Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 2 (с. 216, см. решение: выпуск 4, с. 221) опубликована

Задача 2.3. Пусть $a_0 = a$, $a_{n+1} = a^{a_n}$, q — произвольное натуральное число, большее 1. Докажите, что последовательность остатков от деления a_n на q стабилизируется (т. е. все остатки, начиная с некоторого, равны). (*Фольклор*)

Решение этой задачи основано на том факте, что при последовательном применении функции Эйлера $\varphi(n)$ мы в конце концов получаем единицу. В этой связи возникает следующий вопрос.

Задача 2.3′. *Пусть (a_i) — бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел, удовлетворяющая условию:*

$$\text{\textit{для каждого номера } } i > 0 \text{ \textit{выполняется равенство} } \varphi(a_i) = a_{i-1}. \qquad (*)$$

Опишите все такие последовательности.

(*К. С. Зюбин, ученик МАОУ СОШ №* 32, *Томск*)

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 6, с. 140–142) опубликована

Задача 2.7. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1{,}99; +1{,}99]$?

(*А. Я. Канель*)

Ей родственна

Задача 2.7$'$. *У многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что $P(x)$ делит многочлен вида x^n-1 для некоторого n.*

(*М. Л. Концевич*)

В выпуске 3 (с. 232, см. решение: выпуск 4, с. 223) опубликована

Задача 3.1. Пусть A, B, C — произвольные матрицы размера 2×2. Докажите тождество Холла: $[[A,B]^2,C]=0$. (Через $[A,B]\overset{\mathrm{def}}{=}AB-BA$ обозначается *коммутатор*.)

(*Фольклор*)

Это означает, что $[A,B]^2$ есть *центральный полином* от матриц второго порядка, т. е. принимает только скалярные значения.

Тождество Капелли C_n порядка n — равенство нулю некоммутативного многочлена

$$C_n(\vec{x},\vec{y})=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\sigma}y_0x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2\ldots y_{n-1}x_{\sigma(n)}y_n.$$

В любой n-мерной алгебре $C_{n+1}\equiv 0$, в частности в $n\times n$-матрицах $C_{n^2+1}\equiv 0$.

Задача 3.1$'$. *Докажите, что следующие многочлены от $n\times n$-матриц являются центральными.*

а) Многочлен Размыслова[1)]

$$Z_n=\sum_{i=1}^{n^2}C(x_1,\ldots,x_{n^2};y_{i+1},\ldots,y_{n^2},y_1,\ldots,y_i).$$

б) Многочлен Форманека. *Пусть*

$$\vec{x}(\vec{n})=(x_1^{n_1},\ldots,x_k^{n_k}),\qquad G_{\vec{n},k}(\vec{x},\vec{y})=C_k(\vec{x}(\vec{n}),\vec{y}),$$
$$\tau(x_1,\ldots,x_k)=(x_2,\ldots,x_k,x_1).$$

Тогда

$$F_n(\vec{x},\vec{y})=\sum_{s=1}^{n}G_{\vec{n},k}(\tau^s(\vec{x}),\vec{y}).$$

[1)] Многочлен Размыслова Z_k можно представлять себе так. Запишем слагаемые многочлена C_{n^2} по кругу. Будем разрывать круг во всевозможных местах сразу после вхождения одной из переменных x_i и сложим результаты.

в) *Для матриц порядка k над полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов централен* многочлен Латышева — Шмелькина

$$c(x)=\Big(\frac{x^{q^k}-x}{P(x)}\Big)^{(q^k-1)k}\cdot\prod_{m=1}^{k-1}(x^{q^m}-x)^{(q^k-1)k},$$

где $P(x)$ — любой неприводимый многочлен степени k над полем $\mathbb{F}_q$.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 18, с. 262) опубликована

Задача 3.5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена. (*Теорема Гаусса — Люка*)

Имеется задача на схожий сюжет:

Задача 3.5$'$. *Даны многочлены P, Q степени n с вещественными корнями $x_1,\ldots,x_n$; $y_1,\ldots,y_n$ соответственно. Пусть*

$$z_1<\ldots<z_{n-1},\quad t_1<\ldots<t_{n-1}$$

— корни производных P' и Q' соответственно, и пусть кроме того $x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots<x_n<y_n$. Докажите, что $z_1<t_1<z_2<t_2<\ldots<z_{n-1}<t_{n-1}$.

