Прикладная математика, информатика

Принцип симметрии в задачах оптимизации

М. А. Горелов

Использование симметрии задачи при её решении — один из самых фундаментальных методологических принципов. Всем профессиональным математикам это хорошо известно. Однако в средней, да вероятно и в высшей школе, этому принципу уделяется явно недостаточно внимания. По-видимому, происходит это потому, что чаще всего центральными являются какие-то другие идеи, а принцип симметрии используется как некое вспомогательное средство, позволяющее лишь упростить решение. Однако существуют большие классы задач, при решении которых использование симметрии является основной идеей, позволяющей довести решение до конца. Во многих случаях использование принципа симметрии позволяет избежать длинных вычислений или использования сложного математического аппарата. Об одном из таких классов задач и пойдёт речь далее.

§ 1. Необходимые условия максимума

Необходимые условия экстремума достаточно широко представлены в курсах математики. Но обычно ограничиваются изучением условий, использующих приближения заданных функций линейными: для гладких функций используются приближения «в малом», а для выпуклых — односторонние приближения. К такого рода условиям можно отнести изучаемое в школе необходимое условие Ферма, метод множителей Лагранжа, теорему Куна — Такера, принцип максимума Понтрягина, теорему Милютина — Дубовицкого и т. д. Об этом написано много книг (см., например, [2, 3]), да и оригинальные статьи продолжают выходить до сих пор.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 28, 2021 (165–198)

Нас будут интересовать условия иного рода. Неформально говоря, их можно сформулировать следующим образом: если задача обладает какой-то симметрией, то такой же симметрией должно обладать и её решение [4]. Сформулируем этот принцип более строго.

Задачей максимизации будем называть пару $\langle X, f\rangle$, где X — множество, а f — функция, отображающая множество X в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Автоморфизмом задачи $\langle X, f\rangle$ назовём такое биективное (взаимно однозначное) отображение $\pi\colon X \to X$, что для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(\pi(x)) = f(x)$.

Множество автоморфизмов задачи с операцией композиции отображений образует группу. Мы этот факт существенно использовать не будем, поэтому его доказательство оставляем читателю.

Решением задачи $\langle X, f\rangle$ будем считать множество

$$\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x) = \{x \in X : \forall\, y \in X \quad f(x) \geqslant f(y)\}.$$

В дальнейшем мы будем широко применять следующее простое утверждение.

Основная теорема. *Пусть π — автоморфизм задачи $\langle X, f\rangle$. Тогда образ $\pi(\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x))$ множества $\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$ при отображении π совпадает с самим множеством $\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$. Тогда для любого $y \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(y)$, а в силу определения автоморфизма справедливо равенство $f(\pi(x)) = f(x)$. Следовательно, для любого $y \in X$ имеет место неравенство $f(\pi(x)) \geqslant f(y)$, т. е. $\pi(x) \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$. Таким образом, $\pi(\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)) \subset \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$. □

Обратное включение доказывается аналогично.

Обратим внимание на то, что основная теорема даёт необходимое условие глобального максимума. Разумеется, аналогичные условия могут быть сформулированы для локальных максимумов, глобальных минимумов и т. п.

Поскольку речь идёт о необходимом условии, эффективно использовать основную теорему можно лишь в тех задачах, в которых максимум достигается. Но то же, разумеется, относится и к «традиционным» необходимым условиям экстремума.

Приведём два важных примера автоморфизмов.

Пусть t — действительное число, а отображение $\pi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ставит в соответствие точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ точку $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_k)$. Если $X = \mathbb{R}^k$, а

$$f(x) = \frac{(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_x)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2},$$

то π — автоморфизм задачи $\langle X, f\rangle$. В данном случае группа автоморфизмов задачи $\langle X, f\rangle$ изоморфна группе ненулевых действительных чисел по умножению.

Разумеется, здесь дело в однородности функции f. Это свойство можно с успехом применять при решении задач оптимизации. Но об этом неоднократно писалось (см., например, [1, 6]), поэтому подробно останавливаться на таких автоморфизмах не станем[1)].

Основное внимание сосредоточим на автоморфизмах иного рода. Пусть σ — перестановка элементов множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. С каждой такой перестановкой можно связать отображение $\sigma_*\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, ставящее в соответствие точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ точку $\sigma_*(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$. Очевидно, отображение σ_* биективно на $\mathbb{R}^k$, а его сужение (которое будем обозначать тем же символом) на множество $\mathbb{R}^k_+$ точек с неотрицательными координатами биективно на $\mathbb{R}^k_+$.

Если $X = \mathbb{R}^k$, а $f(x) = x_1 x_2 \ldots x_k$, то для каждой перестановки σ соответствующее отображение σ_* является автоморфизмом задачи $\langle X, f\rangle$.

Если $X = \mathbb{R}^3$, а $f(x) = x_1^2 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^2 x_1$, то для чётных перестановок σ соответствующие отображения σ_* являются автоморфизмами, а для нечётных — нет.

На этом мы закончим изложение «теории» и перейдём к решению конкретных задач. Как будет видно, при этом без полученных знаний вполне можно обойтись. Но некий общий взгляд на вещи кажется достаточно важным.

Большинство дальнейших примеров возникает из задач на доказательство неравенств. И начнём мы с самой популярной из них.

§ 2. Неравенство Коши

Нашей ближайшей целью будет доказательство неравенства Коши[2)] между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}.$$

[1)] Возможно, для однородных функций ненулевой степени понятие автоморфизма стоило бы определить чуть более широко: назовём автоморфизмом задачи оптимизации $\langle X, f\rangle$ пару (π, φ), состоящую из функции $\pi\colon X \to X$ и возрастающей функции $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если выполняется равенство $\varphi(f(\pi(x))) = f(x)$. Тогда пара (π, φ) функций $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_k)$ и $\varphi(y) = t^{-d} y$ $(t > 0)$ будет автоморфизмом задачи оптимизации $\langle X, f\rangle$, если $X = \mathbb{R}^k$, а f — однородная функция степени d.

[2)] Огюстен Луи Коши (1789–1857) — французский математик. Он известен оригинальными результатами в самых разных областях математики, от тео-

Данное неравенство выполняется для всех неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Для доказательства достаточно установить, что при произвольном неотрицательном s максимум функции $f(a) = a_1 a_2 \ldots a_k$ на множестве

$$A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1 + a_2 + \ldots + a_k = ks,\ a_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

достигается в точке $a^0 = (s, s, \ldots, s)$.

Функция f непрерывна, а множество A компактно, поэтому максимум достигается.

Пусть он достигается в некоторой точке $a^1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1)$, отличной от a^0. Поскольку $f(a^0) > 0$, координаты точки a^1 строго положительны.

Так как $a^1 \neq a^0$, найдутся индексы i и j, для которых $a_i^1 \neq a_j^1$. Пусть σ — транспозиция, определённая на множестве $\{1, 2, \ldots, k\}$, меняющая местами числа i и j. Тогда σ_* — автоморфизм задачи $\langle A, f \rangle$. Поэтому точка $a^2 = \sigma_*(a^1)$ — тоже точка максимума.

Пусть S — отрезок, получающийся при пересечении прямой (a^1, a^2) с множеством A. Тогда сужение функции f на этот отрезок имеет две точки максимума a^1 и a^2. Причём обе эти точки лежат внутри отрезка.

Но такого не может быть, поскольку это сужение — многочлен второй степени. Полученное противоречие доказывает, что сделанное предположение неверно, и единственной точкой максимума является точка a^0.

Неравенство доказано. Причём попутно установлено, что равенство достигается, только если значения всех переменных равны.

В книге [10] собраны 74 доказательства неравенства Коши. Почти все они используют в разных сочетаниях три идеи:

- индукцию;
- выпуклость;
- дифференциальное исчисление.

Приведённое выше доказательство основано на другой, более фундаментальной идее. Читатель может убедиться, что оно не сложнее уже известных доказательств. А то, что для получения окончательного результата не пришлось иметь дело с какими-то формулами, тоже можно рассматривать как некое достоинство.

рии чисел до геометрии и механики. Но большое внимание он уделял и систематизации накопленных к тому времени знаний. В частности, в 1821 г. вышел в свет его «Курс анализа Королевской политехнической школы», в котором было опубликовано доказательство неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Это доказательство до сих пор остаётся наиболее популярным.

