Памяти Джона Конвея

Ушёл из жизни глубокий и яркий математик, выдающийся педагог и популяризатор математики Джон Х. Конвей (1937–2020). Российским читателям знакомы его книги «Упаковки шаров, решётки и группы» (с Н. Слоэном, М.: Мир, 1990), «Квадратичные формы, данные нам в ощущениях» (М.: МЦНМО, 2008), «О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях» (с Д. Смитом, М.: МЦНМО, 2009).

Публикуем статью о Конвее, написанную хорошо знавшим его немецким математиком Дирком Шляйхером, а также интервью, взятое Шляйхером у Конвея в 2011 г., и три статьи Конвея, адресованные широкой математической аудитории. Перевод и примечания Б. Р. Френкина при участии В. А. Воронова.

Джон Конвей: человек, который играл в математику

Д. Шляйхер

Джон Конвей был одним из самых легендарных математиков нашего времени: глубочайший исследователь, он в то же время много интересовался занимательной и «повседневной» математикой, получая результаты и открывая пути, важные для всех нас. Он всегда был готов включиться в игру, особенно если придумал её сам. Он был единственным в своём роде — как математик, как учитель, как друг. Невозможно воздать должное всем граням его личности, но я хотел бы осветить те из них, которые наиболее впечатлили меня; см. также [CI].

Частичная поддержка работы: European Research Council, Advanced Grant 695621 HOLOGRAM. Сокращённая и отредактированная версия опубликована на английском языке: «The Mathematical Intelligencer», June 2021, v. 43, № 6, p. 1–13.

Джон Хортон Конвей в августе 2012 г. читает лекцию
по Фрактрану в университете Якобса (Бремен)

§ 1. Математика повседневности: дни недели и фаза луны

Позвольте мне начать с «математики повседневности». Один из многих талантов Конвея — замечать взаимосвязи, которые никто больше не видел. Это позволило ему за секунды вычислять день недели для любой даты в прошлом, настоящем и будущем. Часто ему хватало лишь около 15 секунд, чтоб вычислить день недели для 10 (!) случайных дат. Это достигалось благодаря не только быстроте его ума, но и открытому им «алгоритму судного дня». Алгоритм основан на открытии, что в любом году следующие даты приходятся на один и тот же день недели: 4/4, 6/6, 8/8, 10/10 и 12/12 (4 апреля, …, 12 декабря). Если, например, вспомнить, что в 2021 г. все эти даты приходятся на воскресенье, то можно сразу сказать, что день рождения Конвея, 26 декабря, в 2021 г. тоже будет воскресеньем — через две недели после «декабрьского судного дня». Правило «судного дня» (описанное в Дополнении А) весьма замечательно — и особенно замечательно то, что явно никто его не заметил до Конвея.

Ненамного труднее вычислить в уме с разумной точностью фазу луны, снова для любой даты в прошлом, настоящем и будущем. Это ещё одна формула, открытая Конвеем, — неожиданно простая, если сравнить её с достаточно сложной точной формулой, которую даёт физика. Как следствие, можно легко вычислить, когда будет пасха в любом данном году (Карл Фридрих Гаусс вывел для этого свою формулу). Мы объясним метод Конвея в Дополнении B.

§ 2. Игра «Жизнь»

Оба факта, о которых сказано выше, принадлежат «математике повседневности». Я узнал их от Джона и постоянно использую. Хотя они и удивительны, но, разумеется, это не результаты глубоких исследований. Прежде чем перейти к таковым, давайте рассмотрим самое, быть может, известное изобретение Конвея — *игру «Жизнь»*. На самом деле это *клеточный автомат*, который действует на бесконечной квадратной решётке (в действительности это не игра, так как игрок не требуется). Каждая клетка в решётке находится в одном из двух возможных состояний, «белом» или «чёрном» (или эквивалентно, например, «мёртвом» или «живом»). Если дано состояние всех клеток в некоторый момент времени, то состояние в следующий момент определяется очень простым правилом, причём для каждой клетки состояние зависит лишь от предыдущего состояния этой клетки и восьми её соседей (см. Дополнение C). Правило простейшее, и замечательно, какую сложность оно порождает: у многих из нас написаны программы для визуализации этой «игры», и можно получить яркое впечатление, наблюдая её на анимированных вебсайтах вроде `https://en.wikipedia.org/wiki/Conway's_Game_of_Life`. Отсюда и её название: экран компьютера как бы оживает. На рис. 1 показана типичная возникающая конфигурация. Примечательно, что даже гугл по запросу «игра „Жизнь“» выдаёт эмуляцию игры прямо на экране с результатами поиска.

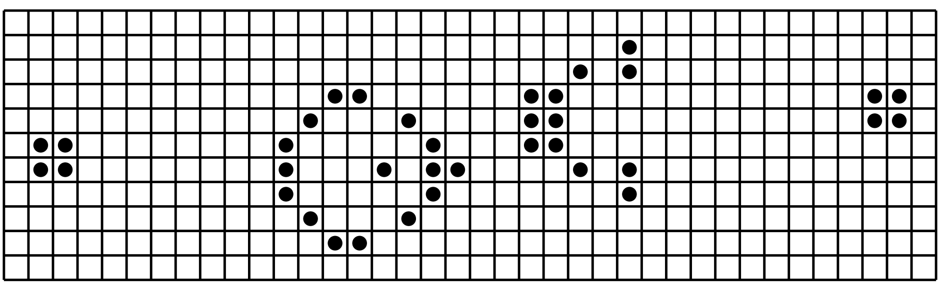

Рис. 1. Типичная конфигурация из игры «Жизнь»: живые клетки закрашены чёрным, а мёртвые клетки пусты. Данная конфигурация называется «Планерное ружьё» и открыта Биллом Госпером

Имеются простые начальные конфигурации всего лишь из пяти живых клеток — они называются *планерами* и движутся через экран по диагонали. Есть и более сложные конфигурации, *планерные ружья*, которые периодически «выстреливают» планеры; см. рис. 1 и Дополнение C.