(*Фольклор*)

В выпуске 4 (с. 216, см. решение: выпуск 5, с. 228–229) опубликована

Задача 4.8. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$F(x+y)=A(x)+B(x)C(y).$$

(*А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин*)

Функциональные уравнения появляются в задачах разного содержания. Дж. Максвелл исследовал распределение частиц по скоростям. Для функции плотности распределения $F(\vec{v})$ он предположил следующее:

- $F(\vec{v})=\Phi(|\vec{v}|^2)$ (изотропность пространства),
- $F(\vec{v})=\phi(v_x^2)\phi(v_y^2)\phi(v_z^2)$ (независимость распределений координат вектора $\vec{v}$).

Таким образом он пришёл к следующему функциональному уравнению:

Задача 4.8$'$. *Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного*:

$$\Phi(a+b+c)=\phi(a)\phi(b)\phi(c).$$

(*Дж. Максвелл*)

В выпуске 7 (с. 187, см. решение: выпуск 9, с. 229) опубликована

Задача 7.1. Известно, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ и $|x_i - y_i| \leqslant \varepsilon$ при всех i; $z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_n$ — результат переупорядочивания набора $\{y_i\}_{i=1}^n$ в порядке возрастания. Докажите, что $|x_i - z_i| \leqslant \varepsilon$ при всех i. (*И. Н. Сергеев*)

В этой связи хотелось бы напомнить классику:

Задача 7.1′. а) *Физкультурники построены в n колонн и m шеренг. В каждой колонне они стоят по росту. Верно ли, что если в шеренгах их расставить по росту, то и в колоннах они останутся стоять по росту*?

б) *Физкультурники построены в 20 колонн и в 10 шеренг. В каждой колонне отметили самого высокого, а в каждой шеренге — самого низкого. Затем среди самых высоких отметили самого низкого* (*Ваню*), *а среди самых низких — самого высокого* (*Петю*). *Может ли Петя оказаться выше Вани*? (*Фольклор*)

В выпуске 10 (с. 279, см. решение: выпуск 14, с. 277–278) опубликована

Задача 10.9. Пусть G — группа порядка $2^n(2k+1)$, содержащая элемент порядка 2^n. Докажите, что множество элементов нечётного порядка является подгруппой. (*Заочный конкурс памяти Кирилла Дочева*)

На международной студенческой олимпиаде IMC 2020 была предложена задача 7 на схожую тему:

Задача 10.9′. *Пусть G — группа, $n \geqslant 2$, H_1, H_2 — такие её подгруппы, что $[G:H_1] = [G:H_2] = n$ и $[G:(H_1 \cap H_2)] = n(n-1)$. Докажите, что H_1 и H_2 сопряжены в G.* (*Здесь $[G:H]$ есть* индекс *группы G по подгруппе H, т. е. число левых смежных классов xH в G. Подгруппы H_1 и H_2* сопряжены, *если $g^{-1}H_1 g = H_2$ для некоторого $g \in G$.*)

(*И. И. Богданов, А. Д. Матушкин*)

В различных учебниках для школьников и студентов много красивых фактов и теорем. Призывая учащуюся молодёжь доставать изюм из булочки (и присылать в редакцию), приведём пример такого рода:

Задача 10.9″. а) *Докажите, что p-группа имеет нетривиальный центр.* (*Термином p-*группа *обозначается группа, в которой порядки всех элементов — степени простого числа p.* Центром *группы называется множество её элементов, перестановочных со всеми элементами группы.*)

б) *Пусть группа G имеет порядок $|G| = p^k q$, $(q, p) = 1$, p — простое число. Тогда в G существует подгруппа H порядка p^k, причём количество таких H сравнимо с 1 по модулю p и все они сопряжены.*

(*Теорема Силова*)

В выпуске 10 (с. 280, см. решение: выпуск 11, с. 149–158) опубликована

Задача 10.10. Среди k монет есть одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее. За какое минимальное число взвешиваний можно определить фальшивую монету на чашечных весах без гирь, если при этом а) требуется узнать, легче она или тяжелее; б) не требуется узнать это. (*А. М. Яглом, И. М. Яглом*)

Следующая задача ей родственна по методу решения:

Задача 10.10′. а) *Из 11 шаров два радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нём хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Докажите, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров, а за 7 проверок их всегда можно обнаружить.* (*Фольклор*)

б) (Задача на исследование.) *Аналогичный вопрос для n шаров, из которых 2 радиоактивны. Найдите минимальное число проверок.*

в) (Задача на исследование.) *Аналогичный вопрос для n шаров, из которых k радиоактивны. Получите оценки (верхние и нижние) на минимальное число проверок.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 10 (с. 280, см. решение: настоящий выпуск, с. 251–254) опубликована