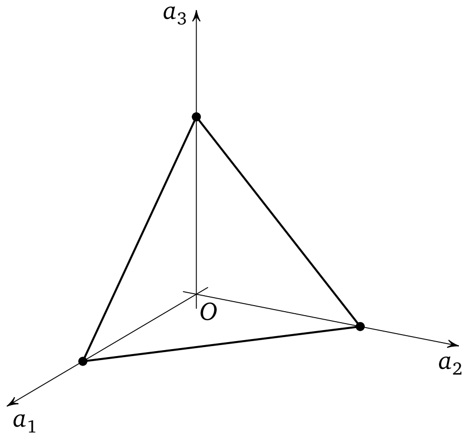

Рис. 1

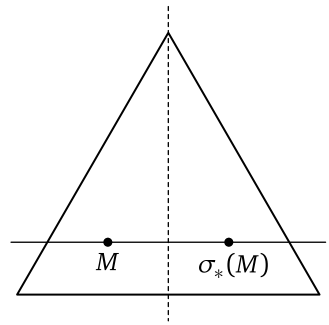

Рис. 2

Удобно иметь в виду следующие геометрические образы. Множество A — это стандартный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^k$ (см. рис. 1 — разумеется, для случая $k = 3$). На рис. 2 этот симплекс нарисован отдельно. Преобразование σ_* — симметрия этого симплекса относительно гиперплоскости. Если точка максимума M не лежит в этой гиперплоскости, то и симметричная ей точка $\sigma_*(M)$ будет точкой максимума, а отсюда получается противоречие. Поскольку все симметрии симплекса являются автоморфизмами данной задачи, точка максимума должна принадлежать всем плоскостям симметрии. А такая точка только одна.

Упражнения

1 (Киевская математическая олимпиада, 1949 год, 9–10 классы). Докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^2 \leqslant m(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — произвольные действительные числа.

2. Докажите, что для всех положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняется неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) \geqslant k^2.$$

3 [11, 1973 год, 182]. Докажите, что

а) если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2};$$

б) если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3};$$

в) если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — положительные числа ($k \geqslant 2$), то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_k}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_k}+\ldots+\frac{a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}} \geqslant \frac{k}{k-1}.$$

(*Л. Г. Лиманов*)

Указание. Задача сводится к предыдущей, если к каждой дроби добавить 1.

4 (неравенство Серпинского[3)]). Пусть $A=(a_1+a_2+\ldots+a_k)/k$ — среднее арифметическое, $G=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$ — среднее геометрическое, а

$$H=\frac{k}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_k}}$$

— среднее гармоническое положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Докажите неравенство $G^k \leqslant A^{k-1}H$.

5 (из материалов жюри Международной математической олимпиады, 1998 г.). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — положительные числа такие, что $a_1+a_2+\ldots+a_k<1$. Докажите, что

$$\frac{a_1a_2\ldots a_k(1-a_1-a_2-\ldots-a_k)}{(a_1+a_2+\ldots+a_k)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)} \leqslant \frac{1}{k^{k+1}}.$$

§ 3. Симметрические неравенства

Задача 1 (XXVI Московская математическая олимпиада, 1963 год, 9 класс, задача 3). Пусть a, b, c — любые положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Умножим неравенство на наименьший общий знаменатель и перенесём все слагаемые в левую часть. Получим неравенство вида $\Phi(a,b,c) \geqslant 0$. Вид функции $\Phi(a,b,c)$ нетрудно найти, но даже это нам не потребуется. Достаточно понимать, что $\Phi(a,b,c)$ — симметрический однородный многочлен третьей степени.

Задача будет решена, если удастся доказать, что неравенство

$$\Phi(a,b,c) \geqslant 0$$

[3)] Вацлав Франциск Серпинский (1882–1969) — польский математик, автор работ по теории множеств, топологии, теории функций и теории чисел. Читателю, возможно, знакома такая красивая конструкция, как ковёр Серпинского. На русский язык переведены несколько его популярных книг, например [7, 8].

справедливо для всех *неотрицательных*[4] значений переменных. Это обеспечит существование минимума у функции $\Phi(a,b,c)$.

Будем рассматривать задачу поиска минимума функции $\Phi(a,b,c)$ на множестве

$$A=\{(a,b,c)\colon a+b+c=1,\ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0\}.$$

В группу автоморфизмов этой задачи входят все движения пространства, отображающие треугольник A на себя.

Возможны три случая: искомая точка минимума M лежит внутри треугольника, лежит внутри стороны треугольника или совпадает с его вершиной.

Рассмотрим первый случай. Если для какого-то автоморфизма π точка $\pi(M)$ отлична от M, то получим противоречие: сужение функции Φ на прямую, проходящую через точки M и $\pi(M)$, имеет две точки минимума внутри отрезка, по которому эта прямая пересекает множество A. Но это сужение — многочлен третьей степени. Поэтому его производная — квадратичная функция и не может два раза менять знак с минуса на плюс, что происходит в точках минимума.

Значит, точка M инвариантна относительно всех автоморфизмов задачи и, следовательно, совпадает с центром треугольника.

Во втором случае можем аналогичным образом рассмотреть автоморфизмы, отображающие рассматриваемую сторону на себя[5]. Тогда придём к выводу, что точка минимума должна совпадать с серединой стороны.

В результате мы придём к тому, что неравенство $\Phi(a,b,c)\geqslant 0$ достаточно проверить в трёх случаях: 1) $a=b=c=1/3$; 2) $a=b=1/2$, $c=0$; 3) $a=1$, $b=c=0$.

В первых двух случаях неравенство $\Phi(a,b,c)\geqslant 0$ равносильно исходному, поэтому можно проверять последнее. Это уже банальные вычисления, но и их можно немного упростить. В силу того, что исходное неравенство однородно (степени 0), оно выполняется при $a=b=c=1/3$ тогда и только тогда, когда оно выполняется при $a=b=c=1$. А в этом случае левая часть

---

[4] Так как многочлен — функция непрерывная, из того, что неравенство $\Phi(a,b,c)\geqslant 0$ справедливо при всех положительных значениях переменных, следует, что оно выполняется и при всех неотрицательных числах a,b,c. Разумеется, обратное верно всегда. Поэтому, усиливая утверждение, мы по сути ничего не меняем.

[5] Здесь это не очень существенно, но на будущее важно понять, что в этом случае сужение функции Φ на прямую, содержащую сторону треугольника, будет многочленом второй, а не третьей степени. И следует это как раз из симметрии задачи. Разберитесь в этом!

неравенства как раз равна 3/2. Точно так же проверка случая 2) сводится к вычислению левой части данного в условии неравенства при $a = b = 1$, $c = 0$.

Остаётся разобраться со случаем 3. Если мы умножим данное в условии неравенство на наименьший общий знаменатель и подставим значения $a = 1$, $b = c = 0$, то в правой части полученного неравенства окажется нуль. А многочлен в левой части имеет только положительные коэффициенты, поэтому его значение в интересующей нас точке уж во всяком случае неотрицательно[6)]. Это завершает решение задачи.

Результат последней задачи называют неравенством Несбита (A. M. Nesbitt), поскольку он опубликовал эту задачу в 1903 г. Неравенство Несбита[7)] имеет большое число обобщений и аналогов. Один из них рассмотрим прямо сейчас.

Следующая задача была предложена в 1990 г. в журнале American Mathematical Monthly (задача E3263). Ниже она сформулирована так, как в журнале, включая звёздочку, обозначающую повышенную трудность.

Задача 2. Для $1 \leqslant k \leqslant n$ рассмотрим функцию

$$\Phi_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1}{1-a_1} \cdot \frac{a_2}{1-a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_k}{1-a_k} + \ldots + \frac{a_{n-k+1}}{1-a_{n-k+1}} \cdot \frac{a_{n-k+2}}{1-a_{n-k+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{1-a_n},$$

где в сумму входят слагаемые, отвечающие всем наборам индексов $1 \leqslant i_1 < < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Пусть $M_k(n)$ — наибольшее значение этой функции для всех положительных значений переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Нетрудно видеть, что $M_n(n) = (n-1)^{-n}$.

(а) Докажите, что $M_2(n) = 1$.

(б) Докажите, что $M_3(4) = 4/27$.

(в*) Для каких пар k, n, удовлетворяющих условию $3 \leqslant k \leqslant n$, верно равенство $M_k(n) = C_n^k (n-1)^{-k}$? ($C_n^k$ — число сочетаний).

