Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Пусть число p простое. Есть неограниченный запас бусинок n цветов. Сколько можно составить различных ожерелий, содержащих ровно p бусинок? Два ожерелья, переводящиеся друг в друга поворотом, считаются одинаковыми. Выведите из результата задачи **малую теорему Ферма**: *если p простое, n натуральное, то n^p сравнимо с n по модулю p*.
(*Фольклор*)

2. Любой ли трёхгранный угол имеет сечение, являющееся правильным треугольником? (*Фольклор*)

3. Даны два конечных частично упорядоченных множества M и N, а также отображение $f: M \to N$ с таким свойством, что любая пара срав-

нимых элементов M переходит в пару несравнимых, а любая пара несравнимых элементов переходит в пару сравнимых. Докажите, что элементы $x_i \in M$ можно так занумеровать числами от 1 до $|M|$ и расставить в ряд таким образом, что $x_i \prec x_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$ и при этом x_i стоит левее x_j.

(*Е. М. Вечтомов, А. Я. Канель-Белов*)

4. Пусть λ — число, меньшее единицы, а последовательность c_n задана рекуррентно:
$$c_0 = 0, \quad c_{k+1} = \frac{1}{2}\left(c_k + \sqrt{c_k^2 + 4\lambda^{k+1}(1-\lambda)}\right).$$
Предел этой последовательности обозначим $c(\lambda)$. Найдите предел $c(\lambda)$, если λ стремится к единице слева. (*Д. Р. Гайфулин*)

5. а) Дана полоса $2 \times n$, заполненная знаками $+$ и $-$. За одну операцию разрешается поменять знаки в одном столбце, строке или диагонали. Каково минимальное число операций, гарантированно достаточное для того, чтобы сделать все знаки плюсами?

   б) Тот же вопрос для полосы $3 \times n$. (*А. Я. Канель-Белов*)

6. Докажите, что радикальный центр трёх полувписанных окружностей треугольника (т. е. окружностей, которые касаются двух сторон треугольника и его описанной окружности) лежит на прямой OI, где O — центр описанной окружности, а I — центр вписанной окружности.

   (*К. В. Козеренко*)

7. Докажите равенства

   а) $\cos\frac{8\pi}{35} + \cos\frac{12\pi}{35} + \cos\frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \sqrt{7}\sin\frac{2\pi}{5}\right)$. (*В. А. Сендеров*)

   б) $$\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{7\pi}{19} + \cos\frac{11\pi}{19}} + \sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + \cos\frac{17\pi}{19}} +$$
   $$+ \sqrt[3]{\cos\frac{9\pi}{19} + \cos\frac{13\pi}{19} + \cos\frac{15\pi}{19}} =$$
   $$= \sqrt[3]{\frac{1}{2} - 3\sqrt[3]{7} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49} + 18\sqrt[3]{7} - 25} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49} + 18\sqrt[3]{7} - 44}}.$$
   (*С. В. Маркелов*)

   в) $$\sqrt[5]{\frac{\cos(2\pi/11)\cos(4\pi/11)}{\cos^2(16\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(4\pi/11)\cos(8\pi/11)}{\cos^2(32\pi/11)}} +$$
   $$+ \sqrt[5]{\frac{\cos(8\pi/11)\cos(16\pi/11)}{\cos^2(2\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(16\pi/11)\cos(32\pi/11)}{\cos^2(4\pi/11)}} +$$
   $$+ \sqrt[5]{\frac{\cos(32\pi/11)\cos(2\pi/11)}{\cos^2(8\pi/11)}} =$$

$$= \sqrt[5]{276 + 170\sqrt[5]{11} - 40\sqrt[5]{11^2} - 80\sqrt[5]{11^3} - 15\sqrt[5]{11^4}}.$$

(*С. В. Маркелов, К. И. Пименов*)

8. (Албанское неравенство.) Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что
$$\sqrt[3]{AD \cdot BE \cdot CF} \geqslant \sqrt[3]{AB \cdot CD \cdot EF} + \sqrt[3]{BC \cdot DE \cdot FA}.$$
Для каких шестиугольников достигается равенство? (*Dorlir Ahmeti*)

9. (По мотивам леммы Сарда.) а) Пусть f — дифференцируемая функция, определённая на $\mathbb{R}$. Пусть A — множество точек x, где $f'(x) = 0$. Может ли $f(A)$ быть множеством всех чисел?

