
Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Можно ли заполнить 99 % пространства попарно непересекающимися шарами? (Имеется в виду заполненная доля объёма шара, радиус которого стремится к бесконечности.)

(А. К. Ковальджи, А. Я. Канель-Белов)

2. Первоначально во всех целых точках числовой прямой расставлены натуральные числа. На первом шаге между каждыми двумя соседними числами записывается их среднее арифметическое, а исходные

числа стираются. На втором шаге с записанными числами проделывается та же операция, и так далее. Оказалось, что все числа, которые мы получаем на каждом шаге, натуральные. Можно ли утверждать, что на некотором шаге все числа равны между собой? (Фольклор)

3. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n -мерного пространства. (А. Я. Канель-Белов)

4. Дробно-кубическое отображение — это отображение вида

$$z \rightarrow \frac{a_1 z^3 + b_1 z^2 + c_1 z + d_1}{a_2 z^3 + b_2 z^2 + c_2 z + d_2}.$$

Всегда ли его можно представить в виде композиции отображений вида $z \rightarrow z^2$, $z \rightarrow z^3$, $z \rightarrow az + b$, $z \rightarrow 1/z$? (А. Я. Канель-Белов)

5. а) Для любых ли длин биссектрис существует треугольник с такими биссектрисами и однозначно ли определяется?

б) Можно ли построить треугольник по трём биссектрисам циркулем и линейкой? (Фольклор)

6. Назовём матрицу *нильпотентной*, если некоторая её степень равна нулю.

а) Докажите, что любая матрица с нулевым следом есть сумма nilpotentных матриц. Каково минимальное их число, достаточное для любой такой матрицы? (Л. Радзивилловский)

б) Докажите, что любая матрица с нулевым следом представима в виде суммы 22 матриц с нулевым квадратом. (Можно ли уменьшить число 22, редакции не известно). (М. Брезар)

7. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \ln n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k. \quad (\Phi. В. Петров)$$

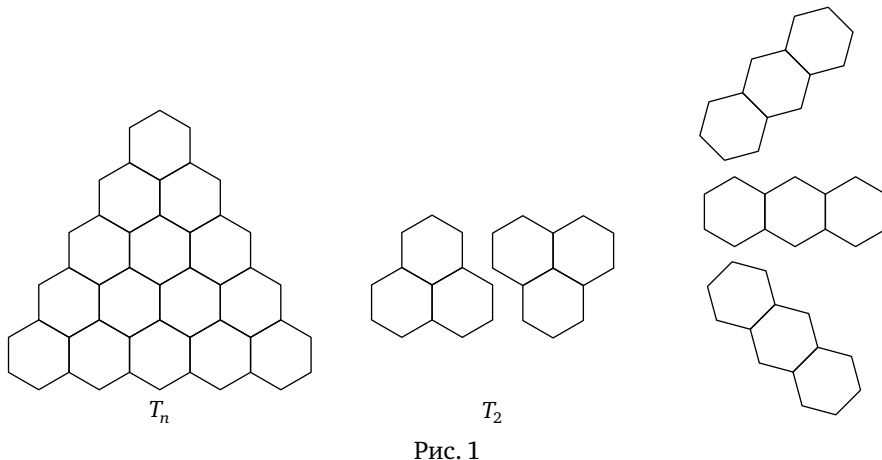


Рис. 1

8. Из $\binom{n}{2}$ правильных шестиугольников составили треугольную доску T_n со стороной n (рис. 1).

а) Докажите, что её нельзя разбить на ряды из троек правильных шестиугольников, стоящих в ряд.

б) Докажите, что её можно разбить на доски T_2 из троек шестиугольников тогда и только тогда, когда $n \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$.

Допустим, что мы можем класть плитки из вещества или антивещества. Если плитка из вещества целиком лежит на плитке из антивещества или наоборот, то они аннигилируют. Можно ли замостить T_n в этом случае так, чтобы после аннигиляции каждая клетка была покрыта ровно по разу?

в) Докажите, что T_n замощается досками T_2 (с возможным использованием антивещества) в точности тогда, когда $n \not\equiv 1 \pmod{3}$.

г) Докажите, что T_n замощается палочками с рис. 1 (с возможным использованием антивещества) в точности тогда, когда $n \equiv 0, 8 \pmod{9}$.

(Дж. Х. Конвей, Дж. К. Лагариас)

9. Многочлен $p(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$p(x+1) - p(x) = x^{100} \quad \text{при всех } x.$$

Докажите, что $p(1-t) - p(t) \geq 0$ при всех $0 \leq t \leq 1/2$. (Д. Клюев)

10. Даны числа $1, 2, \dots, \lfloor e \cdot n! \rfloor$. Докажите, что их нельзя разбить на n классов так, чтобы ни в одном классе не выполнялось равенство $a = b + c$.

(И. Шур)

11. Плотность в последовательности членов с данным свойством равна пределу при $n \rightarrow \infty$ их плотности среди первых n членов последовательности.

а) Пусть $s_{10}(n)$ — сумма по модулю 10 десятичных цифр числа n . Число n назовём k -хорошим, если $s_{10}(n) = s_{10}(n+k)$. Докажите, что плотность количества k -хороших чисел в последовательности $s_{10}(n)$ заключена между $9/11$ и $10/11$.

б) Слово Фибоначчи получается как предел при $n \rightarrow \infty$ последовательности слов S_n , где $S_0 = 0$, $S_1 = 01$, $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$ при $n > 1$, т. е. S_n получается приписыванием S_{n-1} слева к S_{n-2} . Если сдвинуть слово Фибоначчи по себе на k позиций, то возникают рассогласования: 0 наезжает на 1 или наоборот. Докажите, что для любого k плотность рассогласования в слове Фибоначчи существует и при подходящем выборе k может быть сколь угодно малой.

в) Слово Трибоначчи получается из 1 последовательным применением подстановок $1 \rightarrow 12$, $2 \rightarrow 23$, $3 \rightarrow 1$ и переходом к пределу по расширяющейся последовательности подслов: 1213121121312. Докажите, что для любого k плотность рассогласования существует и при подходящем выборе k может быть сколь угодно малой.

(А. Я. Канель-Белов, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов)

12. а) Укажите полную систему инвариантов обычного кубика Рубика (т. е. опишите, из каких начальных конфигураций можно его собрать).

б) Укажите полную систему инвариантов кубика Рубика с ребром n .

в) Исследуйте многомерный аналог данной задачи.

(А. Я. Канель-Белов)

ПОПРАВКИ К ЗАДАЧНИКУ ПРЕДЫДУЩИХ ВЫПУСКОВ

1. Приводим уточнённое условие задачи 25.6, п. (в):

Задача 25.6. в) Пусть a_{ij} , c_i , $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

$$t_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + c_i$$

целое и делится на $k!$. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов a_{i1}, \dots, a_{in} , c_i все числа целые?

(С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов)

2. Автором задачи 26.6, п. (в) является А.Я.Канель-Белов.