Больше всего впечатляет, что эта простейшая система полна по Тьюрингу: в принципе она способна выполнить любое вычисление, доступное самому продвинутому компьютеру (хотя гораздо медленнее). Сегодня это легко запрограммировать для компьютера, но Конвей создавал «Жизнь» примерно в 1970 г. на досках для игры в Го в комнате отдыха кембриджских математиков, используя помощь ряда студентов, отвечавших за различные части доски. Ранее было известно, что существуют клеточные автоматы, полные по Тьюрингу (Джон фон Нейман описал один из них). Но их описание было основано на доказательстве соответствующих свойств, а Конвей был убеждён, что почти любой не совсем тривиальный клеточный автомат должен быть полон по Тьюрингу: Конвей верил в возможность «построить его без построения», предоставив простоте выполнять работу по созданию сложности. Он проверил методом проб и ошибок множество простейших возможных систем, пока не нашёл ту, которая сделала его знаменитым. Это была «мечта его юности» (Jugendtraum), лежавшая в основе многого сделанного им: простейшие системы должны иметь значительную, если не универсальную мощь.

В частности, игра «Жизнь» неразрешима: нет алгоритма для проверки, приведёт ли произвольная начальная конфигурация (из конечного количества клеток) к заданной конечной конфигурации. В противном случае игру можно было бы использовать для эмуляции любых компьютерных программ и таким образом решить проблему остановки — образец неразрешимой компьютерной проблемы.

Создав игру «Жизнь», Конвей стал знаменит в сфере науки — далеко не только в математике, — а также в области занимательной математики, после того как журнал *Scientific American* в 1970 г. представил игру широкой аудитории. Тот факт, что очень простая начальная конфигурация может привести к очень сложному и непредсказуемому поведению, породил множество интерпретаций и гипотез, например, что простые детерминированные системы могут допускать макроскопическое поведение, соответствующее наличию «сознания» и «свободы воли».

Иногда Конвею приписывают сожаление о том, что он изобрёл игру «Жизнь», и даже «ненависть» к ней; как я понимаю, его задевало, что его «сводят» к одному этому достижению [CI, p. 570]; но это вполне могло меняться со временем.

§ 3. Фрактран

Мечту юности Конвея материализует другое его изобретение, «Фрактран». Его вдохновила задача о знаменитой классической последовательности — «$3n+1$-проблема», известная также под многими другими именами, например как «проблема Коллатца»: возьмём произвольное натуральное n; если оно чётно, разделим его на 2, а если нечётно — заменим на $3n+1$. Повторим это с полученным числом, и так до бесконечности. Например, число 14 (чётное) переходит в 7; это число нечётно и переходит в 22, затем в 11, затем в 34, затем в 17, 52, 26, 13, и так далее. Все когда-либо проверенные натуральные числа в итоге приземляются на цикл $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$ (и это проверено до многих миллиардов), но никому не удалось объяснить, почему.

Конвей предложил простое концептуальное обобщение, а именно Фрактран [C-F]. «Программа» Фрактрана — это конечный список дробей, например:

$$\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, \frac{55}{1}.$$

Рассмотрим итерационную процедуру как в проблеме Коллатца: для данного натурального числа n найдём первую дробь p/q в списке, при умножении которой на n получается целое число (иначе говоря, найдём первый знаменатель, который делит n), а затем заменим n на произведение np/q. Повторим это с полученным числом. Как и в проблеме Коллатца, имеется конечное количество случаев в зависимости от свойств делимости n, и в каждом случае n заменяется его образом при простом отображении (таком как $n \mapsto 3n+1$ или умножение на дробь). Этот конкретный список дробей обладает замечательным свойством: если начать с 2 и выполнять итерации до бесконечности, то окончательный список чисел содержит бесконечно много степеней двойки, а их показатели в том порядке, в каком они появляются, — это в точности простые числа! Разумеется, это не свойство простых чисел, а следующий результат об универсальности: любая вычислимая функция может быть вычислена с помощью такого конечного списка дробей! Иначе говоря, Фрактран тоже полон по Тьюрингу. Существует даже конечный список дробей, который универсален в том смысле, что может вычислить какую угодно вычислимую функцию. От такого списка дробей не требуется большая длина: достаточно 23 дробей, и до сих пор стоит одна из задач, поставленных Конвеем, — построить самый короткий из таких списков. (Конвей говорит, что однажды он получил универсальную программу Фрактрана, состоящую всего из семи дробей, хотя и очень сложных;

но Конвей потерял эту бумажку, а создавший её студент давно умер. Задача остаётся!)

Поскольку Фрактран полон по Тьюрингу, он алгоритмически неразрешим: невозможно определить, оборвётся ли когда-нибудь (например, достигнув единицы) наперёд заданный набор дробей, начинающийся с определённого числа. Это приводит к вопросу, какое наименьшее количество дробей приводит к неразрешимости. Как показывает список Конвея, для неразрешимости заведомо достаточно 23 дробей; согласно рассказу, приведённому выше, может хватить и семи дробей. Ясно, что двух дробей не хватит; но каково наименьшее количество? Неразрешима ли $(3n+1)$-проблема?

Конвей верит, что достаточно трёх случаев. Он построил следующую «немузыкальную перестановку» (amusical permutation)[1], см. [C-A]: если число n чётно, положим $n=2k$ и заменим n на $3k$; если n нечётно, представим его как $4k+1$ или $4k-1$ и заменим соответственно на $3k+1$ или $3k-1$. Ясно, что получается перестановка на множестве всех целых чисел. Легко видеть, что некоторые числа порождают периодическую последовательность; например, 2 переходит в 3, а 3 переходит снова в 2. Для других целых это не столь очевидно. Конвей, в частности, утверждает, что

(1) орбита числа 8 не периодична, а, напротив, уходит на бесконечность;
(2) утверждение (1) верно, но не может быть доказано;
…
$(n+1)$ утверждение (n) верно, но не может быть доказано.

