

# Реализуемость дисков с ленточками на ленте Мёбиуса

А. И. Бикеев

Назовём *иероглифом* циклическое слово длины  $2n$  из  $n$  букв, в котором каждая буква встречается дважды (стандартный термин: мультиграф с вращениями, имеющий одну вершину). Возьмём выпуклый многоугольник на плоскости. Отметим на ограничивающей его ломаной  $2n$  непересекающихся отрезков и обозначим их буквами из слова в том порядке, в каком эти буквы следуют в слове. Для каждой буквы соединим соответствующие два отрезка ленточкой так, чтобы различные ленточки не пересекались. Любой полученный таким образом объект будем называть *диск с ленточками, соответствующим данному иероглифу*. Назовём иероглиф *слабо реализуемым* на ленте Мёбиуса, если из неё можно вырезать некоторый диск с ленточками, соответствующий данному иероглифу. В работе приводится критерий слабой реализуемости, дающий квадратичный (по количеству букв) алгоритм. Известные критерии, основанные на формуле Эйлера и теореме Мохара, дают экспоненциальные алгоритмы. Приведённый критерий также основан на критерии Мохара реализуемости диска с ленточками на ленте Мёбиуса.

## ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе строится квадратичный алгоритм распознавания вложимости графа с дополнительной структурой в ленту Мёбиуса. Мы начинаем с элементарного пояснения и формулировки основного результата. История вопроса излагается в замечании 4.

Основным результатом работы является теорема 3. Она является топологической версией следующей леммы. Все импликации в этой лемме, кроме  $(4) \Rightarrow (3)$ , доказываются непосредственно. Импликация  $(4) \Rightarrow (3)$  фактически доказана при доказательстве импликации  $(4) \Rightarrow (3)$  теоремы 3.

**ЛЕММА 1.** Пусть  $M$  — матрица над  $Z_2$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

---

При поддержке РФФИ, грант № 19-01-00169. Выражаю благодарность своему научному руководителю А. Скопенкову, а также В. Губареву, Е. Когану, А. Медных и И. Медных за полезные замечания по статье.

- (1) Ранг матрицы  $M$  не превосходит 1.
- (2) Все ненулевые строки матрицы  $M$  равны.
- (3) Одинаковой перестановкой столбцов и строк<sup>1)</sup> можно из  $M$  получить матрицу, у которой некоторый левый верхний квадрат заполнен единицами, а вне его стоят нули.
- (4) У матрицы  $M$  нельзя выбрать одинаковые подмножества строк и столбцов<sup>2)</sup>, на пересечении которых стоит подматрица вида:

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix},$$

у которой вместо  $*$  стоят нули и единицы.

Назовём **иероглифом** циклическое слово длины  $2n$  из  $n$  различных букв, в котором каждая буква встречается дважды (стандартные термины: хордовая диаграмма или мультиграф с вращениями, имеющий одну вершину). Иероглифы считаются равными, если получаются друг из друга биективной заменой букв. Возьмём выпуклый многоугольник на плоскости. Отметим на ограничивающей его ломаной непересекающиеся отрезки и обозначим их буквами из слова в том порядке, в каком

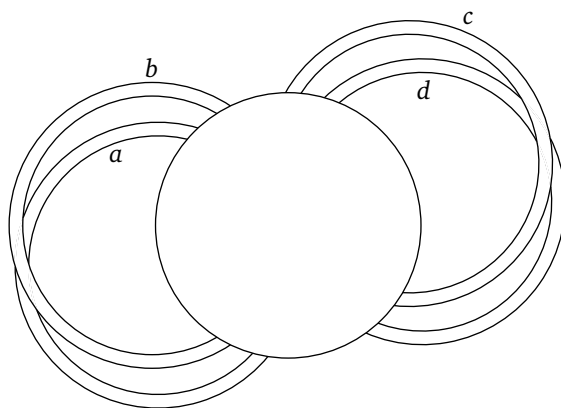


Рис. 1. Пример диска с ленточками, соответствующего иероглифу  $ababcdcd$

<sup>1)</sup> Это означает, что строки и столбцы занумерованы подряд числами от 1 до  $n$  и некоторая перестановка  $\sigma$  чисел от 1 до  $n$  применена и к строкам, и к столбцам.

<sup>2)</sup> Это означает, что строки и столбцы занумерованы подряд числами от 1 до  $n$  и выбраны подмножества тех строк и столбцов, номера которых принадлежат некоторому множеству  $S$ .