Задача 10.12. Квадрат разбит на треугольники равной площади. Докажите, что их число чётно. (*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 10.12′. а) *n-мерный куб разбит на симплексы равного объёма. Докажите, что их число делится на $n!$.*

б) *Правильный пятиугольник разбит на треугольники равной площади. Докажите, что их число делится на 5. Что можно сказать в случае правильного n-угольника при произвольном n?*

в) *Докажите, что не всякий выпуклый четырёхугольник можно разбить на треугольники равной площади.*

г) *Исследуйте вопрос о разбиении на четырёхугольники и, более общо, на k-угольники равной площади.*

д) *Исследуйте вопрос о разбиении правильных многогранников на симплексы равного объёма.* (*А. Я. Белов*)

В выпуске 11 (с. 162, см. решение: выпуск 13, с. 186, а также выпуск 14, с. 278) опубликована

Задача 11.1. Вычислить $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)}$. (*М. Панов*)

Есть много любителей считать определённые интегралы (в числе их был, например, академик Л. Д. Ландау). Приведём несколько задач на эту тему:

Задача 11.1′. *Вычислите*:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x+x^2)}{x-x^2}\,dx$; (*Пирмурат Гурбанов, Международный университет гуманитарных наук и развития, Ашхабад*)

б) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(4-\sin^2 x)\,dx$;

г) $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-y} y^k x^m (1-x-y)^n dx\right) dy$;

д) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}$;

е) $\int\limits_0^\infty (e^{-x}-e^{-2x})\frac{dx}{x}$.

ж) *Классика из ТФКП*: $\mathrm{si}(\infty) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

з) *При каком x выполняется равенство* $\int\limits_0^x \frac{dt}{t^{1+\ln t}} = \int\limits_x^\infty \frac{dt}{t^{1+\ln t}}$?

и) *Докажите равенство* $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t \ln t}{t} dt = \frac{\pi}{2}\Gamma'(1)$.

(*Фольклор*)

В выпуске 13 (с. 179, см. решение: выпуск 21, с. 278–282) опубликована

Задача 13.5. Известно, что в любом треугольнике расстояние между центрами O и I описанной и вписанной окружностей выражается через их радиусы R и r с помощью *формулы Эйлера*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Докажите обобщение этой формулы: если в треугольник вписан эллипс с фокусами F_1, F_2 и малой осью l, то

$$R^2 l^2 = (R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2).$$

(*А. А. Заславский*)

Продолжением темы служит

Задача 13.5′. *Треугольник вписан в окружность радиуса R и описан около эллипса с тем же центром и полуосями a, b.*

а) *Докажите, что* $R = a + b$.

б) *Найдите расстояние между центром описанной окружности и ортоцентром треугольника.* (*А. А. Заславский*)

Задача 13.5$''$. *Треугольник описан около окружности радиуса* r *и вписан в эллипс с тем же центром и полуосями* a, b.

а) *Докажите, что* $1/r = 1/a + 1/b$.

б) *Найдите радиус описанной окружности треугольника.*

(*А. А. Заславский*)

В выпуске 27 (с. 242) опубликована

Задача 13.6$'$. а) Пусть A — матрица второго порядка. Тогда

$$\det(A) = \frac{\mathrm{Tr}^2(A) - \mathrm{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) Пусть A — матрица n-го порядка. Тогда $\det(A)$ есть многочлен S_n с рациональными коэффициентами от величин $\mathrm{Tr}(A^k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

(*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 13.6$''$. а) *Положим*

$$t_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Пусть $R\left(t_1^{(n)}, \ldots, t_{n+1}^{(n)}\right) = 0$. *Докажите, что* R *делится на* S_{n+1}. (*Многочлен* S_m *определён выше, в п.* б) *задачи* 13.6$'$.)

б) *Положим*

$$t_k^{(n,m)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k - \sum_{j=n+1}^{m+n} x_i^k.$$

Докажите, что существует такой многочлен Q_{n+1}, *что если*

$$R\left(t_1^{(n,m)}, \ldots, t_{m+n+1}^{(n,m)}\right) = 0,$$

то R *делится на* Q_{n+1}. (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 21 (с. 272, см. решение: настоящий выпуск, с. 256–258) опубликована

Задача 21.5. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что при всяком целом x найдётся такое целое y, что $P(x) = Q(y)$. Докажите, что найдётся такой многочлен $R(x)$, что $P(x) = Q(R(x))$ при всех x. Что будет, если условие задачи ослабить, т. е. потребовать, чтобы указанное y нашлось для бесконечно многих целых x? (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение использует асимптотическое разложение в окрестности бесконечности неявной функции, заданной уравнением $P(x)=Q(y)$. В этой связи полезно обсудить более общее утверждение:

Задача 21.5$'$. а) *Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $P(x,y)=0$, где $P(x,y)$ — многочлен от двух переменных. Тогда y разлагается в* ряд Пюизо, *у которого «хвост» (состоящий из членов с отрицательными степенями x) сходится в окрестности бесконечности*:

$$y = a_m x^{m/n} + \ldots + a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-k/n},$$

где n зависит от P.