На самом деле Конвей говорит: все мы знаем, что в математике есть верные, но недоказуемые теоремы, но мы склонны думать, что они для нас далеки и темны, а на самом деле «зверь рядом». В статье [C-A], где описана «немузыкальная перестановка», Конвей подчёркивает, что очень многие результаты «очевидно» верны и «очевидно» недоказуемы. И заканчивает дерзким утверждением, что если кто-то разочарован тем, что статья не содержит доказательств, — ну как раз в этом и дело! Мечта юности Конвея в своём лучшем виде!

Я давно осознал, что эта юношеская мечта заслуживает более последовательного изложения. Оно должно связать универсальность игры «Жизнь» и Фрактрана, двух ранних («юношеских») изобретений Конвея,

[1] Игра слов, характерная для Конвея. В этой перестановке появляется константа, измеряющая отклонение музыкального тона от чистого (его «немузыкальность»). Но слово amuse означает «забавлять», и Конвей пишет о перестановке: it has amused me to call it amusical (мне было забавно назвать её amusical).

с неразрешимостью его перестановки (одна из его поздних публикаций); так что, похоже, Конвей не забывал свою мечту в течение всей жизни (и явно имел в виду к ней вернуться [Ro, p. 168]). Я помогал в редактировании его статьи [C-A] о «немузыкальной перестановке» (совместно с Алексом Рыба). В ранних версиях Конвей связывал эти идеи с работами Гёделя по неразрешимости и с проблемой остановки для машины Тьюринга. Алекс и я усиленно поддерживали его в намерении показать эти важные взаимосвязи, но в итоге Джон решил, что статья окажется лучше без них, и удалил уже написанный текст о взаимосвязях. Я продолжал подталкивать его к тому, чтобы написать обо всём этом, но он решил, что эта тема — лишь предмет «моей одержимости». В итоге мы пришли к ситуации «моя одержимость против его одержимости», и я был вынужден сдаться. Лишь недавно я осознал, что эта идея была юношеской мечтой Конвея; в его биографии [Ro] она возникает повсюду. Я по-прежнему хочу, чтобы кто-нибудь подробно написал об этой его мечте — «глубочайшем вопросе жизни, вселенной и вообще всего».

§ 4. Игры Конвея и сюрреальные числа

Одно из открытий Конвея, наиболее впечатляющих меня, — его теория игр и «сюрреальных» чисел. Можно утверждать, что он ввёл в рассмотрение больше чисел, чем кто-либо другой, и, быть может, никто не сумеет ввести больше, в некоем строгом смысле. Его определения просты почти до неправдоподобия, и однако он создаёт новый мир чисел, ПОЛЕ, содержащее и действительные числа, и ординалы. Я следую традиции Конвея писать ПОЛЕ большими буквами, так как этот объект слишком велик, чтобы содержаться в каком-либо множестве: даже одних ординалов слишком много, чтобы охватить их обычной теорией множеств, а Конвей с лёгкостью создаёт свои числа с арифметикой, необходимой для поля, и всё это — игры с весьма естественными правилами! (Можно возразить, что ординалы — столь же многочисленный класс, как сюрреальные числа Конвея, и они были известны до Конвея; но их арифметика бедна, и в ней отсутствует даже коммутативность сложения.)

Мы говорим об играх двух участников, которых обычно называют Левые и Правые; это игры двух лиц с полной информацией, такие как шахматы и Го: никаких случайностей, никаких тайных карт на руках. И опять Конвей чувствует, что хотя шахматы и удовлетворяют нужным определениям, всё же эта игра «не совсем хороша»: её правила слишком сложны (она не обладает «божественной простотой»). Как всегда, ему нравится сложность, возникающая из очень простых правил.

Определения игр и чисел Конвея очень просты и естественны, хотя эта простота может требовать некоторого пояснения. Они имеют примерно следующий вид, после некоторого дальнейшего упрощения:

Определение 1 (игры и числа).

(1) Если L и R — два множества игр, то упорядоченная пара (L, R) является **игрой**.
(2) Все игры создаются таким образом.
(3) Игрок может **выиграть**, если у противника нет хорошего хода.
(4) Игра называется **числом**, если ни один из участников не имеет намерения делать ход (в любой из своих позиций).

Кратко объясним, что это значит; дальнейшие подробности приведены в Дополнении D.

Игра полностью определяется множеством возможных ходов двух игроков, а каждый такой ход сам по себе является игрой, которая также характеризуется множеством возможных ходов. Так что надо рассматривать игру не как «шахматы с множеством общих правил, например, что ладья всегда ходит по прямой», а скорее как «конкретную ситуацию в такой игре, когда все фигуры занимают определённые позиции». В такой ситуации возможные ходы для отдельного игрока — это в действительности ситуации, в которые можно перейти. Таким образом, L — множество возможных ситуаций (=игр), в которые могут перейти Левые, а R — аналогичное множество для Правых. Например, в начальной ситуации шахмат игрок Белые располагает множеством из 20 возможных ситуаций, куда можно перейти (каждая из восьми пешек может продвинуться на одну или две клетки, а оба коня имеют по два хода), и аналогично для Чёрных. Каждая из этих 20 ситуаций сама по себе является игрой, с возможными ходами для Белых и Чёрных.

Разумеется, такое определение игры рекурсивно в высокой степени. И как придать ему смысл, если для того, чтобы определить игру, мы уже нуждаемся в двух множествах игр? Но ведь некоторое множество игр имеется всегда: пустое множество. Соответственно, тривиальная игра — это игра, где у игроков нет возможных ходов; она называется нулевой игрой; но она вполне корректно определена (правда, скучновата). Условие (2) требует, чтобы каждая игра в итоге заканчивалась: более точная формулировка — чтобы не было бесконечной последовательности ходов из одной позиции в другую. Это основа многих индуктивных доказательств Конвея.