Решение. Прежде всего обсудим, почему эта задача аналогична неравенству Несбита? В левой части неравенства Несбита стоит однородная функция степени нуль. А потому его достаточно доказать для случая $a + b + c = 1$. Но тогда его можно записать в виде

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geqslant \frac{3}{2}.$$

6) А можно воспользоваться соображениями непрерывности. Вблизи этой вершины симплекса левая часть исходного неравенства принимает очень большие положительные значения, поэтому разность левой и правой частей исходного неравенства, а значит, и $\Phi(a, b, c)$ положительны. Тогда в самой вершине значение $\Phi(a, b, c)$ неотрицательно, что и требуется.

7) В другом контексте имя автора этой задачи мне не встречалось.

В левой части этого неравенства стоит функция $\Phi_1(a, b, c)$. Правда, в этой задаче ищется минимум функции (наибольшего значения, очевидно, нет).

Равенство $M_n(n) = (n-1)^{-n}$, о котором говорится в задаче, сводится к неравенству

$$(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_k) \geqslant (k-1)^k a_1 a_2 \dots a_k,$$

которое доказывается аналогично неравенству Коши.

Теперь приступим непосредственно к решению. Положим $m_2(n) = 1$ и $m_k(n) = C_n^k (n-1)^{-k}$ при $k > 2$ и докажем неравенство

$$\Phi_k(a_1, a_2, \dots, a_n) \geqslant m_k(n).$$

Умножим это неравенство на произведение $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)$ и докажем, что получившееся неравенство выполняется для всех неотрицательных значений переменных, в сумме дающих единицу. В правой части будет стоять указанное произведение, умноженное на константу, т. е. в правую часть каждая из переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$ будет входить в первой степени. В левой части будет стоять n слагаемых, в каждое из которых будет входить сомножителем либо a_i, либо $1-a_i$, но не оба этих выражения вместе. Поэтому и в левую часть каждая переменная будет входить в первой степени. А потому, если мы перенесём правую часть налево и зафиксируем значения всех переменных, кроме двух, то получим многочлен второй степени относительно двух оставшихся переменных. Значит, рассуждения, использовавшиеся в приведённом выше доказательстве неравенства Несбита, пройдут дословно.

В результате мы придём к тому, что неравенство достаточно доказать для случая, когда l переменных положительны и равны между собой, а остальные равны нулю ($l = 1, 2, \dots, n$).

При $l=1$ в правой части стоит нуль, а в левой — сумма заведомо неотрицательных слагаемых. Этот случай очевиден. А при $l > 1$ полученное неравенство равносильно исходному, значит, можно его и проверять.

Если $k > l$, то значение максимизируемой функции равно нулю и всё очевидно.

При $l \geqslant k$ значения положительных переменных равны $1/l$, а значение функции $\Phi_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ равно $C_l^k \cdot 1/(l-1)^k$. Из этих чисел нужно выбрать наибольшее.

Дальнейшие рассуждения придётся проводить для каждого пункта отдельно.

В пункте (а) имеем

$$C_l^2 \cdot \frac{1}{(l-1)^2} = \frac{l(l-1)}{2} \cdot \frac{1}{(l-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{l-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{l-1}\right).$$

Очевидно, это выражение уменьшается с ростом l, поэтому наибольшее значение соответствует $l=2$ и равно единице.

Обращаясь к пункту (б), рассмотрим значения

$$C_l^3\cdot\frac{1}{(l-1)^3}=\frac{l(l-1)(l-2)}{6}\cdot\frac{1}{(l-1)^3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{l^2-2l}{l^2-2l+1}=$$
$$=\frac{1}{6}\Bigl(1-\frac{1}{l^2-2l+1}\Bigr)=\frac{1}{6}\Bigl(1-\frac{1}{(l-1)^2}\Bigr).$$

Это выражение растёт с ростом l, а потому наибольшее значение достигается при $l=n$. При $n=4$ получим ответ на поставленный вопрос.

А кроме того, здесь содержится ключ к общему случаю. А именно, при $k>3$ имеем

$$C_l^k\cdot\frac{1}{(l-1)^k}=\frac{l(l-1)\ldots(l-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{(l-1)^k}=$$
$$=\frac{1}{k!}\cdot\frac{l(l-2)}{(l-1)^2}\cdot\frac{l-3}{l-1}\cdot\ldots\cdot\frac{l-k+1}{(l-1)}=$$
$$=\frac{1}{k!}\Bigl(1-\frac{1}{(l-1)^2}\Bigr)\Bigl(1-\frac{2}{l-1}\Bigr)\ldots\Bigl(1-\frac{k-2}{l-1}\Bigr).$$

Это выражение также возрастает с ростом l, поэтому максимум функции $\Phi_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ достигается, когда значения всех переменных равны, т. е. утверждение из пункта (в) справедливо при всех $n\geqslant 3$.

Стоило ли тут ставить звёздочку?

Упражнения

6. Пусть числа $a_1,a_2,\ldots,a_k$ неотрицательны и $a_1+a_2+\ldots+a_k=1$. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)\geqslant\Bigl(\frac{k+1}{k-1}\Bigr)^k(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k).$$

7 (Польская математическая олимпиада, 1966 год). Докажите, что если неотрицательные числа $a_1,a_2,\ldots,a_k$ удовлетворяют неравенству $a_1+{}$ $+a_2+\ldots+a_k\leqslant 1/2$, то $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)\geqslant 1/2$.

8 (Международная математическая олимпиада, 1964 год; Австрийская математическая олимпиада, 1971 год). Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c справедливо неравенство

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

9 [11, 1992 год, 1364]. Пусть $a+b+c=1$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$. Докажите неравенства

а) $4a^3+4b^3+4c^3+15abc\geqslant 1$;

б) $a^3+b^3+c^3+abcd\geqslant\min\Bigl\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{d}{27}\Bigr\}$. (*В. А. Сендеров*)

10. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)^k \geqslant a_1a_2\ldots a_k + \frac{1}{k^2(k-1)}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)^{k-2}\Delta,$$

где

$$\Delta = (a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\ldots+(a_1-a_k)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_{k-1}-a_k)^2.$$

§ 4. Неравенства для сторон треугольника

Рассмотрим немного более сложный пример.

Задача 3 (Международная математическая олимпиада, 1964 год, задача 2). Обозначим через a, b, c длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу однородности можно считать, что периметр треугольника равен 12. Нарисуем картинки, аналогичные рис. 1 и 2. Числам a, b, c соответствуют точки правильного треугольника, высекаемого координатными плоскостями на плоскости, проходящей через точки $(12, 0, 0)$, $(0, 12, 0)$ и $(0, 0, 12)$. Кроме того, должны выполняться неравенства $a < b+c$, $b < a+c$ и $c < a+b$. Эти точки заполняют внутренность меньшего правильного треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника. Докажем, что данное в условии неравенство справедливо даже при выполнении условий $a \leqslant b+c$, $b \leqslant a+c$ и $c \leqslant a+b$.

Теперь мы попадаем в привычную ситуацию и, повторив стандартные рассуждения, придём к выводу, что неравенство достаточно проверить в трёх случаях.

1. Имеют место все три неравенства $a<b+c$, $b<a+c$ и $c<a+b$, и тогда $a=b=c=4$. В этом случае доказываемое неравенство обращается в равенство.
2. Ровно одно из неравенств $a \leqslant b+c$, $b \leqslant a+c$ или $c \leqslant a+b$ обращается в равенство. Если это первое неравенство, то $a=6$, $b=c=3$. В этом случае приходим к верному неравенству $108 < 162$.
3. Два из неравенств $a \leqslant b+c$, $b \leqslant a+c$ и $c \leqslant a+b$ обращаются в равенство. Если это первые два неравенства, то $a=b=6$ и $c=0$. В этом случае данное неравенство обращается в равенство.

Все случаи разобраны и задача решена.

Упражнения

11 [11, 1991 год, 1333]. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполняется неравенство

$$a^2(2b+2c-a)+b^2(2c+2a-b)+c^2(2a+2b-c) \geqslant 9abc.$$

(*Л. Д. Курляндчик*)

12 [11, 1982 год, 727]. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+2abc<2$, где a, b, c — длины сторон треугольника периметра 2.