б) (Продолжение нормирования.) *Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, неприводимый над $\mathbb{Z}$; $\overline{Q}(x)$ — его (покоэффициентная) редукция по модулю p; $\overline{R}(x)$ — неприводимый многочлен над $\mathbb{Z}_p$, делящий $\overline{Q}(x)$; $R(x)$ — неприводимый многочлен над $\mathbb{Z}$, с редукцией $\overline{R}(x)$; z — его корень. Тогда для некоторого n уравнение $Q(x)=0$ имеет решение в степенных рядах $\sum_{k=0}^{\infty} H_k(z)p^{k/n}$.* (*Фольклор*)

В выпуске 21 (с. 273, см. решение: выпуск 26, с. 221–248) опубликована

Задача 21.11. Пусть $a,b>0$, $M=\dfrac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$. Докажите равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+M^2)(x^2+G^2)}}. \qquad (\textit{К. Ф. Гаусс})$$

Следующая задача также связана с эллиптическими интегралами:

Задача 21.11$'$. *Пусть $a<b<c<d$ и $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Докажите равенство*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{|P(x)|}} = \int\limits_c^d \frac{dx}{\sqrt{|P(x)|}}. \qquad (\textit{Фольклор})$$

В выпуске 22 (с. 232, см. решение: выпуск 23, с. 236–238) опубликована

Задача 22.4. Дана кососимметрическая матрица A. Докажите, что некоторая нетривиальная линейная комбинация её столбцов с неотрицательными коэффициентами образует вектор, все координаты которого неотрицательны. (*И. В. Митрофанов*)

Следующая задача относится к определителям таких матриц:

Задача 22.4$'$. *В квадратной матрице на пересечении i-й строки и j-го столбца при $i>j$ стоит переменная x_{ij}, при $i<j$ стоит $-x_{ij}$, а при*

$i=j$ стоит 0. *Докажите, что её определитель есть квадрат многочлена от переменных x_{ij}.* (*Теорема Пфаффа*)

В выпуске 24 (с. 175–176) опубликована

Задача 24.2. а) Пусть 0 — притягивающая точка непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ (т. е. $0<|f'(0)|<1$). Положим $k=f'(0)$. Докажите существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k^n}=:G(x_0)$$

для всех x_0 из некоторой окрестности нуля, непрерывность функции G и тождество

$$G(k\cdot G^{(-1)}(x))=f(x).$$

б) Докажите, что если f бесконечно дифференцируема, то и G тоже бесконечно дифференцируема.

в) Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}{2}\cdots=\frac{4-x^2}{\sqrt{2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}}.$$

(*А. Я. Канель-Белов*)

С этим сюжетом связана

Задача 24.2′. а) *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентно*:

$$x_0=a\in(0;1),\quad x_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{2}.$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}4^n x_n$.

б) *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентно*:

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=1+\sqrt{1+x_n}.$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n/x_n)$.

в) *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентно*:

$$x_0=a\in(0;1),\quad x_{n+1}=\sin(x_n).$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n$. (*Фольклор*)

В выпуске 24 (с. 176, см. решение: выпуск 27, с. 260–262) опубликована

Задача 24.9. а) Дана последовательность a_n, $n=1,2,\ldots$. Известно, что при всех $\gamma>1$ выполнено равенство $\lim_{m\to\infty}a_{[\gamma^m]}=0$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty}a_n=0$? (Здесь $[x]$ означает целую часть числа x.) (*Фольклор*) б) Назовём число $\beta \in [0,1]$ *хорошим*, если $\beta = \lim_{n\to\infty}\{\alpha^n\}$ при некотором $\alpha > 1$ (здесь $\{x\}$ означает дробную часть числа x). Докажите, что множество хороших чисел не более чем счётно. (*А. Я. Канель-Белов*)

С ней связана

Задача 24.9′. *Обозначим через $r(x)$ расстояние от x до ближайшего целого числа. Даны числа $a > 1$ и $b \neq 0$ такие, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r(ba^k) < 1.$$

Докажите, что a является алгебраическим *числом, т. е. корнем многочлена с целыми коэффициентами.* (*Ш. Пизо*)

В выпуске 25 (с. 169) опубликована

Задача 25.10. Докажите, что если функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(0, 2\pi)$, то для любого натурального n выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \geqslant 0.$$

(*Г. Харди — В. Рогозинский, предложил С. Асхабов*)

Вот ещё одна задача, связывающая свойства функции с коэффициентами её ряда Фурье.