Игрок проигрывает, если его очередь ходить, но возможных ходов нет (множество ходов пусто), и тогда выигрывает другой. Это закодировано в условии (3): игрок выигрывает, если у противника вообще нет ходов, или, рекурсивно, если независимо от действий противника у вас всегда есть «хороший ход», так что вы никогда не останетесь без возможных ходов, пока это не произойдёт с противником. Это условие неявно означает, что игроки ходят по очереди.

Самым естественным образом из игр образуется абелева ГРУППА (снова большими буквами). Противоположный элемент для игры — та же игра, где игроки обменялись множествами возможных ходов. Способ сложения двух и более игр тоже естествен: игрок выбирает одну из игр-слагаемых и делает в ней ход, ничего не меняя в остальных играх. Это определение вполне естественно для многих игр, включая Го (но в меньшей степени для шахмат): отсюда возникает теория эндшпилей в Го, которая в некоторых ситуациях позволяет побеждать больших мастеров.

Наконец, условие (4) выделяет интересное подмножество игр, в терминологии Конвея — *числа*; точную формулировку мы приводим в Дополнении D. Чтобы отличить их от известных видов чисел, их часто обозначают термином «числа Конвея» или «сюрреальные числа», следуя Кнуту [K]. Заранее совсем не ясно, что такое определение ведёт к чему-то содержательному, но это действительно так. В частности, такие числа можно умножать и делить, и мы получаем ПОЛЕ.

Отсюда совсем легко извлечь ординалы: ординал (порядковое число) — это число Конвея, в котором множество R пусто, а L состоит лишь из ординалов. Снова рекурсивное определение. Если не считать пустых множеств R, оно сводится к тому, что ординал — множество (меньших) ординалов. Полное упорядочение возникает из условия (2). На языке игр получаем следующее: Правые не имеют никаких ходов вообще, а Левые могут пойти из данного ординала в любой меньший ординал. Такое правило даёт преимущество Левым, но эту игру можно добавить, например, к шахматам, или к любому ординалу, или к противоположной ему игре, и такие суммы могут оказаться вполне интересными.

Чуть труднее извлечь отсюда действительные числа. Если в условии (1) ограничиться конечными множествами, мы получим все диадические числа (т. е. числа вида $k/2^n$), так что какие-то бесконечные множества необходимы. Легко описать игры, в которых один игрок имеет преимущество в три хода перед другим; нахожу занятным, что столь же легко описать игры, где один из игроков имеет преимущество ровно в пол-хода или в семь шестнадцатых хода. Но нетрудно построить также игры, где преимущество одного из игроков составляет ровно треть хода или ровно π ходов. И столь же легко строятся игры, где преимущество бесконечно велико или бесконечно мало. Несколько примеров мы приводим в Дополнении D. При построении действительных чисел представляется, что технически (но не педагогически) гораздо легче делать это методом Конвея: при традиционном способе вначале нужно построить натуральные числа, затем целые, рациональные и наконец действительные, попутно доказывая снова и снова множество свойств. Напротив, «сюрреальные» числа Конвея сразу строятся вполне легко, и по существу единственный трудный шаг — избавиться от всех лишних «недействительных» чисел. (См. в [K] занимательный рассказ об открытии сюрреальных чисел.)

Положительная игра определяется очень просто: в ней L имеет выигрышную стратегию, кто бы ни начинал; и игра является *отрицательной*, если R имеет выигрышную стратегию, кто бы ни начинал. Разумеется, исход игры мог бы зависеть от того, L или R делает первый ход. Игра называется *нулевой*, если начинающий проигрывает (т. е. второй игрок выигрывает). И наконец, бывают *нечёткие* игры, в которых выигрышную стратегию имеет первый игрок. Ясно, что любая игра принадлежит одному из этих четырёх классов в зависимости от исхода.

Вполне элементарно доказывается, что прибавление нулевой игры к любой другой не меняет исход (см. Дополнение D); этим оправдывается её название. В нечётких играх у каждого игрока есть стимул сделать ход — и, значит, эти игры не являются числами, согласно условию (4). Числа, во вполне строгом смысле, «не хотят, чтобы в них играли; они хотят, чтобы их складывали», а победитель определяется просто по знаку суммы.

Отметим, кроме чисел, и другой интересный и важный класс игр. Если в случае чисел два игрока должны делать разные ходы, то *равноправная* (*беспристрастная*) *игра* такова, что оба игрока имеют одно и то же множество возможных ходов — в начале и в течение всей игры. Таким образом, можно отождествить множества L и R и свести их определение к следующему: *равноправная игра есть множество равноправных игр*; *все равноправные игры создаются таким образом*. (Чтобы яснее подчеркнуть аналогию с п. (1) данного выше определения игр, можно сформулировать так: *если G — любое множество равноправных игр, то множество G называется равноправной игрой*.)

Частный случай равноправных игр — игра Ним: из данной кучи предметов игрок при очередном ходе удаляет любое положительное количество предметов, так что куча становится строго меньше. Разумеется, это тривиальная игра: если изначальная куча непуста, первый игрок выигрывает, удалив всю кучу. Но ситуация становится интереснее при сложении таких игр самым естественным способом: при каждом ходе игрок уменьшает одну из куч, а остальные кучи не трогает (в точности конвеевское стандартное определение сложения игр, и это приводит как раз к стандартной игре Ним). На самом деле у Конвея эти кучи вполне могут быть бесконечными: их размер может быть любым ординалом, а ход может привести к любому меньшему ординалу.