эти буквы следуют в слове. Для каждой буквы соединим соответствующие два отрезка ленточкой (не обязательно в плоскости) так, чтобы различные ленточки не пересекались. (Ленточки могут быть и перекрученные, и нет.) Любой из полученных таким образом объектов будем называть **диск с ленточками**, соответствующим данному иероглифу (рис. 1).

Назовём иероглиф **слабо реализуемым** на ленте Мёбиуса, если из неё можно вырезать некоторый диск с ленточками, соответствующий данному иероглифу (ср. с замечанием 4).

**ТЕОРЕМА 2.** *Существует квадратичный алгоритм проверки слабой реализуемости иероглифа на ленте Мёбиуса.*

Будем говорить, что две различные буквы  $a$  и  $b$  иероглифа **перекрещиваются**, если они идут в этом иероглифе в чередующемся порядке ( $abab$ , а не  $aabb$ ).

**ТЕОРЕМА 3.** *Пусть  $H$  — иероглиф. Следующие условия эквивалентны:*

- (1) *Иероглиф  $H$  слабо реализуем на ленте Мёбиуса.*
- (2) *Буквы иероглифа  $H$  можно раскрасить в красный и синий цвета так, что любые две красные буквы перекрещиваются, а любая синяя буква не перекрещивается ни с какой другой буквой.*
- (3) *Операциями удаления пар одинаковых букв, никакая из которых не перекрещивается ни с какой другой буквой, можно свести  $H$  к иероглифу вида  $a_1a_2 \dots a_m a_1a_2 \dots a_m$  (возможно,  $m = 0$ ).*
- (4) *Из  $H$  операциями удаления пар одинаковых букв нельзя получить иероглифы  $abcsab$  и  $ababcdcd$ .*
- (5) *Найдётся такая матрица над  $\mathbb{Z}_2$  ранга не более 1 размера  $n \times n$ , где  $n$  — число различных букв в иероглифе  $H$ , что в клетках вне главной диагонали матрицы стоит 0, если соответствующие буквы иероглифа  $H$  не перекрещиваются, и 1 в противном случае.*

В теореме 3 импликации (3)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1) очевидны. Импликации (1)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (3) доказаны далее. Импликация (1)  $\Leftrightarrow$  (5) является частным случаем теоремы Мохара 5, сформулированной далее.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4. История проблемы.** Базовые ссылки по данной теме: [MT01], [Sk20, § 2], [LZ]. По поводу обобщения на произвольные графы см. [MT01], [Sk20, § 2], [LZ] и [Ko20]. По поводу связи с интегрируемыми гамильтоновыми системами см. [BFM90]. По поводу других задач, связанных с лентой Мёбиуса, см. [F].

Известны полиномиальные алгоритмы распознавания вырезаемости конкретного двумерного многообразия из ленты Мёбиуса, например, использующие эйлерову характеристику или теорему 5 Мохара. Более слож-

ный полиномиальный алгоритм, для любого  $t$  распознающий вырезаемость диска с  $n$  ленточками из диска с  $t$  лентами Мёбиуса, фактически построен в [Ко20]. Однако из существования этих алгоритмов не следует существование полиномиального алгоритма распознавания слабой реализуемости иероглифа на ленте Мёбиуса, поскольку каждому иероглифу с  $n$  парами букв соответствует не одно, а  $2^n$  двумерных многообразий (дисков с ленточками), так как каждая ленточка может быть либо перекрученной, либо нет. Слабая реализуемость иероглифа на ленте Мёбиуса эквивалентна вырезаемости из ленты Мёбиуса хотя бы одного из них. Таким образом, теорема Мохара даёт экспоненциальный алгоритм проверки слабой реализуемости иероглифа на ленте Мёбиуса, основанный на полном переборе, а теорема 3 позволяет проверить это, не рассматривая каждое из многообразий в отдельности.

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И НЕРЕШЁННАЯ ПРОБЛЕМА

Доказательство импликации (4)  $\Rightarrow$  (3) теоремы 3. Пусть для иероглифа  $H$  выполняется условие (4). Обозначим через  $H_1$  иероглиф, получаемый из иероглифа  $H$  удалением всех таких букв, которые не перекрещиваются ни с одной другой. Заметим, что условие (4) выполняется и для иероглифа  $H_1$ . Предположим, что в иероглифе  $H_1$  есть пара не перекрещивающихся букв  $a$  и  $c$ .

Если найдётся буква  $b$ , перекрещивающаяся и с  $a$ , и с  $c$ , то, удалив из  $H_1$  все буквы, кроме  $a$ ,  $b$  и  $c$ , получим иероглиф  $abacbc$ , равный иероглифу  $abcacb$ , что даёт противоречие с условием (4). Значит, любая буква, отличная от  $a$  и  $c$ , перекрещивается не более чем с одной из них.