(*И. Жаров, А. А. Егоров*)

13 (Международная математическая олимпиада, 1991 год, задача 1 [11, 1991 год, 1317]). Докажите для любого треугольника ABC неравенство

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leqslant \frac{8}{27},$$

где I — центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C — длины биссектрис треугольника ABC. (*А. Б. Скопенков*)

14 [11, 1970 год, 7]. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

(*С. Т. Берколайко*)

15 (Польская математическая олимпиада, 1961 год). Докажите, что если длина любой из сторон треугольника меньше 1, то площадь треугольника меньше $\sqrt{3}/4$.

§ 5. Неравенство Минковского

Иногда бывает удобно доказывать неравенства, вычисляя минимум вспомогательной функции не при фиксированной сумме переменных, а при фиксированном произведении. Продемонстрируем это на примере результата, полученного Германом Минковским[8)].

Для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_k$ справедливо неравенство

$$\sqrt[k]{(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ldots(x_k+y_k)} \geqslant \sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}+\sqrt[k]{y_1y_2\ldots y_k}.$$

---

8) Герман Минковский (1864–1909) — немецкий математик, сумевший объединить геометрию с теорией чисел и физикой. Один из учителей Альберта Эйнштейна.

Прежде всего воспользуемся свойством однородности этого неравенства. Если одно из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ равно нулю, неравенство очевидно. В противном случае обе части неравенства можно поделить на $\sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_k}$:

$$\sqrt[k]{\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_2}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{y_k}{x_k}\right)} \geqslant 1+\sqrt[k]{\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{y_k}{x_k}}.$$

Введём новые переменные

$$a_1=\frac{y_1}{x_1},\quad a_2=\frac{y_2}{x_2},\quad \ldots,\quad a_k=\frac{y_k}{x_k}.$$

Доказываемое неравенство перепишется в виде

$$\sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)} \geqslant 1+\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}.$$

Фиксируем произвольное положительное число C и будем искать наименьшее значение функции

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots a_k) = (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)$$

при условии $a_1 a_2 \ldots a_k = C$. Достаточно доказать, что искомый минимум достигается при $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$.

Допустим противное. Не ограничивая общности, можно считать, что этот минимум достигается в некоторой точке $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ такой, что $b_1 \neq b_2$.

Тогда функция двух переменных $F(a_1, a_2) = \Phi(a_1, a_2, b_3 \ldots b_k)$ достигает наименьшего значения на множестве переменных, удовлетворяющих условию

$$a_1 a_2 = c = \frac{C}{b_3 b_4 \ldots b_k},$$

в двух точках (b_1, b_2) и (b_2, b_1).

Значит, функция одной переменной

$$f(t) = F\left(\sqrt{a_1 a_2}t, \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{t}\right)$$

достигает наименьшего значения при $t=\sqrt{a_1/a_2}$ и при $t=\sqrt{a_2/a_1}$.

Но такая функция не может достигать минимума в двух разных точках. В самом деле: эта функция имеет вид

$$f(t) = \alpha t + \frac{\beta}{t} + \gamma,$$

где α, β, γ — некоторые константы. Если m — наименьшее значение этой функции, то функция $f(t)-m$ всюду неотрицательна и равна нулю в двух разных точках. Тогда и функция $t(f(t)-m)$ всюду неотрицательна и равна нулю в двух точках, т. е. принимает наименьшее значение при двух разных значениях t. Но этого не может быть, так как $t(f(t)-m)$ — квадратный трёхчлен.

Полученное противоречие доказывает неравенство Минковского.

Упражнения

16 (областной этап Всероссийской математической олимпиады, 1993 год, 9 класс, задача 6). Докажите, что для любых $|x| < 1$, $|y| < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geqslant \frac{2}{1-xy}.$$

17 (Ирландская математическая олимпиада, 2002 год). Докажите, что для положительных чисел a, b, c, меньших 1, выполняется неравенство

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geqslant \frac{\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}.$$

18. Докажите, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ меньше 1, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \ldots + \frac{1}{1-a_k} \geqslant \frac{k}{1-\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}}.$$

19 (из материалов жюри Международной математической олимпиады, 1998 год). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — действительные числа, большие чем 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_k} \geqslant \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}}.$$

20. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — положительные действительные числа, меньшие чем 1. Докажите, что[9)]

$$\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{1+b_2} + \ldots + \frac{1}{1+b_k} \leqslant \frac{k}{1+\sqrt[k]{b_1 b_2 \ldots b_k}}.$$

§ 6. Циклические неравенства

Термином «симметрический» выражают, в известном смысле, максимальную степень симметрии[10)]. Чуть меньший, но всё же значительный интерес представляют и некоторые другие классы неравенств.

Рассмотрим функции k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Допустим, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ остаётся неизменной при циклической перестановке

[9)] Сравните этот результат с результатом предыдущего упражнения, и подумайте, как такое может быть. Здесь спрятано интересное явление, которое я не могу здесь обсуждать, ибо «нельзя объять необъятного».

[10)] Этот термин является общепринятым. Связан он, видимо, с тем, что группа симметрий рассматриваемого в данной статье вида является симметрической группой (хотя явно эта группа обычно не появляется).

переменных $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_3$, …, $x_{k-1} \to x_k$, $x_k \to x_1$, т. е. $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_2, x_3, \dots, x_k, x_1)$. Тогда выполняется равенство $f(x_2, x_3, \dots, x_k, x_1) = f(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2)$ и по сделанному предположению $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_3, x_4, \dots, x_1, x_2)$, т. е. функция остаётся неизменной при перестановке $x_1 \to x_3$, $x_2 \to x_4$, …, $x_{k-1} \to x_1$, $x_k \to x_2$. Продолжая подобные рассуждения, мы найдём k перестановок, включая тождественную, которые не меняют рассматриваемую функцию.

Если этими перестановками исчерпывается список всех перестановок, при которых функция $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ остаётся неизменной, то неравенство $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \geqslant 0$ называется циклическим (опять-таки по названию соответствующей группы симметрии).

Если вернуться к описанной выше геометрической интерпретации, то можно заметить, что циклическое неравенство не меняется при поворотах изображённого на рис. 1 и 2 треугольника на 120° и 240° вокруг его центра, но меняется при осевых симметриях.

Например, циклическим является неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a \geqslant 0.$$

Это неравенство не слишком интересно, поскольку оно почти очевидным образом сводится к неравенству Коши. Но есть и менее очевидные примеры.

Задача 4 (областной этап Всероссийской математической олимпиады, 1993 год, 10 класс, задача 2). Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

Решение. Докажем левое неравенство. Избавившись от знаменателя, приведём его к эквивалентному виду

$$(a+b)(b+c)(c+a) < a(b+c)(c+a) + b(a+b)(c+a) + c(a+b)(b+c). \quad (1)$$

Докажем сначала, что для всех неотрицательных значений переменных выполняется нестрогое неравенство

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leqslant a(b+c)(c+a) + b(a+b)(c+a) + c(a+b)(b+c). \quad (2)$$

Пусть $\Phi(a, b, c)$ — разность левой и правой частей неравенства (2). Так как этот многочлен однородный, можно доказывать неравенство только для тех значений переменных, которые удовлетворяют равенству $a + b + c = 3$. Пусть максимальное значение многочлена $\Phi(a, b, c)$ на этом множестве равно $\Phi(a_0, b_0, c_0)$. Поскольку неравенство циклическое, значение $\Phi(b_0, c_0, a_0)$ тоже будет максимальным.

Допустим, что все три числа a_0, b_0, c_0 положительны и среди них есть по крайней мере два различных. Рассмотрим сужение функции Φ на прямую, проходящую через точки (a_0, b_0, c_0) и (b_0, c_0, a_0). По предположению это сужение имеет две точки максимума внутри некоторого отрезка этой прямой. Но этого не может быть, так как мы имеем дело с многочленом, степень которого не превосходит трёх и его производная не может дважды менять знак с плюса на минус. Получено противоречие.

Таким образом, сделанное в предыдущем абзаце предположение неверно, и остаётся две возможности: все три числа a_0, b_0, c_0 равны 1 или среди этих трёх чисел есть нуль.

В первом случае $\Phi(1, 1, 1) = -4 < 0$, и задача решена.

Во втором случае можно, не ограничивая общности, считать $c = 0$, и тогда неравенство сводится к очевидному $ab(a + b) \leqslant a^2b + ab(a + b)$. Это неравенство обращается в равенство, если одно из чисел равно нулю.

Итак, мы установили, что неравенство (2) имеет место для всех неотрицательных значений переменных и равенство в нём достигается, только если по крайней мере две переменных равны нулю. Но тогда для всех положительных значений переменных имеет место строгое неравенство (1).

