n_k)} < 0{,}89.$$

Задача 79. Докажите оценку $L(m, n) > \log_2(m + n)$.

В [26] можно прочитать доказательство теоремы Шпрага о том, что любой прямоугольник с рациональным отношением сторон можно разрезать на попарно различные квадраты.

В 1978 г. голландец А. Дёйвестейн нашёл разбиение квадрата на 21 различный квадрат и доказал, что нет такого разбиения на меньшее число квадратов.

Широко известно простое доказательство того, что куб нельзя разбить на попарно различные кубы.

Любопытен также вопрос о разрезании прямоугольника на полосы одинаковой ширины (но не обязательно равной длины). Следующая задача предлагалась на XXXVII Московской олимпиаде (1974 г., второй тур, 9 класс, № 5) двукратным победителем Международной математической олимпиады и известным в то время задачным композитором Аркадием Климовым.

Задача 80 (А. В. Климов). Прямоугольный лист бумаги размером $a \times b$ см разрезан на прямоугольные полоски, каждая из которых имеет сторону 1 см. Линии разрезов параллельны сторонам исходного листа. Доказать, что хотя бы одно из чисел a или b целое.

Она кажется очевидной (так как обратное утверждение очевидно) и получила от участников много неверных (или неполных) решений. В статье [38] приведено 14 её различных решений. Любопытно, что хотя эта теорема приписана в ней известному голландскому математику Николасу де Брейну, в его статье рассматривалась похожая, но всё же другая задача. Статья [38] опубликована в 1987 г. и, по-видимому, все приведённые в ней решения появились не ранее 1985 г. Ссылок на Московскую олимпиаду в ней нет. Некоторые из этих решений приведены также в книге [2, с. 184–188].

Из одного из приведённых в [38] решений вытекает решение следующей задачи.

Задача 81. Если у прямоугольника наименьшая целая сторона равна a, то наименьшее число полос единичной ширины, на которые его можно разрезать, равно a.

Достижимость оценки здесь очевидна.

Список литературы

[1] Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Monthly». М.: Либроком, 2009.

[2] *Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из книги. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

[3] *Болтянский В. Г.* Третья проблема Гильберта. М.: Наука, 1977.

[4] *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[5] *Гашков С. Б.*, Алгоритм Евклида, цепные дроби, числа Фибоначчи и квадрирование прямоугольников // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 93–115.

[6] *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика, алгоритмы, сложность вычислений. М.: Дрофа, 2005.

[7] *Губа В. С., Львовский С. М.* «Парадокс» Банаха — Тарского. М.: МЦНМО, 2014.

[8] *Дьюдени Г.* Кентерберийские головоломки. М.: Мир, 1979.

[9] *Доледенок А. В., Доледенок А. Н.* Покрытие полосками // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 24. 2019. С. 75–100.

[10] *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. М.: URSS, 2010.

[11] *Кордемский Б.* Математическая смекалка М.: АСТ, 2018.

[12] *Линдгрен Г.* Занимательные задачи на разрезание. М.: Мир, 1977

[13] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2019.

[14] Московские математические олимпиады 1935–1957. М.: МЦНМО, 2010.

[15] Московские математические олимпиады 1958–1967. М.: МЦНМО, 2013.

[16] Московские математические олимпиады 1981–1992. М.: МЦНМО, 2017.

[17] Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 1. М.: ГИТТЛ, 1957.

[18] Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 6. М.: ГИТТЛ, 1961.

[19] *Саати Т.* Целочисленная оптимизация и связанные с ней экстремальные задачи. М.: Мир, 1973.

[20] *Смуров М. В., Спивак А. В.* Покрытие полосками (продолжение) // Квант. 1998. № 5. С. 6–12.

[21] *Фурре Е.* Геометрические головоломки и паралогизмы. М.; Ижевск: РХД, 2000.

[22] *Хадвигер Г.* Лекции об объёме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966.

[23] *Серпинский В.* О теории множеств. М.: Просвещение. 1966.

[24] *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981.

[25] Энциклопедия элементарной математики. Кн. 5. Геометрия. М.: Наука, 1966.

[26] *Яглом И. М.* Как разрезать квадрат. М.: URSS, 2018.

[27] *Ященко И. В.* Парадоксы теории множеств. М.: МЦНМО, 2014.

[28] *Abbot T. G., Abel Z., Charlton D., Demaine E. D., Demaine M. L., Kominers S. D.* Hinged Dissections Exist // `https://arxiv.org/abs/0712.2094`

[29] *Robinson A.* The Banach — Tarski Paradox // `http://math.uchicago.edu/~may/REU2014`

[30] *McFarland A., McFarland J., Smith J. T.* (editors). Alfred Tarski: Early Work in Poland — Geometry and Teaching. Birkhäuser, 2014.

[31] *Frederickson G. N.* Dissections: Plane and Fancy. Cambridge University Press, 2003.

[32] *Kranakis E., Krizanc D., Urruita J.* Efficient regular polygon dissections // JCDCG 1998: Discrete and Computational Geometry. P. 172–187.

[33] *Laczkovich M.* Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle-squaring problem // J. Reine Angew. Math. 1990. Vol. 404. P. 77–117.

[34] *Marks A. S., Unger S. T.* Borel circle squaring // Ann. Math. 2017. Vol. 186, iss. 2. P. 581–605.

[35] *Moese H.* Przyczynek do problemu A. Tarskiego: «O stopniu równoważności wielokątów» (English: A contribution to the problem of A. Tarski "On the degree of equivalence of polygons") // Parametr. 1931–1932. Vol. 2. P. 305–309.

[36] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020.

[37] *Su F. E.* The Banach — Tarski Paradox. 1990 // `https://math.hmc.edu/su/wp-content/uploads/sites/10/2019/06/The-Banach-Tarski-Paradox.pdf`

[38] *Wagon S.* Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle // Amer. Math. Monthly. 1987. Vol. 94. № 7. P. 601–617.

[39] *Tao T.* The Banach — Tarski Paradox // `www.math.ucla.edu/~tao/preprints/Expository/banach-tarski.pdf`

[40] *Tarski A.* O stopniu równoważności wielokątów (English: On the degree of equivalence of polygons) // Mlody Matematyk. 1931. Vol. 1. P. 37–44.

[41] *Tomkowicz G., Wagon S.* The Banach — Tarski Paradox. Cambridge University Press, 2016.

[42] `https://ru.wikipedia.org/wiki/Шарнирная_равносоставленность`

Сергей Борисович Гашков, мехмат МГУ

`sbgashkov@gmail.com`