   Пусть f — действительнозначная гладкая функция на плоскости, A — множество точек, в которых обе её частные производные равны 0. Может ли $f(A)$ быть множеством всех чисел, если

   б) f — класса гладкости C^2?

   в) f — класса гладкости C^1? (*И. В. Митрофанов*)

10. а) (Открытый вопрос.) Дан многочлен $P(n)$ с целыми коэффициентами. Верно ли, что обязательно найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что все простые делители числа $P(n)$ строго меньше n? (*С. В. Конягин*)

    Покажите, что такое n обязательно найдётся, если

    б) $P(n) = n^k - 1$; (*С. В. Конягин*)

    в) $P(n) = an^k + b$; (*С. В. Конягин*)

    г) P — квадратный трёхчлен (уже для кубического ответ неизвестен). (*А. Я. Канель-Белов*)

11. *Бесконечной равномерно гладкой дугой* будем называть траекторию точки, которая начала движение по плоскости в момент времени $t = 0$ и движется со скоростью 1 и с ускорением, не превосходящим 1. (Иными словами, это образ гладкого отображения $\gamma\colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}^2$ с условиями $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ и $|\ddot{\gamma}(t)| \leqslant 1$ при всех $t \geqslant 0$).

    Пусть внутри ограниченной области нарисована *несамопересекающаяся* бесконечная равномерно гладкая дуга $\gamma(t)$. Обязательно ли найдётся такая точка x этой дуги, что любая достаточно маленькая окружность с центром в точке x пересекает дугу $\gamma(t)$ ровно в двух точках? (*Н. Н. Константинов*)

12. Покажите, что группа с тремя образующими a, b, c и соотношениями $bab^{-1} = a^2$, $cbc^{-1} = b^2$, $aca^{-1} = c^2$ тривиальна. (*Фольклор*)

13. Внутри тетраэдра единичного объёма находится параллепипед. Каков максимально возможный его объём? (*А. Я. Канель-Белов*)

14. Натуральные попарно различные $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots b_n$ таковы, что для любого непустого подмножества индексов $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ число $2020! + \sum_{i \in I} a_i$ делится на $\sum_{i \in I} b_i$. Для какого наибольшего n это возможно?
(*В. Брагин, М. Сагафьян*)

15. (По мотивам статьи Д. Ревелла[1].) В каждой целой точке прямой имеется лампочка. Каждая лампочка может находиться в одном из двух состояний — ВКЛ и ВЫКЛ. Изначально все лампочки выключены. В момент времени $t = 0$ в точке с координатой 0 находится безумный фонарщик. Каждую минуту он производит в указанном порядке следующие действия:

а) случайным образом изменяет или не изменяет состояние лампочки в той целой точке, в которой находится;

б) случайным образом перемещается одну из двух соседних целых точек.

Все 4 варианта действий на каждом ходу равновероятны. Обозначим $F(n)$ вероятность того, что в момент времени $t = n$ ситуация такая же, как и в начале, т. е. фонарщик находится в точке 0, а все лампочки погашены. Докажите, что для некоторых положительных c_1 и c_2 при всех n выполнено двойное неравенство

$$e^{-c_1 n^{1/3}} < F(2n) < e^{-c_2 n^{1/3}}.$$
(*И. В. Митрофанов*)

Уточнение формулировок

Приводим уточнённые формулировки задач 20.4 (выпуск 20, с. 250) и 26.4′(б) (выпуск 27, с. 248).

Задача 20.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентой порядка k*, если для некоторых $b_1, \ldots, b_k$ при всех $n \geqslant k$ выполняется равенство $b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0$. Пусть $b_0 = 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i. Докажите, что либо последовательность $\{a_n\}$ содержит член, имеющий не менее 2016 различных простых делителей, либо множество натуральных чисел разбивается на непересекающиеся арифметические прогрессии, на каждой из которых наша рекуррента пропорциональна геометрической прогрессии.

Задача 26.4′(б). Обобщите и решите задачу из п. (а) для случая попадания $k+1$ птички в $(k-1)$-мерное подпространство.

[1] *Revelle D.* Heat Kernel Asymptotics on the Lamplighter Group // Electron. Commun. Probab. 8 (2003), 142–154.