Основная теорема о равноправных играх следующая: любая равноправная игра, конечная или нет, равна единственной куче для Нима, которая соответствует ординалу; поэтому Конвей называет такую кучу «Нимбер». Первый игрок выигрывает всегда, когда размер этой кучи не равен нулю. Вся трудность — в вычислении размера (Ним-значения) этой кучи, и в принципе есть простое правило: рассмотрим множество всех возможных ходов (напомним, что равноправная игра как раз и есть это множество); по предположению индукции все эти ходы являются Нимберами (т. е. равны ординалам), а Ним-значение игры равно наименьшему Нимберу, который не лежит в этом множестве. (Для конечных игр это часто называют *теорией равноправных игр Шпрага — Гранди*, но отметим, что определение Конвея попутно расширяет эту теорию на игры размером с любой ординал.)

Позвольте мне закончить этот раздел простым, но, может быть, удивительным наблюдением: в конкретной игре нередко оказывается, что можно определить, кто из двух игроков имеет выигрышную стратегию, но это не даёт ключа к отысканию этой стратегии. Например, можно ввести правило, что первый игрок делает ход по своему выбору, а затем второй игрок может выбрать, будут ли они продолжать как обычно или поменяются ролями. Так что если первый игрок сделает очень сильный первый ход, второй наверняка захочет перехватить эту выигрышную позицию, а если ход был слабым, то второй радостно с этим согласится. В результате второй игрок теоретически имеет выигрышную стратегию, но этот факт совершенно не помогает реально выиграть. Например, такой выбор сторон после первого хода часто применяется в известной (и горячо рекомендуемой читателю) игре Гекс, и по ней проводятся серьёзные турниры — по игре, в которой известно, что у второго игрока есть выигрышная стратегия!

§ 5. Теория групп, лунный свет и Монстр

Теперь обратимся к исследованиям Конвея, находящимся на переднем крае науки. Группы — один из самых важных блоков в построении всей математики (и других сфер деятельности, столь различных, как физика, химия и искусство). Понимание устройства групп начинается с «простых» групп: тех, которые нельзя дальше упростить взятием факторгрупп. При этом известна полная классификация конечных простых групп: к ним относятся циклические группы простых порядков, группы чётных перестановок конечных множеств, ряд так называемых «групп типа Ли», а также 26 «спорадических» групп. Эта классификация всех конечных простых групп — одно из монументальнейших достижений всей математики, потребовавшее нескольких тысяч страниц текста (часть из них появилась совсем недавно).

Особенно трудно было разобраться с 26 спорадическими группами, и даже задним числом никто не составил из них единую картину. Некоторые из них открыл Матьё в 1861 г., а все остальные найдены за восемь лет с 1965 по 1973 г. Некоторые спорадические группы имеют гигантский размер: «Монстр» состоит из более чем 10^{53} элементов. Конвей в 1969 г. открыл три спорадические группы, все они — в большей по размерам групп половине списка.

Простые группы и особенно спорадические группы выглядят совершенно таинственно (это слова неспециалиста). Важный вклад Конвея заключался в разработке и составлении, при поддержке коллег, объёмной книги под названием *АТЛАС конечных групп* [C-W]. В ней сделана попытка представить структуру и собрать всю информацию об этих группах, и сейчас работа над ней продолжается как онлайн-проект.

Монстр, самая большая из спорадических групп, выглядит особенно таинственно. Коснёмся одного его свойства, которое оказалось столь мистическим, что Конвей назвал его «лунный свет» (в смысле «слишком безумно, чтобы быть реальным»).

Группа получает дополнительную структуру, если рассматривать её как группу симметрий геометрического объекта, и эта геометрия помогает понять группу гораздо лучше, чем её абстрактные свойства. Монстр может действовать на векторных пространствах разной размерности: в размерности 1 он действует тривиально; следующие размерности, где он действует (неприводимым образом), — это 196 883, затем 21 296 876 и т. д.

Теперь совершим скачок в совсем другую область математики — теорию эллиптических кривых. Такую кривую можно описать как множество всех точек вида $(x, y) \in K \times K\colon y^2 = 4x^3 - ax - b$, где K — любое (алгебраически замкнутое) поле. Эллиптические кривые играют важнейшую роль во всей математике (Эндрю Уайлз решил заняться доказательством последней теоремы Ферма, как только Герхард Фрей осознал её связь с эллиптическими кривыми). Любая эллиптическая кривая над $\mathbb{C}$ биголоморфно эквивалентна комплексному тору, который получается, если профакторизовать $\mathbb{C}$ по некоторой решётке $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, где $\operatorname{Im}\tau > 0$. Часто оказывается, что различные значения τ приводят к эквивалентным решёткам и, следовательно, к эквивалентным эллиптическим кривым;

на верхней комплексной полуплоскости определена хорошо известная функция j, для которой $j(\tau) = j(\tau')$ в точности тогда, когда соответствующие эллиптические кривые эквивалентны. Этот инвариант глубоко изучался разными методами. В частности, хорошо известно, что для $q = e^{2\pi i \tau}$ мы имеем

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196\,884q + 21\,493\,760q^2 + \ldots$$

Первое поразительное наблюдение состоит в том, что здесь присутствует число 196 883, сдвинутое на единицу. Иначе говоря, коэффициент в разложении функции j равен сумме размерностей первых двух представлений Монстра.

Более того, $21\,296\,876 + 196\,883 + 1 = 21\,493\,759$: следующий коэффициент равен сумме размерностей первых трёх представлений Монстра. Мистика? Призрак? Лунный свет!

Подобная закономерность продолжает действовать и для дальнейших коэффициентов. Это заметил Джон Маккей, который обращался к различным специалистам по теории групп. В конце концов они посоветовались с Джоном Конвеем, который знал столь много о строении групп и умел находить закономерности как никто другой. В результате появилась статья Конвея и Симона Нортона *Monstrous moonshine* [CN], в которой содержится объяснение этих загадок (и введён термин «лунный свет» в данном смысле).

Ясно, что это лишь начало потрясающего «сговора» между теорией групп, вселенной и вообще всем; разумеется, с участием квантовой гравитации. Сюда относится и сделанное в статье [CN] предположение об «обобщённом лунном свете», т. е. о том, что подобные замечательные связи должны существовать и для групп, отличных от Монстра.