Следовательно, в силу того, что в иероглифе  $H_1$  любая буква перекрещивается хотя бы с одной другой, найдутся две различные буквы  $b$  и  $d$  такие, что  $b$  перекрещивается с  $a$ , но не перекрещивается с  $c$ , а  $d$  перекрещивается с  $c$ , но не перекрещивается с  $a$ . Поэтому если буквы  $b$  и  $d$  не перекрещиваются, то, удалив все буквы, кроме  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , получим иероглиф  $ababcdcd$ . Если же  $b$  и  $d$  перекрещиваются, то, удалив все буквы, кроме  $a$ ,  $b$  и  $d$ , получим иероглиф  $badbda$ , равный иероглифу  $abcacb$ . Во всех случаях получили противоречие с тем, что  $a$  и  $c$  не перекрещиваются. Значит, любые две буквы иероглифа  $H_1$  перекрещиваются, и тогда он имеет вид  $a_1a_2 \dots a_n a_1a_2 \dots a_n$ . Следовательно, иероглиф  $H$  удовлетворяет условию (3).  $\square$

**Матрицей перекрещиваний** диска с  $n$  ленточками  $D$  называется матрица размера  $n \times n$ , у которой

- на главной диагонали стоит 1, если соответствующая ленточка перекручена, и 0 в противном случае, и
- вне главной диагонали на пересечении строки  $i$  и столбца  $j$  стоит 0, если соответствующие ленточки не перекрещиваются, и 1 в противном случае.

Например, матрицей перекрещиваний любого диска с ленточками, соответствующего иероглифу  $abcacb$ , является матрица вида

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}$$

(элементы на главной диагонали зависят от перекрученности ленточек.)

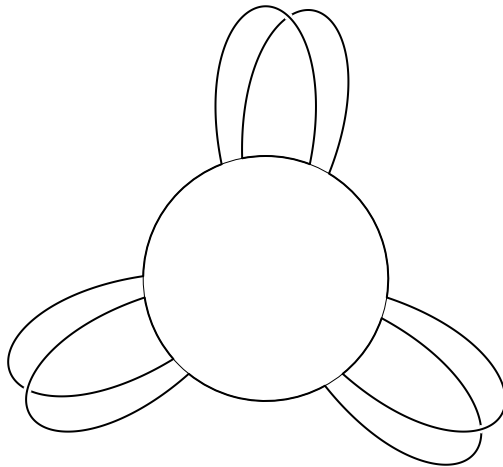


Рис. 2. Диск с тремя лентами Мёбиуса

**Диском с  $t$  лентами Мёбиуса** (рис. 2) называется объединение круга и  $t$  ленточек, в котором

- каждая ленточка приклеивается двумя отрезками к граничной окружности  $S$  круга, а направления на этих отрезках, задаваемые произвольным направлением на  $S$ , «сонаправлены вдоль ленточки»;
- ленточки «отделены», т. е. они приклеены к  $2t$  попарно непересекающимся отрезкам на  $S$ .

Следующая теорема получается несложным применением формы пересечений двумерного многообразия. Эта теорема была сформулирована и применена Б. Мохаром в [Мо89]. См. также [Sk20, утв. 2.8.8(c)] и [Sk20, утв. 6.7.7].

**ТЕОРЕМА 5.** *Диск с  $n$  ленточками можно вырезать из диска с  $t$  лентами Мёбиуса тогда и только тогда, когда ранг над  $Z_2$  матрицы перекрещиваний этого диска с ленточками не превосходит  $t$ .*

Доказательство импликации (1)  $\Rightarrow$  (4) теоремы 3. Матрица перекрещиваний диска с ленточками, соответствующего иероглифу  $abcacb$ , изображена выше. При любой расстановке нулей и единиц на её главной диагонали ранг матрицы больше 1. Поэтому по теореме Мохара иероглиф  $abcacb$  не является слабо реализуемым на ленте Мёбиуса. По аналогичной причине иероглиф  $ababcdcd$  не является слабо реализуемым на ленте Мёбиуса. Отсюда следует нужная импликация.  $\square$

Доказательство теоремы 2. Достаточно показать, что условие (3) из теоремы 3 проверяется за квадратичное время. Построим граф  $G$ , вершины которого соответствуют буквам иероглифа  $H$ , а две вершины соединены ребром, если соответствующие буквы перекрещиваются. Тогда условие (3) эквивалентно тому, что  $G$  есть объединение клики и, возможно, нескольких изолированных вершин. Можно перебором проверить все вершины графа  $G$  на изолированность, а затем проверить, что все оставшиеся вершины попарно соединены рёбрами. Все части алгоритма (построение графа  $G$  и проверка условия (3)) выполняются не более чем за квадратичное время от числа букв в иероглифе.  $\square$