Задача 25.10′. *Докажите, что если функция $f(x)$ убывает в интервале $(0, 2\pi)$, то для любого целого $n \geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \geqslant 0.$$

(*Г. Харди — В. Рогозинский, предложил С. Асхабов*)

В выпуске 26 (с. 265, см. решение: выпуск 27, с. 263–265) опубликована

Задача 26.1. Найдите предел

$$\lim_{t\to 1-0} \sqrt{1-t}\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2}\right).$$

(*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 26.1′. а) *Сравнивая сумму $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ с интегралом $\int_1^k \frac{1}{x}\,dx$, докажите, что*

$$n! \sim \sqrt{2c\cdot n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

для некоторого c. (*Абрахам де Муавр*) б) *Оценивая биномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k}$ *с помощью пункта а), воспользовавшись равенством* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ *и интегралом Гаусса*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},$$

покажите, что константа c *из предыдущего пункта равна* π.

(*Джеймс Стирлинг*)

в) *Докажите, что*

$$n!=\sqrt{2\pi\cdot n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k n^{-k}},$$

при этом все a_k — *рациональные числа.* (*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 234, решение см. настоящий выпуск, с. 261–262) опубликована

Задача 27.3. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

Продолжением темы служит

Задача 27.3$'$. а) *На круглом торте лежит несколько неперекрывающихся круглых шоколадок. Докажите, что торт можно разрезать на выпуклые части так, чтобы в каждой части было по одной шоколадке. Верно ли аналогичное утверждение для треугольных шоколадок*?

б) *В выпуклой булке запечено несколько изюминок в форме шаров. Верно ли, что булку можно разрезать на выпуклые части так, чтобы в каждой части было по одной изюминке*? (*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 234) опубликована

Задача 27.4. *Дробно-кубическое отображение* — это отображение вида

$$z\to\frac{a_1z^3+b_1z^2+c_1z+d_1}{a_2z^3+b_2z^2+c_2z+d_2}.$$

Всегда ли его можно представить в виде суперпозиции отображений вида $z\to z^2$, $z\to z^3$, $z\to az+b$, $z\to 1/z$? (*А. Я. Канель-Белов*)

Сюжет этой задачи связан с тринадцатой проблемой Гильберта о представлении функции в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных, а решение задачи предваряет более сложную ситуацию.

Задача 27.4$'$. а) *Докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция от трёх переменных, не представимая в виде суперпозиции бесконечно дифференцируемых функций меньшего числа переменных.*

б) *Докажите, что существует липшицева функция от трёх переменных, не представимая в виде суперпозиции липшицевых функций меньшего числа переменных. (Функция называется* липшицевой, *если существует константа C такая, что если расстояние между точками x, y равно $\rho(x, y)$, то $\rho(f(x), f(y)) \leqslant C \cdot \rho(x, y)$.)*

(*А. Н. Колмогоров, А. Г. Витушкин*)

в) *Докажите, что (вообще говоря, разрывная) функция от трёх переменных, определённая на единичном кубе, представима в виде суперпозиции функций от двух переменных.* (*Фольклор*)

Комментарий. Вопрос о представлении непрерывных функций суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных составляет тематику тринадцатой проблемы Гильберта.

В выпуске 27 (с. 235) опубликована

Задача 27.10. Даны числа $1, 2, \ldots, \lfloor e \cdot n! \rfloor$. Докажите, что их нельзя разбить на n классов так, чтобы ни в одном классе не выполнялось равенство $a = b + c$. (*И. Шур*)

Развитием темы служит

Задача 27.10$'$. *Даны числа $1, 2, \ldots, N$. Докажите, что при достаточно большом N их нельзя разбить на 2021 класс так, чтобы ни в одном классе не выполнялось равенство $x_1 = x_2 + \ldots + x_{100}$.*

(*Обобщённая теорема Шура*)

К статье «Каверзная задача»

В статье «Каверзная задача» (с. 88–96 данного выпуска) теорема на с. 89 сначала опровергается (с. 90–91), а затем доказывается (с. 91–94). Какое из двух рассуждений ошибочно, и в чём состоит ошибка?