Конвей и Нортон выдвинули «гипотезу лунного света»: Монстр действует на бесконечномерном пространстве, и все его видимые конечномерные представления соответствуют инвариантным подпространствам конечной размерности. Эту гипотезу позже доказал Ричард Борчердс, в прошлом ученик Конвея, который был в 1998 г. награждён Филдсовской медалью в том числе и за эту работу.

«Сговор» заходит гораздо дальше. Лунный свет, включая его обобщения, имеет существенные связи с теорией струн — математической теорией элементарных частиц, которую развивал нобелевский лауреат Ричард Фейнман. Бесконечномерное представление Монстра можно интерпретировать как структуру, лежащую в основе конформной теории поля (в размерности два), так что Физика создаёт связь между двумя разными областями математики. Затем приходят чёрные дыры и квантовая гравитация, а также гипотезы Эда Виттена — всё это связано с «лунным светом» Конвея, но эта связь далеко выходит за рамки нашей статьи.

К предыдущему имеют отношение и структуры, называемые *решётками*. Это регулярные периодические структуры в $\mathbb{R}^n$ при произвольном n, например упомянутое выше $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ или положения центров апельсинов, упорядоченно сложенных в продовольственном магазине. Решётки особенно интересны и важны, когда у них есть дополнительная структура, например вращательная симметрия, и в действительности они образуют естественный геометрический объект, на котором можно изучать группы в качестве групп симметрии решёток. Много изучался и глубокий вопрос о плотнейшей упаковке сфер в произвольной размерности. Для размерности 3 это знаменитая гипотеза Кеплера (на практике её решает каждый продовольственный магазин, как описано выше; но формальное доказательство ускользало от математиков столетиями, пока не было завершено Хейлзом в 1998 г.). Для высших размерностей эта тема несёт много сюрпризов.

Например, в размерности 24 существует знаменитая решётка, которая называется *решёткой Лича*. Она была открыта в 1967 г., через три года после того, как молодой Конвей получил докторскую степень в Кембридже. Конвей всю жизнь имел репутацию человека с острым умом, но неорганизованного. Вскоре после публикации о решётке Лича доброжелательный наставник предложил ему: «вам было бы неплохо найти группу симметрий этой решётки». Конвей решил в этот раз быть организованным и составил план, какие дни и часы предстоящих недель он выделит для изучения этого вопроса; этот ритм должен поддерживаться, пока вопрос не будет решён. Случилось так, что Конвей решил этот вопрос во время самых первых послеполуденных занятий, и это мгновенно сделало его знаменитым. При изучении этой группы симметрий Конвей открыл спорадические группы и выработал понимание простых групп, которое приводит ко многим результатам, полученным ранее.

Джон Конвей столь же блестяще излагал математические результаты, как и получал их. Вместе с Нейлом Слоуном он написал основополагающую книгу «Упаковки шаров, решётки и группы» [CS]. Влияние этой книги трудно преувеличить; процитируем оценку Джан-Карло Рота из МТИ: «Это лучший обзор лучших работ в одной из лучших областей математики, написанный лучшими людьми. Он станет лучшим чтением для лучших студентов, интересующихся лучшей математикой, какая сегодня развивается».

Как показывает название книги, решётки часто бывают тесно связаны с оптимальными упаковками сфер, и не только в размерности 3.

В частности, решётка Лича приводит к замечательной упаковке в размерности 24 (недавно показано, что она оптимальна). Но зачем нам заботиться об оптимальных упаковках сфер в размерности 24? Разумеется, математическая любознательность — всегда хороший ответ (несомненно достаточный для многих математиков, включая Конвея); но в данном случае ответ совсем другой: такая упаковка порождает методы кодирования, которые позволяют оптимально использовать в каналах связи коды, исправляющие ошибки. Конвей даже получил в США патент на этот эффект, и результаты Конвея цитировались в последующих патентах, в том числе зарегистрированных американским Агентством национальной безопасности (АНБ) [Ro, p. 314].

§ 6. Ещё о математических исследованиях Конвея

В этом разделе мы кратко опишем ещё некоторые из многочисленных достижений Конвея в математических исследованиях. Одна из их тем — *квадратичные формы*: это полиномиальные функции от любого количества переменных, у которых степень каждого слагаемого равна 2, так что функции имеют вид

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i,j} x_i x_j,$$

где матрицу $(a_{i,j})$ можно считать симметричной. Такие функции играют важную роль во многих областях математики. Квадратичная форма (над упорядоченным полем, например над действительными числами) называется *положительно определённой*, если $Q(x_1, \ldots, x_n) > 0$, как только хотя бы одна из переменных не равна 0.

Квадратичные формы имеют долгую историю в теории чисел, особенно для случая, когда все $a_{i,j}$ целые. Например, знаменитая *теорема о четырёх квадратах* гласит, что можно представить все натуральные числа в виде $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ — тогда как в виде $a^2 + b^2 + c^2$ нельзя представить числа, сравнимые с -1 по модулю 8.

Конвей заметил удивительный факт: *положительно определённая квадратичная* форма с целыми коэффициентами $a_{i,j}$, значениями которой являются все числа $1, 2, \ldots, 15$, в действительности представляет все натуральные числа. Теперь этот результат известен как 15-*теорема*; его совместно доказали Конвей и его ученик Вильям Шнеебергер, но никогда не публиковали. Более сильный вариант утверждает, что достаточно, чтобы были представлены числа $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15\}$, причём для каждого из этих девяти чисел найдётся квадратичная форма, значениями которой являются все натуральные числа, кроме этого одного. Например, квадратичная форма $a^2 + 2b^2 + 5c^2 + 5d^2$ принимает все натуральные значения, кроме 15.

