Геометрия: классика и современность

Обобщение одного факта о треугольниках Наполеона

П. А. Кучерявый

Введение

В октябре 1820 года в Дублинском университете студентам были предложены следующие задачи [2, с. 125–126].

10. На сторонах треугольника ABC построены равносторонние треугольники внешним образом. Докажите, что их центры C, C', C'' составляют равносторонний треугольник.

11. На сторонах треугольника ABC внутренним образом построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры D, D', D'' составляют равносторонний треугольник.

12. Найти связь между площадями треугольников ABC, $CC'C''$, $DD'D''$.

Первые две задачи сейчас широко известны как теорема Наполеона. Результат этой статьи обобщает задачу 12 на многоугольники.

Результат

Зафиксируем натуральное число $n>2$. Введём обозначения $M=\{1, \ldots, n-1\}$, $M_k = M \setminus \{k\}$. Пусть $r \in M$, и пусть дан произвольный n-угольник A с вершинами $a_1, \ldots, a_n$. Определим преобразование σ_r следующим образом: на отрезке $a_i a_{i+1}$ построим такой равнобедренный треугольник

с вершиной b_i, что
$$\angle a_i b_i a_{i+1} = \frac{2\pi r}{n},$$
где $\angle a_i b_i a_{i+1}$ — ориентированный. (В частности, если n чётное и $r = n/2$, то b_i — середина отрезка $a_i a_{i+1}$.) Тогда $\sigma_r(A)$ — многоугольник с вершинами $b_1, \ldots, b_n$.

Теорема. 1. *Для всех $i, j \in M$ преобразования σ_i и σ_j коммутируют. Иными словами,*
$$\sigma_i(\sigma_j(A)) = \sigma_j(\sigma_i(A)).$$

2. *Из предыдущего пункта следует, что корректно определены преобразования*
$$\alpha_k = \prod_{i \in M_k} \sigma_i, \quad \alpha = \prod_{i \in M} \sigma_i.$$
При этом α сопоставляет n-угольнику A вырожденный n-угольник, все точки которого совпадают с центром масс A. В частности, так как $\sigma_k(\alpha_k(A)) = \alpha(A)$, многоугольник $\alpha_k(A)$ — звёздчатый с тем же центром масс, что и A.

3. *Обозначим через S функцию, сопоставляющую n-угольнику его ориентированную площадь. Тогда*
$$\sum_{k \in M} S(\alpha_k(A)) = S(A).$$

Пункты 1 и 2 носят название теоремы Петра — Дугласа — Неймана. Впервые эта теорема была опубликована Карелом Петром в 1908 году [4]. Позже она была независимо переоткрыта Джесси Дугласом в 1940 году [1] и Бернардом Нейманом в 1941 году [3]. Частный случай утверждения 2 был дан в 2009 году в качестве задачи на студенческой олимпиаде мехмата МГУ [5].

В доказательстве пунктов 1 и 2 следуем тексту книги В. В. Прасолова [6, 1.1.10].

Доказательство. Зафиксируем n. Положим
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$
Тогда C — элемент алгебры матриц $n \times n$ над комплексными числами. Подалгебру, порождённую этим элементом, обозначим $\mathscr{C}$. Элементы этой

подалгебры называются *циркулянтами*. Так как минимальный многочлен матрицы C равен $x^n - 1$, получаем естественный изоморфизм

$$\mathscr{C} \simeq \mathbb{C}[x]/(x^n - 1), \quad C \mapsto x.$$

Многочлен, в который переходит циркулянт при данном изоморфизме, будем называть вспомогательным.

Положим

$$\varepsilon_r = e^{2\pi r i/n}, \quad c_r = \frac{1}{1 - \varepsilon_r}.$$

Злоупотребляя обозначениями, будем считать, что $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные координаты вершин многоугольника A. Пусть b_j — координата вершины равнобедренного треугольника с основанием (a_j, a_{j+1}) и углом при вершине $2\pi r/n$. Несложно проверить, что

$$b_i = \frac{a_{i+1} - \varepsilon_r a_i}{1 - \varepsilon_r}.$$

Иными словами, столбец чисел $b_1, \ldots, b_n$ получается из столбца $a_1, \ldots, a_n$ умножением на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\frac{x - \varepsilon_r}{1 - \varepsilon_r}.$$

Так как элементы из $\mathscr{C}$ коммутируют, получаем пункт 1.

Заметим, что

$$f(x) := \prod_{i \in M} (x - \varepsilon_i) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i.$$

Столбец, задающий координаты точки $\alpha(A)$, получается из столбца $a_1, \ldots, a_n$ домножением на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\prod_{i \in M} \frac{x - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} = \frac{f(x)}{f(1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{n}.$$

Поэтому если обозначить $c_1, \ldots, c_n$ координаты вершин $\alpha(A)$, то

$$c_j = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{n},$$

что доказывает утверждение 2.

Теперь докажем утверждение 3.