Левое неравенство доказано. Правое можно вывести из него двумя способами, основанными на слегка скрытой симметрии.

Во-первых, в силу равенства[11)]

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=1-\frac{b}{a+b}+1-\frac{c}{b+c}+1-\frac{a}{c+a}=3-\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$

правое неравенство можно получить из левого очевидной заменой переменных a на b, b на a и c на c.

Кроме того, данная система неравенств превращается в эквивалентную при замене переменных $a \to 1/a$, $b \to 1/b$, $c \to 1/c$.

Упражнения

21 (Ленинградская математическая олимпиада, 1979 год, 8 класс [11, 1979 год, 559]). Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1.$$

(*А. В. Ермилов, В. А. Сендеров*)

[11)] Такой приём прибавления единички очень часто бывает полезным. Мы с ним уже сталкивались при обсуждении неравенства Несбита и столкнёмся ещё.

22 [11, 1988 год, 1107]. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geqslant \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3. \qquad (\textit{Л. Д. Курляндчик})$$

23 (Румынская математическая олимпиада, 2007 год). Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc + \frac{3}{4}|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

24. Получите усиление неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим трёх чисел, а именно, выясните, при каких значениях параметра m неравенство

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc + m|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

выполняется при всех неотрицательных значениях переменных a, b, c.

25 (пункты (а) и (б) — см. [11, 1984 год, 852]). Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что величина

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|$$

меньше: (а) 1; (б) 1/8. (в) Найдите максимальное значение этой величины. (*А. В. Ермилов*)

§ 7. Замены переменных

До сих пор мы пользовались двумя видами симметрии неравенств: их инвариантностью относительно умножения всех переменных на одно и то же число и инвариантностью относительно перестановок переменных. Группа симметрий неравенства может содержать и другие преобразования.

В общем случае проблема поиска таких преобразований весьма сложна. Но иногда в их поиске помогает замена переменных. Продемонстрируем это на примере.

Задача 5 (Математическая олимпиада Чехии и Словакии, 2005 год). Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Решение. Применить развитую выше технику мешает «кривое» условие $abc = 1$. Но оно же подсказывает подходящую замену переменных. Введём новые положительные переменные x, y и z так, что $a = x/y$,

$b = y/z$. Тогда в силу данного условия получим $c = z/x$, и неравенство перепишется в виде

$$\frac{xz}{(x+y)(y+z)} + \frac{xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{yz}{(x+y)(x+z)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Умножив неравенство на $(x+y)(x+z)(y+z)$, получим

$$4(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2) \geqslant 3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Это уже однородное симметрическое неравенство третьей степени. Его достаточно проверить в трёх случаях: 1) $x = y = z = 1$; 2) $x = y = 1$, $z = 0$; 3) $x = 1$, $y = z = 0$.

Такая проверка не составляет труда. Задача решена.

Проанализируем, что дала замена переменных. Условие исходной задачи не менялось при любых перестановках переменных, а вот доказываемое неравенство было инвариантно только относительно циклических перестановок всех трёх переменных. После замены переменных доказываемое неравенство стало симметрическим. Кроме того, оно стало однородным (это общий факт при замене переменных на их отношения). Здесь и ключ к решению задачи.

Поучительно разобраться, где была спрятана дополнительная степень симметрии, которая проявилась при замене переменных.

Для этого заметим, что использованная замена переменных a, b, c на переменные x, y, z взаимно однозначно отображает множество

$$\{(x, y, z)\colon x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ xyz = 1\}$$

на множество

$$\{(a, b, c)\colon a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ abc = 1\}.$$

Чтобы найти обратное преобразование, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = a, \\ \dfrac{y}{z} = b, \\ \dfrac{z}{x} = c, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на третье и умножив результат на четвёртое, получим $x^3 = a/c$, или $x = \sqrt[3]{a/c}$. Аналогично $y = \sqrt[3]{b/a}$ и $z = \sqrt[3]{c/b}$.

Чтобы найти недостающее преобразование, сделаем замену

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{c}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{c}{b}},$$

переставим две переменные[12)], положив $u=y$, $v=x$, $w=z$, и выполним обратное преобразование $p=u/v$, $q=v/w$, $r=w/u$. Получим

$$p=\frac{u}{v}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt[3]{b/a}}{\sqrt[3]{a/c}}=\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}=\frac{1}{a}.$$

Аналогично $q=1/c$ и $r=1/b$.

Значит, наше неравенство должно быть инвариантно относительно замены a на $1/a$, b на $1/c$ и c на $1/b$. Это действительно так, поскольку, например,

$$\frac{1/a}{\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)}=\frac{c}{(a+1)(c+1)}.$$

Могли бы вы увидеть эту симметрию без вычислений?

Упражнения

26. Пусть a,b,c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}\geqslant 3.$$

27 (Ирландская математическая олимпиада, 2007 год). Пусть a,b,c — положительные числа. Докажите неравенства

$$\frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

28 [11, 1976 год, 374]. Пусть a, b, c — положительные числа, $a>c$, $b>c$. Докажите неравенство

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leqslant\sqrt{ab}.$$ (*А. Резников*)

29. Пусть положительные числа $a_1,a_2,\ldots$ удовлетворяют условию $a_{i+k}=a_i$ для любого i. Докажите, что для $l<k$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_l}{a_{l+1}+a_{l+2}+\ldots+a_k}+\frac{a_2+a_3+\ldots+a_{l+1}}{a_{l+2}+a_{l+3}+\ldots+a_{k+1}}+\ldots+\frac{a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{k+l-1}}{a_{k+l}+a_{k+l+1}+\ldots+a_{2k-1}}\geqslant\frac{lk}{k-l}.$$

§ 8. Условные неравенства

Вспомним задачу: среди всех прямоугольников с данным периметром найти прямоугольник с наибольшей площадью (она без труда решается

12) Именно такого преобразования не хватает для полной симметрии исходного неравенства.

с помощью принципа симметрии). У неё есть не менее интересный аналог: среди всех прямоугольников с данной площадью найти прямоугольник с наименьшим периметром. Вторую задачу можно чисто логически, не вдаваясь в её геометрическую природу, свести к первой. Вот как это делается.

Мы уже знаем, что среди всех прямоугольников данного периметра P наибольшую площадь $S = P^2/16$ имеет квадрат. Так вот — тот же квадрат имеет наименьший периметр среди всех прямоугольников площади S.

В самом деле, допустим противное. Пусть имеется прямоугольник Π_0 площади S с меньшим периметром $P_0 < P$. Рассмотрим тогда прямоугольник Π, подобный[13)] ему с коэффициентом $k = P/P_0$. Он имеет периметр $P_0 \cdot P/P_0 = P$. А его площадь равна Sk^2. Но по предположению $k > 1$. То есть мы нашли прямоугольник периметра P, площадь которого больше, чем площадь квадрата с тем же периметром. А это противоречит полученному выше результату. Значит, сделанное предположение неверно и ответ во второй задаче тот же, что и в первой.

Полезно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию проведённого рассуждения. Пусть прямоугольнику со сторонами a и b соответствует точка координатной плоскости с координатами (a, b) (рис. 3).

Прямоугольникам с периметром P будет соответствовать отрезок прямой $2a + 2b = P$. Прямоугольникам с периметром, большим чем P, будут соответствовать точки, лежащие выше этой прямой, а с меньшим периметром — точки, лежащие ниже.

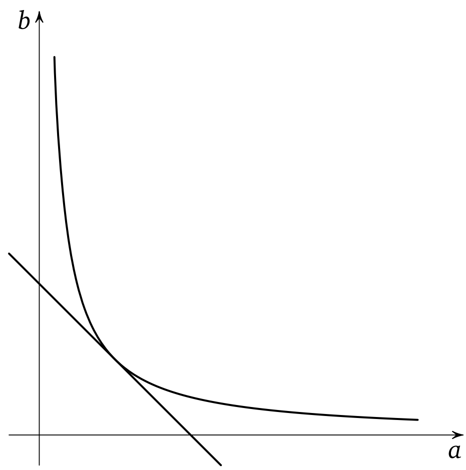

Рис. 3

[13)] В геометрических задачах свойства преобразования подобия заменяют свойства однородных многочленов.