У этой теоремы есть обобщение, так называемая 290-*теорема* о положительно определённых квадратичных формах, коэффициенты которых $a_{i,j}$ не обязательно целые, но при целых x_i значения всегда целые (это условие строго слабее: например, квадратичная форма $x^2 + xy + y^2$, записанная в виде симметричной матрицы, имеет полуцелые коэффициенты). Конвей сформулировал эту теорему как гипотезу, а позже её доказал Манджул Бхаргава (филдсовский лауреат 2014 г.; Конвей был его наставником, но не формальным научным руководителем).

Конвей сделал также важный вклад в *теорию узлов*. Любой узел (вложение окружности в трёхмерное пространство) может быть изображён на плоскости в виде замкнутой кривой с конечным количеством самопересечений, и для каждого пересечения нужно указать, какая нить проходит над другой. Важная задача — выяснить, представляют ли две заданные кривые один и тот же узел. Один из известных ныне инвариантов называется многочленом Конвея — Александера. Он вычисляется по представлению узла в плоскости; эквивалентным узлам всегда соответствует один и тот же многочлен (но существуют неэквивалентные узлы с одинаковыми многочленами). Со временем математики (особенно филдсовский лауреат Вон Джонс) построили и другие инвариантные многочлены, которые имеют впечатляющие взаимосвязи со многими другими областями математики.

Проблемой является уже описание (и перечисление) возможных узлов. Для этой цели были разработаны различные системы обозначений. *Обозначения Конвея* имеют то преимущество, что яснее отражают некоторые свойства узлов. (Конвей всегда был очень тщателен во всех своих обозначениях.)

Закончим этот раздел *теоремой о свободе воли*, которую доказали Конвей и Саймон Кочен [CK1, CK2]. Это было одно из последних важнейших достижений Конвея, и он им особенно гордился. Говоря попросту, теорема утверждает, что *если физики имеют свободу воли, то она есть и у элементарных частиц*. Этот результат породил некоторую дискуссию среди физиков и философов. Разумеется, вселенная могла бы оказаться вполне детерминированной (Конвей мог подбросить свою авторучку, спросив: «Верите ли вы, что вселенная с самого начала была устроена так, чтобы я бросил эту авторучку в этот момент?»). Разумеется, мы не можем этого знать, но Конвей и многие другие твёрдо верят, что мы, человеческие существа, имеем много свободы воли для наших собственных действий. Его теорема утверждает, что если экспериментаторы имеют хотя бы небольшое количество свободы воли (в постановке экспериментов и выборе измеряемых величин), то элементарные частицы должны иметь то, что Конвей (в своём лаконичном стиле) также называет «свободой воли».

Конкретнее, пусть в эксперименте измеряется спин элементарных частиц — вдоль x-оси, y-оси или z-оси в зависимости от свободной воли экспериментатора. При этом можно получить один из двух результатов — положительный или отрицательный. Если этот результат не был предопределён при создании вселенной, то его «выбор» частицей не определяется ни экспериментом и его историей (на самом деле — ничем предшествующим эксперименту), *ни случайностью*!

Конвей исключает случайность простым рассуждением [CI, с. 570]: если результаты данного бинарного выбора зависят от случайности, то можно считать, что они взяты из бесконечной строки случайных битов, и нет разницы, возникла эта случайная строка спонтанно или создана при сотворении мира. Но такая строка предопределена заранее, а Конвей и Кочен это исключают.

§ 7. Джон Конвей как личность

Джон Конвей родился 26 декабря 1937 г. в Ливерпуле, на несколько лет раньше, чем Битлз (неясно, встречались ли они, но отец Конвея работал в средней школе, где учился Джон Леннон). Конвей часто рассказывал, что в школе он был довольно робким и застенчивым — пока не решил, что, отправившись в Кембриджский университет, он станет выдающейся личностью. Поскольку никто его там не знал, он смог начать заново. Вот почему все мы знали его оживлённым и общительным, готовым поделиться множеством историй — и обычно с дерзкой улыбкой.

Вскоре он приобрёл славу человека гениального, но довольно неорганизованного. Один из его рассказов таков: когда он собирался защищать диссертацию в Кембридже, декан случайно встретил его на улице и спросил, начал ли он искать работу. Конвей не только этого не делал, но даже признался, что и не думал об этом. Декан сказал ему, что надо написать соответствующее письмо; но Конвей не знал, что писать, и тогда декан не выдержал, вытащил клочок бумаги, случайно при нём оказавшийся (это была задняя сторона конверта), и нацарапал письмо самому себе, которое Конвей должен был лишь подписать. Понятно, что вскоре он получил свою первую должность в Кембриджском университете. Конвей оставался там до 1986 г., когда переехал в Принстон, где и жил с тех пор.

Конвей придерживался правила не быть слишком серьёзным — по крайней мере такое впечатление он очень старался производить. Он преимущественно сидел в факультетской комнате отдыха, где играл в различные игры (предпочитая те, которые изобрёл сам) и как бы попутно создавал глубокие теории, которые часто были связаны с играми (например, теорию чисел как игр) или, как в случае игры Го, начинались с игровой доски. Он соглашался, что некоторые его любимые занятия (например, вычисление для недели) были «недостойны» наиболее серьёзных математиков (контрпримерами были Гаусс и фон Нейман). Конвей говорил: «Мои коллеги в Принстоне думают, что это совсем недостойно их. Они не считают, что что-либо недостойно меня» [Ro, p. 370].

И в то же время в исследовательской работе почти ничто не было выше его, и очень немногие математики, если вообще кто-либо, могли охватить спектр глубоких проблем так, как он. Чтобы разжечь интерес к какой-либо теме, а может быть и просто добавить ей известности, он часто предлагал призы за решение поставленных им задач — множество небольших призов, а некоторые довольно существенные; похоже, он руководствовался чувством, что если я не могу решить задачу, то и другие не смогут иначе как за долгое время. Одна история стала легендарной. Конвей предложил весьма значительный приз за строгое доказательство сходимости найденной им интересной рекурсивной последовательности. Задача была решена за несколько месяцев, а не десятилетий — благодаря искусному сочетанию математической интуиции и мощи суперкомпьютера. Конвей остался честным и заплатил [Seq]; это даже попало в «Нью-Йорк таймс» [NYT].