Обозначим через O начало координат. Рассмотрим две точки b, c на комплексной плоскости. Площадь треугольника Obc равна

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \operatorname{Re} b & \operatorname{Im} b \\ \operatorname{Re} c & \operatorname{Im} c \end{vmatrix} = \frac{1}{4i} (\bar{b} c - b \bar{c}).$$

Следовательно, ориентированная площадь многоугольника A равна

$$\frac{1}{4i}\sum_{k=1}^{n}(\bar{a}_k a_{k+1} - a_k \bar{a}_{k+1}) = \frac{1}{4i}\sum_{k=1}^{n} a_k(\bar{a}_{k-1} - \bar{a}_{k+1}).$$

Через X обозначим столбец чисел $a_1, \dots a_n$, через X_k — столбец из координат вершин многоугольника $\alpha_k(A)$. Положим

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \vdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, S — циркулянт со вспомогательным многочленом $x^{n-1} - x$. Тогда площадь многоугольника с вершинами a_i, умноженная на $4i$, равна

$$4iS(A) = X^T S\,\overline{X}.$$

Столбец чисел X_k получается из столбца X умножением на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\prod_{i\in M_k}\frac{x-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}.$$

Тогда $\overline{X}_k$ получается из $\overline{X}$ умножением на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\prod_{i\in M_k}\frac{x-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}.$$

Вспомогательный многочлен $\dfrac{x-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}$ задаёт циркулянт

$$D = \begin{pmatrix} 1-c_i & c_i & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 1-c_i & c_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_i \\ c_i & 0 & \vdots & \dots & 1-c_i \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что D^T задаётся вспомогательным многочленом

$$\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}.$$

Таким образом, строка X_k^T получается из строки X^T домножением справа на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\prod_{i\in M_k} \frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}.$$

Теперь достаточно доказать, что

$$(x^{n-1}-x)\Bigg(\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{x-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)\Bigg) \equiv (x^{n-1}-x) \mod (x^n-1).$$

Для этого достаточно показать, что любой корень n-й степени из 1 также является корнем многочлена

$$(x^{n-1}-x)\Bigg(\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{x-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)-1\Bigg).$$

Пусть ε — некоторый корень n-й степени из 1. Если $\varepsilon = 1$, то ε — корень многочлена $x^{n-1}-x$. В противном случае обозначим корень $\bar{\varepsilon}_t$ и покажем, что он является корнем многочлена

$$\Bigg(\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{x-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)\Bigg)-1.$$

Выполнены равенства

$$\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{\bar{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{\bar{\varepsilon}_t^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big) = \sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{\bar{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{\varepsilon_t-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big) =$$

$$=\prod_{i\in M_t}\Big(\frac{\bar{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{\varepsilon_t-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big) = \prod_{i\in M_t}\left|\frac{\varepsilon_t-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\right|^2 = 1.$$

Последнее равенство следует из того, что существует взаимно однозначное соответствие между векторами $\varepsilon_t-\varepsilon_i$ и векторами $1-\varepsilon_i$, а именно отражение относительно серединного перпендикуляра между точками 1 и ε_t. Оно сохраняет длины векторов, и из него следует равенство

$$\prod_{i\in M_t}|\varepsilon_t-\varepsilon_i|^2 = \prod_{i\in M_t}|1-\varepsilon_i|^2. \qquad \square$$

Применим эту теорему к треугольнику ABC из задач 10–12. Выберем такую ориентацию треугольника ABC, чтобы было $S(ABC) > 0$. Находим, что

$$\alpha_1(\Delta ABC) = \sigma_2(\Delta ABC) = \Delta CC'C'',$$
$$\alpha_2(\Delta ABC) = \sigma_1(\Delta ABC) = \Delta DD'D''.$$

Из пункта 2 теоремы следует, что $\Delta CC'C''$ и $\Delta DD'D''$ правильные. Очевидно, что $S(CC'C'') > 0$. Заметим, что $\sigma_2(\Delta DD'D'')$ — вырожденный треугольник с тремя совпадающими вершинами. Если бы у $CC'C''$ и $DD'D''$ совпадала ориентация, то $\sigma_2(\Delta CC'C'')$ также был бы вырожденным треугольником, что не верно. Отсюда $S(DD'D'') < 0$.

Таким образом, для неориентированных площадей из пункта 3 теоремы получаем

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CC'C''} - S_{\Delta DD'D''}.$$

Список литературы

[1] *Douglas J.* On linear polygon transformations // Bull. Amer. Math. Soc. 1940. V. 46, № 6. P. 551–560.

[2] Dublin problems: a collection of questions proposed to the candidates for the gold medal at the general examinations, from 1816 to 1822 inclusive. Which is succeeded by an account of the fellowship examination, in 1823. HardPress, 2018.

[3] *Neumann B. H.* Some Remarks on Polygons // J. Lond. Math. Soc. 1941. V. 16, № 4. P. 230–245.

[4] *Petr K.* Ein Satz über Vielecke // Arch. Math. Phys. 1908. V. 13. P. 29–31.

[5] Задача 2009 — 3 // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 227.

[6] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: МЦНМО, 2015.

Пётр Алексеевич Кучерявый, студент факультета математики ВШЭ

peter.ktchr@gmail.com