Прямоугольникам, имеющим площадь S, будет соответствовать ветвь гиперболы $b = S/a$. И опять выше гиперболы лежат точки, соответствующие прямоугольникам большей площади, а ниже — точки, соответствующие прямоугольникам меньшей площади.

Решение первой задачи говорит нам, что ветвь гиперболы целиком лежит выше прямой и лишь в одной точке попадает на прямую. Но тогда прямая целиком лежит ниже ветви гиперболы и лишь в одной точке попадает на гиперболу. Значит, эта единственная точка и есть решение второй задачи.

Подобная схема рассуждений является довольно общей. Часто приходится доказывать, что некоторое неравенство выполняется при каком-то ограничении. Во многих случаях данное ограничение и доказываемое неравенство можно поменять местами. Такого рода симметрия задачи имеет весьма глубокие корни. Мы продемонстрируем пользу от неё лишь на нескольких примерах.

Задача 6 (Ленинградская математическая олимпиада, 1980 год, 8 класс). Сумма четырёх положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6.$$

Решение. Докажем более сильное неравенство

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \leqslant 4\sqrt{2}.$$

Нужную константу угадать нетрудно. Накопленный опыт подсказывает, что «хорошее» симметрическое неравенство часто обращается в равенство, когда значения всех переменных равны между собой.

Неравенство не очень подходит для использования нашего метода, поскольку содержит много радикалов, с которыми мы пока не работали. Попробуем избавиться от них с помощью замены переменных. Обозначим

$$p = \sqrt{4a+1}, \quad q = \sqrt{4b+1}, \quad r = \sqrt{4c+1}, \quad s = \sqrt{4d+1}.$$

Тогда

$$a = \frac{p^2-1}{4}, \quad b = \frac{q^2-1}{4}, \quad c = \frac{r^2-1}{4}, \quad d = \frac{s^2-1}{4},$$

и доказываемое неравенство перепишется в виде

$$p + q + r + s \leqslant 4\sqrt{2}, \tag{3}$$

а данное условие примет вид

$$\frac{p^2-1}{4} + \frac{q^2-1}{4} + \frac{r^2-1}{4} + \frac{s^2-1}{4} = 1,$$

или

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}=2. \tag{4}$$

Данная задача непривычна тем, что доказываемое неравенство выглядит просто, а вот условие — сложное. Лучше бы было наоборот.

Но нам нужно доказать, что из условия (4) следует неравенство (3). А это равносильно тому, что из условия

$$p+q+r+s>4\sqrt{2}$$

следует

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}\neq 2.$$

На самом деле даже

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}>2,$$

что легко доказывается стандартным методом.

Использованный приём основывается на следующих наглядных соображениях.

Пусть нам нужно доказать, что неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geqslant 0$ выполняется при условии $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$. Будем рассматривать числа $x_1,x_2,\ldots,x_k$ как координаты некоторой точки. Почти всегда[14] множество точек, для которых $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$, представляет собой гиперповерхность, делящую пространство на две части: решение неравенства $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и решение неравенства $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)<0$. Если выполняется неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geqslant 0$, то решения уравнения $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежат в одной из этих частей, удовлетворяющей условию $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и, быть может, на самой поверхности $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$, т. е. поверхность $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежит по одну сторону от поверхности $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$.

Но тогда и поверхность $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежит по одну сторону от поверхности $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$. Последняя поверхность в свою очередь почти всегда разбивает пространство на две части: решение неравенства $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и решение неравенства $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)<0$. А тогда при условии $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ либо выполняется неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geqslant 0$, либо[15] — неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\leqslant 0$.

---

[14] Подумайте, когда это не так, и почему такие случаи редки!

[15] Какой из этих двух случаев имеет место, зависит от конкретной задачи. Обычно выяснить это нетрудно, выбрав одну подходящую точку. Если функции F и Φ непрерывны, оба неравенства выполняться одновременно не могут.

Таким образом, доказываемое неравенство и условие «поменялись местами». Эти рассуждения не вполне строги. Но логика решения предыдущей задачи абсолютно корректна.

Вот ещё один пример, когда выгодно поменять местами условие и доказываемое неравенство.

Задача 7 [11, 1994 год, 1439]. Длины сторон треугольника равны a, b и c, а длины проведённых к ним медиан равны m_a, m_b и m_c соответственно. Докажите неравенства

(а) $\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

(б) $\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\geqslant 2\sqrt{3}$. (*Г. Алиханов, В. А. Сендеров*)

Решение. Докажем неравенство пункта (а).

Алгебраизируем задачу, воспользовавшись известными формулами для медиан треугольника

$$m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2},\quad m_b=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2},\quad m_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}.$$

Тогда доказываемое неравенство перепишется в виде

$$\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2a}+\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2b}+\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

или

$$\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2}}+\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2}}+\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}}\geqslant 3.$$

Теперь введём новые переменные

$$x=\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2}},\quad y=\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2}},\quad z=\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}}.$$

В этих переменных доказываемое неравенство примет вид $x+y+z\geqslant 3$. Это неравенство, разумеется, верно не всегда, а каких-либо ограничений, на первый взгляд, нет. Но дело обстоит не так, и сообразить это не трудно. Исходное неравенство — однородное первой степени. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $c=1$. И тогда новые три переменные x, y и z выразятся через две старые переменные a и b. Но в этом случае между переменными x, y и z должна существовать связь. Попробуем её найти[16].

Имеем

$$x^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2},\quad y^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2},\quad z^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}.$$

[16] Здесь ещё раз работает приём «приведения к общему числителю».

Чтобы сделать числители дробей симметричными, добавим к каждой из них единичку:

$$x^2+1=\frac{2b^2+2c^2+2a^2}{3a^2},$$

$$y^2+1=\frac{2a^2+2c^2+2b^2}{3b^2},$$

$$z^2+1=\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{3c^2}.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{3a^2}{2(a^2+b^2+c^2)},$$

$$\frac{1}{y^2+1}=\frac{3b^2}{2(a^2+b^2+c^2)},$$

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{3c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Сложив эти равенства, получим искомое соотношение

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{3}{2}.$$

Теперь поменяем местами ограничение и доказываемое неравенство. Задача сведётся к доказательству неравенства

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\neq\frac{3}{2}$$

при условии, что $x+y+z<3$.

Подставив, например, $x=1$, $y=z=0$, убедимся, что на самом деле нужно доказывать неравенство

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}>\frac{3}{2}.$$

Здесь мы можем забыть, что числа a, b и c обозначали длины сторон треугольника, и решать задачу для любых неотрицательных x, y и z.

Это неравенство только усиливается, когда переменная x увеличивается. Поэтому достаточно доказать, что при условии $x+y+z=3$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Эта задача даже на беглый взгляд проще исходной. На самом деле мы попадаем в знакомую ситуацию, и теперь решение задачи — дело техники.

Считая z параметром, перепишем неравенство в виде

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{z^2+1}\right)(x^2y^2+x^2+y^2+1)-(x^2+y^2+2)\leqslant 0,$$

или

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{z^2+1}\right)\left(\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right)^2+x^2+y^2+1\right)-(x^2+y^2+2)\leqslant 0.$$

Очевидно, $1/(z^2+1)<3/2$. Поэтому, если z и $(x+y)/2$ постоянны, то левая часть последнего неравенства представляет собой многочлен четвёртой степени с положительным старшим коэффициентом относительно переменной $t = (x-y)/2$. Такой многочлен может иметь не более одного максимума внутри отрезка.

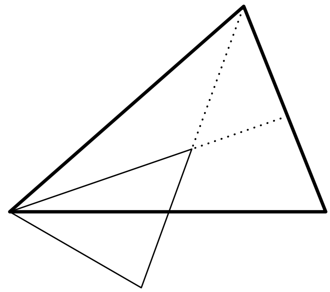

Рис. 4

А поскольку неравенство симметрическое, его достаточно доказать в трёх случаях: 1) $x = y = z = 1$; 2) $x = y = 3/2$, $z = 0$; 3) $x = 3$, $y = z = 0$.

В первом случае неравенство обращается в равенство, а в двух других — в строгое неравенство.

Неравенство пункта (б) можно доказать аналогично. А можно воспользоваться ещё раз свойствами симметрии задачи. Дело в том, что если a, b, и c — длины сторон треугольника, а m_a, m_b и m_c — длины медиан этого треугольника, то из отрезков длиной m_a, m_b и m_c тоже можно составить треугольник, и длины медиан этого треугольника будут равны $3a/4$, $3b/4$ и $3c/4$ (рис. 4). Таким образом, задача сводится к уже решённому пункту (а).