**ПРОБЛЕМА 6.** Пусть дана матрица  $M$  размера  $n \times n$  из нулей и единиц, на диагонали которой стоят нули. Обозначим через  $R(M)$  наименьший ранг над  $Z_2$  матрицы, полученной из  $M$  изменением каких-нибудь диагональных элементов. Найти быстрый (по  $n$ ) алгоритм, вычисляющий  $R(M)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.** В статье Е. Когана [Ко20] для каждого фиксированного целого неотрицательного  $t$  дан полиномиальный (по  $n$ ) алгоритм, проверяющий неравенство  $R(M) \leq t$ .

Проблема 6 интересна в силу следующего утверждения.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 8.** *Если диск с  $n$  ленточками с матрицей перекрещиваний  $M$  реализуем на диске с  $t$  лентами Мёбиуса, то  $R(M) \leq t$ .*

Следующий факт показывает, что проблема 6 не сводится напрямую к задаче о реализуемости иероглифа на ленте Мёбиуса.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 9.** *Не любая матрица из нулей и единиц является матрицей перекрещиваний какого-нибудь диска с ленточками.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности графа  $G$ , изображённого на рис. 3. Его вершины  $A, B, C$  попарно не соединены. Если

существует диск с ленточками, матрица перекрещиваний которого равна матрице смежности графа  $G$ , то концы ленточек, соответствующих вершинам  $A, B, C$ , расположены в нём в одном из четырёх следующих циклических порядков:  $aabbcc$ ,  $abccba$ ,  $acbbca$ ,  $baccab$ . В случае циклического порядка  $aabbcc$  ленточка, соответствующая вершине  $G$ , не может перекрещиваться со всеми тремя ленточками, соответствующими вершинам  $A, B, C$ . В случае циклического порядка  $abccba$  ленточка, соответствующая вершине  $F$ , не может одновременно перекрещиваться с ленточками, соответствующим вершинам  $A$  и  $C$  и не перекрещиваться с ленточкой, соответствующей вершине  $B$ . Аналогично для остальных двух случаев. Получаем противоречие.  $\square$

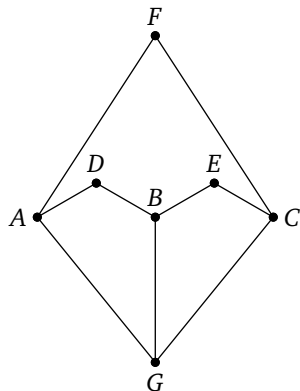


Рис. 3. К утверждению 9

Любые два диска с ленточками, у которых совпадают матрицы перекрещиваний, гомеоморфны, однако, они могут соответствовать разным иероглифам — например, диски с ленточками, соответствующие иероглифам  $aabbcc$  и  $abacc$  соответственно (у каждого из них любые две буквы не перекрещиваются).

### ПРИЛОЖЕНИЕ: ПРЯМОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИМПЛИКАЦИИ (1) $\Rightarrow$ (4) ТЕОРЕМЫ 3

Иероглифы  $abscab$  и  $ababcdcd$  не являются слабо реализуемыми на ленте Мёбиуса в силу теоремы 10 Бетти и леммы 11.

**ТЕОРЕМА 10 (Э. Бетти).** *Любые две различные замкнутые ломаные на ленте Мёбиуса разбивают её.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Теорема Бетти следует из неравенства Эйлера для ленты Мёбиуса [Sk20, 2.8.2] и теоремы Римана для ленты Мёбиуса [Sk20, 2.8.3.(b)]. Приведём детали.

Если данные ломаные не пересекаются, то они разбивают её в силу теоремы Римана для ленты Мёбиуса.

Пусть данные ломаные пересекаются. Можно считать, что вершины и рёбра этих ломаных образуют связный граф. Для любого связного графа с  $V$  вершинами и  $E$  рёбрами, изображённого без самопересечений на ленте Мёбиуса и разбивающего её на  $F$  граней, выполнено неравенство Эйлера:  $V - E + F \geq 1$ . Легко проверить, что в данном случае  $V < E$ , поэтому  $F > 1$ , значит, эти ломаные разбивают ленту Мёбиуса.  $\square$

Лемма 11. На любом диске с ленточками, соответствующем иероглифу  $abcacb$  или  $ababcdcd$ , найдутся две кривые, пересекающиеся в конечном числе точек, которые не разбивают этот диск с ленточками.