Упражнения

30 (33-й Турнир городов, 2011 год, осень, сложный вариант, 8–9 классы, задача 5). Известно, что $0 < a, b, c, d < 1$ и

$$abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d).$$

Докажите неравенство $a+b+c+d-(a+c)(b+d) \geqslant 1$. (*Г. Гальперин*)

31 (Румынская математическая олимпиада, 2008 год). Пусть a, b, c — такие положительные числа, что $abc = 8$. Докажите, что

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leqslant 0.$$

32 (Румынская математическая олимпиада, 1999 год). Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_k — такие положительные числа, что $a_1a_2\ldots a_k = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{k-1+a_1}+\frac{1}{k-1+a_2}+\ldots+\frac{1}{k-1+a_k}\leqslant 1.$$

33. Докажите, что для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{1+a_1a_2\ldots a_k} < \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_k} < k-1+\frac{1}{1+a_1a_2\ldots a_k}.$$

34 (Международная математическая олимпиада, 2001 год, задача 2, [11, 2002 год, 1804]). Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

§ 9. Неравенства с малой симметрией

Рассмотрим ещё один пример.

Задача 8 (Санкт-Петербургская математическая олимпиада, 2015 год, второй тур, 9 класс). Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $ab+bc+ac+2abc=1$. Докажите, что $4a+b+c \geqslant 2$. (*А. Храбров*)

Решение. В этой задаче «сложное» условие и «простое» доказываемое неравенство. Поэтому разумно поменять их местами. Практически дословно повторяя рассуждения из предыдущего раздела, придём к следующей задаче.

Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $4a+b+c=2$. Докажите, что $ab+bc+ac+2abc \leqslant 1$.

Эта задача уже близка к тем, которые решались выше. Только вот условие не совсем симметрично. Оно не меняется при перестановках переменных b и c, но меняется при всех остальных перестановках переменных. Однако уже наличие одного такого преобразования позволяет решить задачу.

Считая a параметром, а b и c переменными, стандартными рассуждениями придём к выводу, что неравенство достаточно доказать в двух случаях: 1) $c=0$; 2) $b=c$.

Из-за малой степени симметрии дальше упростить задачу не получается. Но уже сделанного упрощения достаточно.

В первом случае придём к неравенству $ab \leqslant 1$ при условии $4a+b=1$. Это немедленно следует из неравенства Коши для двух чисел $4a$ и b .

Во втором случае придём к неравенству

$$2ab+b^2+2ab^2 \leqslant 1$$

при условии $2a+b=1$. Исключая с помощью этого условия переменную a, получим неравенство $b+(1-b)b^2 \leqslant 1$. Дальше делаем почти очевидные преобразования:

$$(1-b)-(1-b)b^2 \geqslant 0, \quad (1-b)(1-b^2) \geqslant 0, \quad (1-b)^2(1+b) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно.

Упражнения

35 (23-й Турнир городов, 2002 год, весна, основной вариант, 8–9 классы, задача 1). Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство $a^3+b^3+3abc > c^3$. (*В. А. Сендеров*)

36 (Канадская математическая олимпиада, 1992 год). Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a(a-c)^2+b(b-c)^2 \geqslant (a-c)(b-c)(a+b-c).$$

37. Пусть R — радиус описанной окружности некоторого треугольника, а r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей того же треугольника, причём $r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$. Докажите, что а) $r_a \leqslant 3R/2$; б) $r_b < 2R$; в) $3R/2 \leqslant r_c < 4R$.

38. Пусть r — радиус вписанной окружности некоторого треугольника, а r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей того же треугольника, обозначенные так, что $r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$. Докажите, что а) $r < r_a \leqslant 3r$; б) $2r < r_b$; в) $3r \leqslant r_c$.

39 (Эрдёш[17)]). Пусть h — длина наибольшей высоты нетупоугольного треугольника, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что $R+r \leqslant h$.

§ 10. Аддитивная сложность

Имеющиеся на сегодняшний день результаты позволяют оценить число корней многочлена через число операций сложения, использующихся при его записи [9]. Они гораздо сложнее и менее точны, чем аналогичные результаты для операций умножения. Однако в некоторых случаях и ими можно воспользоваться.

Задача 9. Докажите, что если $n \geqslant 1$, то для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n}{k}\right)^{1/n} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}.$$

[17)] Пал Эрдёш (1913–1996) — венгерский математик, которому принадлежит большое число красивых миниатюр в самых разных областях математики.

Решение. В силу однородности неравенства можно, не ограничивая общности, считать, что $a_1+a_2+\ldots+a_k=k$.

Будем искать минимальное значение функции

$$\Phi(a_1,a_2,\ldots,a_k)=\frac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n}{k}$$

по всем неотрицательным значениям переменных, удовлетворяющим равенству $a_1+a_2+\ldots+a_k=k$. Если мы убедимся, что это минимальное значение равно 1, задача будет решена. Пусть искомое минимальное значение равно $\Phi(b_1,b_2,\ldots,b_k)$.

Выберем какие-нибудь две переменные, например, a_1 и a_2 и рассмотрим функцию двух переменных

$$F(a_1,a_2)=\frac{a_1^n+a_2^n+b_3^n+\ldots+b_k^n}{k}.$$

Число $F(b_1,b_2)$ будет наименьшим значением функции $F(a_1,a_2)$, если переменные a_1 и a_2 неотрицательны и удовлетворяют равенству

$$a_1+a_2+b_3+\ldots+b_k=k.$$

Но тогда в силу симметрии и число $F(b_2,b_1)$ будет минимальным значением той же функции.

Выразив a_2 через a_1, получим функцию одной переменной

$$f(a_1)=\frac{a_1^n+(k-b_2-\ldots-b_k-a_1)^n+b_3^n+\ldots+b_k^n}{k},$$

которая имеет на отрезке $[0,k-b_3-\ldots-b_k]$ точки минимума $a_1=b_1$ и $a_1=b_2$. Мы попадём в знакомую ситуацию, если докажем, что двух разных точек минимума внутри отрезка такая функция иметь не может.

Для этого воспользуемся средствами дифференциального исчисления. Вторая производная

$$f''(a_1)=\frac{n(n-1)a_1^{n-2}+n(n-1)(k-b_2-\ldots-b_k-a_1)^{n-2}}{k}$$

функции $f(a_1)$ очевидно положительна. Поэтому производная $f'(a_1)$ функции $f(a_1)$ монотонна, а следовательно, не может иметь более одного корня. А так как обращение производной в нуль является необходимым условием минимума, функция $f(a_1)$ не может иметь двух разных точек минимума внутри отрезка. Следовательно, либо $b_1=b_2$, либо одно из этих чисел равно нулю.

Поскольку подобные рассуждения могут быть проведены для любой пары переменных, все числа $b_1,b_2,\ldots,b_k$ разбиваются на две группы: в одной группе числа положительны и равны между собой, а во второй —

равны нулю. Если количество чисел в первой группе равно l, то каждое из них равно k/l и

$$\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_k) = \frac{l}{k} \cdot \left(\frac{k}{l}\right)^n = \left(\frac{k}{l}\right)^{n-1} \geqslant 1,$$

так как $k/l \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. Задача решена.

Упражнения

40 [11, 1989 год, 1144]. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — неотрицательные числа. Какое число больше:

$$\sqrt[1988]{a_1^{1988} + a_2^{1988} + \ldots + a_k^{1988}} \quad \text{или} \quad \sqrt[1989]{a_1^{1989} + a_2^{1989} + \ldots + a_k^{1989}}\,?$$

(*А. И. Шехорский*)

41 (XV Московская математическая олимпиада, 1952 год, первый тур, 10 класс, задача 2). Докажите, что при целом $n \geqslant 2$ и $|a| < 1$ справедливо неравенство $(1-a)^n + (1+a)^n < 2^n$.

42 (Санкт-Петербургская математическая олимпиада, 1995 год, отборочный тур, 11 класс, задача 2). Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$(ac+bd)^5 + (ad+bc)^5 \leqslant (a+b)^5(c^5+d^5). \qquad (\textit{А. Храбров})$$

43 (Польская математическая олимпиада, 1963 год). Докажите, что если числа a, b, c положительны, то

$$a+b+c \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

44. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)^k \geqslant a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{1}{(k-1)k^k}\Delta,$$

где Δ — сумма всевозможных чисел вида $|a_i - a_j|^k$.

§ 11. Неравенство Йенсена

До сих пор для оценки числа максимумов или минимумов функции использовались её алгебраические свойства. Но можно воспользоваться и геометрическими.

Пусть функция $\varphi(x)$ вогнута. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_k)}{k} \leqslant \varphi\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right).$$

Этот результат называют неравенством Йенсена[18)].

Докажем его сначала для строго вогнутых функций. В этом нам поможет следующее простое утверждение.

Строго вогнутая функция не может иметь более одной точки максимума. В самом деле, если x и y — две различных точки максимума функции, то

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} = \varphi(x),$$

что противоречит выбору точки x.

Единственность максимума — это то свойство, которое мы уже неоднократно использовали. Применим привычную схему рассуждений ещё раз.

Обозначим через m наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и положим $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_k)$$

от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, удовлетворяющих условиям

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = s, \quad x_i \geqslant m, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Пусть максимум этой функции достигается в точке $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Если все числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$ равны между собой, то доказываемое неравенство обращается в равенство и всё доказано. Остаётся убедиться, что иначе быть не может.

Пусть, например, $b_1 \neq b_2$. Тогда функция

$$f(x) = \Phi(x, s - b_3 - \ldots - b_k - x, b_3, \ldots, b_k)$$

имеет на отрезке $m \leqslant x \leqslant s - b_3 - \ldots - b_k - m$ две точки максимума $x = b_1$ и $x = b_2$. Но функция

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(s - b_3 - \ldots - b_k - x) + \varphi(b_3) + \ldots + \varphi(b_k)$$

является строго вогнутой, а потому не может иметь двух точек максимума. Полученное противоречие доказывает неравенство Йенсена для строго вогнутых функций.

Для его доказательства в общем случае рассмотрим функции $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) - \varepsilon x^2$. По условию функция $\varphi(x)$ вогнута, а функция $-\varepsilon x^2$ строго

[18)] Иоган Виллем Людвиг Вальдемар Йенсен (1859–1925) — датский математик и инженер. Он в значительной степени был самоучкой, никогда не занимал академических должностей, а занимался математикой в свободное от основной работы время. Йенсен первым начал систематическое изучение выпуклых функций. Своё знаменитое неравенство он опубликовал в 1906 г.

вогнута при любом $\varepsilon > 0$, поэтому функция $\varphi_\varepsilon(x)$ строго вогнута. Следовательно, согласно доказанному выполняется неравенство

$$\frac{\varphi_\varepsilon(x_1) + \varphi_\varepsilon(x_2) + \ldots + \varphi_\varepsilon(x_k)}{k} \leqslant \varphi_\varepsilon\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\Big),$$

или

$$\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_k)}{k} - \varepsilon\Big(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}{k}\Big) \leqslant \\ \leqslant \varphi\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\Big) - \varepsilon\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\Big)^2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получим нужный результат.

Для выпуклых функций тоже справедливо неравенство Йенсена, но, разумеется, знак «$\leqslant$» нужно поменять на «$\geqslant$».

Содержание полученного результата понятно: он позволяет свести доказательство сложного неравенства с k переменными к доказательству аналогичного, но более простого неравенства с двумя переменными. В большинстве практически интересных случаев и эту последнюю задачу можно упростить, благодаря критерию выпуклости.

При доказательстве неравенства Йенсена был использован следующий очень важный методологический принцип. Допустим, нужно доказать справедливость некоторого утверждения для какого-то множества объектов. Начинать всегда следует с доказательства для типичных объектов. А затем, возможно, доказательство для общего случая удастся свести к уже рассмотренному частному.

В нашем примере нужно было доказать неравенство Йенсена для множества вогнутых функций. Типичными вогнутыми функциями являются строго вогнутые. Для них доказательство проходит по привычной уже схеме. А затем можно воспользоваться тем, что любая вогнутая функция может быть сколь угодно точно приближена строго вогнутой (именно так в данном случае следует понимать «типичность»).

Упражнения

45 (К. Шеннон[19]). Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равна 1. Докажите неравенство

$$-a_1 \ln a_1 - a_2 \ln a_2 - \ldots - a_k \ln a_k \leqslant \ln k.$$

[19] Клод Элвуд Шеннон (1916–2001) — американский инженер, криптоаналитик и математик, создатель современной теории информации.

46 (Олимпиада ФМЛ № 239 Санкт-Петербурга, 2001 год, 8–9 классы, задача 7). Для любых положительных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ докажите неравенство

$$\left(1+\frac{1}{a_1(1+a_1)}\right)\left(1+\frac{1}{a_2(1+a_2)}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_k(1+a_k)}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{p(1+p)}\right)^k,$$

где $p = \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$. (*А. Храбров*)

47. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

48 (неравенство Гюйгенса[20)]). Докажите, что для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ верно неравенство

$$1 + \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} \leqslant \sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)}.$$

49 (неравенство Фань Цзы[21)]). Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ удовлетворяют условиям $0 \leqslant a_i \leqslant 1/2$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то справедливо неравенство

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^k} \leqslant \frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)}{((1-a_1)+(1-a_2)+\ldots+(1-a_k))^k}.$$

§ 12. Заключение

Рассмотренные выше примеры ясно показывают, что полученные в первом разделе необходимые условия экстремума вполне работоспособны. Причём в подавляющем числе случаев полученные на их основе решения задач проще прочих. Заинтересованный читатель без труда найдёт много других задач разной степени сложности, которые решаются предлагаемым методом.

Кстати, о сложности. Выше мы использовали это слово в двух разных смыслах. В предыдущем абзаце оно обозначало субъективную трудность решения задачи. А в других разделах оно использовалось для обозначения «объективной» характеристики оптимизируемых функций и ограничений рассматриваемых задач.

---

20) Христиан Гюйгенс (1629–1695) — голландский математик, механик, физик, астроном и изобретатель.

21) Фань Цзы (1914–2010) — математик, родившийся в Китае и работавший во Франции, США и на Тайване (иногда его имя переводят с английского как Ки Фан). Получил важные результаты во многих областях как чистой, так и прикладной математики. Подробнее о неравенстве Фань Цзы можно прочесть в [5].

У читателя была возможность убедиться, что понятие субъективной сложности существенно меняется, когда мы знакомимся с новым методом: в статье есть несколько задач с международных олимпиад, которые решаются «с ходу» и «в уме».

Об объективной сложности стоит поговорить подробнее. Эта характеристика явно «синтетическая». Выше мы использовали в качестве меры сложности степень многочлена, количество «плюсов», используемых при его записи, выпуклость (на самом деле это качественный признак, позволяющий разделить все функции на «простые» и «сложные»). Можно поработать с тригонометрическими многочленами или квазимногочленами. У них имеются свои меры сложности.

А можно заняться теоретическим исследованием. Скажем, классифицировать однородные многочлены небольших степеней от небольшого числа переменных по их группам автоморфизмов. И для каждого класса выяснять, при каких условиях эти многочлены неотрицательны при неотрицательных значениях переменных. Уже для трёх переменных получается небольшая, но довольно симпатичная теория. Из неё, кстати, следует, что чем больше группа автоморфизмов задачи, тем задача проще (в обоих смыслах).

В общем, здесь есть о чём подумать.

Ну и всегда стоит помнить, что при решении любой, не только оптимизационной, задачи возможности применения принципа симметрии нужно проверять в первую очередь.

Список литературы

[1] *Арбит А. В.* Неравенства и основные способы их доказательства. Ч. 1. М.: МЦНМО, 2016.

[2] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 1979.

[3] *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. В 2 кн. М.: МЦНМО, 2011.

[4] *Вейль Г.* Симметрия. М.: УРСС, 2003.

[5] *Калинин С. И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана. Киров: Вятский государственный гуманитарный университет, 2002.

[6] *Седракян Н. М., Авоян А. М.* Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002.

[7] *Серпинский В.* Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959.

[8] *Серпинский В.* 250 задач по элементарной теории чисел. М.: Просвещение, 1968.

[9] *Хованский А. Г.* Малочлены. М.: Фазис, 1997.

[10] *Bullen P. S.* Handbook of Means and their Inequalities. Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publisher, 2003.

[11] Задачник «Кванта» по математике. http://www.kvant.info/zkm_tex/zkm_main.pdf

Михаил Александрович Горелов, ФИЦ ИУ РАН

griefer62@gmail.com