Доказательство.

На рис. 4 и рис. 5 показаны примеры таких пар кривых на дисках с неперекрытыми ленточками, соответствующих иероглифам  $abcacb$  и  $ababcdcd$ . Покажем, что если заменить одну или несколько ленточек любого из этих дисков с ленточками на перекрученную, то соответствующие пары кривых по-прежнему не будут разбивать полученные диски с ленточками.

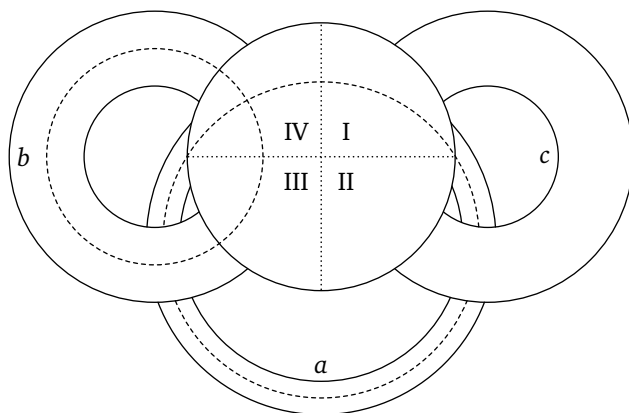


Рис. 4. Диск с ленточками, соответствующий иероглифу  $abcacb$ , и две кривые на нём

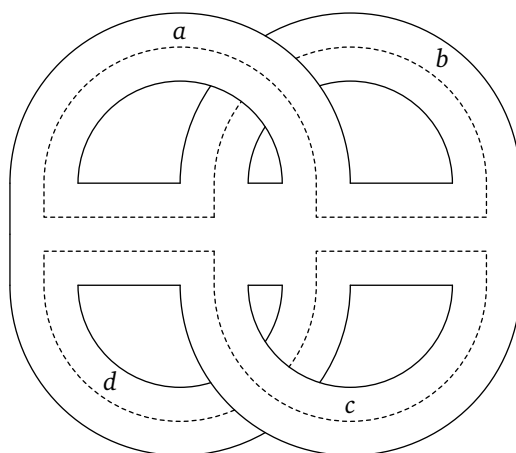


Рис. 5. Диск с ленточками, соответствующий иероглифу  $ababcdcd$ , и две кривые на нём



Пусть в диске с ленточками, изображённом на рис. 4, некоторые ленточки заменены на перекрученные. Очевидно, ленточка  $c$  находится в одной компоненте связности дополнения кривых до диска с ленточками. Тогда области I и II лежат в этой компоненте. Следовательно, в ней целиком лежит ленточка  $a$ . Значит, все части 1, 2, 3, 4 лежат в этой компоненте. Тогда в ней лежит и ленточка  $b$ . Значит, кривые не разбивают диск с ленточками.

Для иероглифа  $ababcdcd$  и диска с ленточками, изображённого на рис. 5, выполнено следующее. Если заменить ленточку  $b$  на перекрученную, а ленточку  $a$  не заменять, то каждая из частей ленточки  $a$ , на которые её разбивает кривая, лежит в одной компоненте связности с центром диска. Таким образом, ленточка  $a$  целиком лежит в одной компоненте связности, тогда и ленточка  $b$  тоже (каждая её часть не отделена от какой-то из частей ленточки  $a$ ). То же верно, если заменить ленточку  $a$  на перекрученную, а ленточку  $b$  не заменять. Если же обе ленточки  $a$  и  $b$  заменить на перекрученные, то связность обеих ленточек можно проверить непосредственно. Для ленточек  $c$  и  $d$  можно провести полностью аналогичное рассуждение.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [BFM90] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // УМН. 1990. Т. 45, вып. 2. Р. 49–77.
- [Ko20] Kogan E. On the minimal rank of a matrix with coefficients in  $Z_2$  without the numbers on the main diagonal. arxiv:2104.10668.
- [LZ] Ландо С. К., Звонкин А. К. Графы на поверхностях и их приложения. М.: МЦНМО, 2010.
- [Mo89] Mohar B. An obstruction to embedding graphs in surfaces // Discrete Math. 1989. V. 78. P. 135–142.
- [MT01] Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. Baltimor, MD: Johns Hopkins University Press, 2001.
- [Sk20] Скопенков А. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2020
- [F] Фукс Д. Лента Мёбиуса. Вариации на старую тему // Квант. 1979. № 1. С. 2–9.