У меня самого была история, связанная с его призом. Будучи старшекурсником, я часто имел возможность сидеть с ним на одном из его любимых диванов. Однажды он рассказал мне о свойствах одной последовательности, которые он доказал несколько лет назад, но теперь не мог восстановить доказательство. Так что он предложил мне 10 долларов, если я смогу это сделать. Разумеется, я принял вызов, и через несколько дней я гордо вернулся с несколькими страницами тщательно проработанного доказательства, содержащего подробно проведённую двойную индукцию. Он улыбнулся, сделал с моими листочками то, что он всегда делает с бумагами (немедленно их теряет) и вручил мне пять долларов, наблюдая мою реакцию. Что я должен был сказать, молодой студент, знаменитому Конвею, который обещал мне вдвое больше? Я чувствовал себя пешкой в его игре. Оказалось, что он вполне понимал моё затруднение и на некоторое время меня в нём оставил, а затем сказал, что он параллельно тоже думал об этой задаче и нашёл решение, так что мы должны разделить приз. Излишне говорить, что его решение было изящным, игнорировало всякие подробности и заменило мою тщательную двойную индукцию треугольниками, которые он нарисовал в воздухе. Другие получали от него более крупные награды за более значительные задачи, но я был горд *разделить с ним приз* за задачу, им же поставленную!

Конвей интересовался многими вещами, включая языки и историю. Тут тоже возникали остроумные наблюдения. Один из его любимых рассказов был о том, что он был на расстоянии лишь двух рукопожатий от Кантора и четырёх — от Гаусса: как докладчик на конференции в честь Кантора, он встретил престарелую женщину, которая в детстве пожала руку Кантору. Сам Кантор был другом Дедекинда, последнего ученика Гаусса. Разумеется, Конвей затем предлагал своим очередным слушателям пожать ему руку, чтобы в результате оказаться всего лишь в пяти рукопожатиях от Гаусса.

Дорогие читатели! Когда мы встретимся лично, я смогу предложить вам расстояние в шесть рукопожатий до Гаусса и в два до Конвея[2)].

Одно из любимых высказываний Конвея состояло в том, что его единственный недостаток — скромность; если бы он не был так скромен, он был бы совершенен. (Да, он любил шутки над собой, а также противоречия. Удачный и забавный пример: его последняя опубликованная статья — «московская статья» [C-M], на самом деле написанная десятилетиями раньше, полная противоречивых ссылок на себя и тем не менее серьёзная[3)].) Конвей любил шутить, что он может потратить сто часов за час, поскольку может говорить с 99 людьми. Он действительно любил говорить с людьми — один на один со студентом или с большой аудиторией профессионалов, и его беседы были замечательны. Ни он, ни его слушатели никогда не ощущали это время потраченным впустую. Обычно его выступления были великолепно подготовлены, и иногда он предоставлял аудитории выбрать тему его выступления, часто путём голосования. В его мозгу готовилось много вариантов.

Он давал легендарные лекции для математической аудитории самого высокого уровня, путешествуя по всему земному шару в роли просветителя[4)]. Но столь же легендарно было его постоянное стремление

[2)] Я слушал рассказ Конвея о рукопожатиях несколько раз и, разумеется, охотно пожимал ему руку; но, разбираясь в этом сейчас, удивлён, почему путь не оказывается короче: сам Конвей отмечал, что у него был второй контакт с Кантором через Бертрана Рассела [Ro, p. 45], который должен был встречаться с Дедекиндом на Первом международном конгрессе математиков в 1900 г. Так что, по всей видимости, я могу предложить вам пять рукопожатий до Гаусса... (истинно, но недоказуемо?). — *Прим. автора.*

[3)] См. наст. сб., с. 88–96.

[4)] В подлиннике «jet-set» like, что имеет близкий смысл.

заниматься со школьниками и школьными учителями. Даже в далёкие 1980-е годы он вёл летние занятия для учителей средней школы совместно с филдсовским лауреатом Уильямом Тёрстоном и другими. И много раз проводил недели в летних лагерях для одарённых старшеклассников — в США, Канаде и Европе. В течение последних десяти лет он семь раз приезжал на мероприятия во Франции (Лион) и Германии (Бремен), где я был в числе организаторов, — в частности, на летние школы «Modern Mathematics», вдохновлённые примером летних школ «Современная математика» в Дубне. Конвей был единственным преподавателем, который участвовал в такой школе с первого до последнего дня, и он делал так каждый раз; а по случаю мог провести ещё несколько дней в местном школьном лагере «на природе». У него было лишь несколько лекций, подготовленных специально для школьников. При этом он приходил на выступления коллег и задавал вопросы, показывавшие, как хорошо он осведомлён во всех областях математики. Допоздна он общался с толпой восхищённых слушателей, когда все организаторы уже давно спали. А рано утром, когда его вечерние слушатели ещё не проснулись, он уже завтракал с «утренней сменой» учеников. Так и шло день за днём, независимо от часовых поясов.

Конвей говорил о своих математических открытиях или делился советами, как достичь успеха: он всегда держал в воздухе четыре или пять мячей — разные математические темы различного уровня. Одна из них могла быть большой математической проблемой, которая в случае решения сделала бы его знаменитым (всю жизнь он почему-то продолжал думать, что бы могло сделать его знаменитым). Другие «мячи» были, по очереди, проектами всё менее честолюбивыми, но более исполнимыми, так что последний мог оказаться рутинным добавлением к предыдущей задаче и требовать лишь времени. Таким образом, увязнув в одной из главных проблем, Конвей всё же мог достичь полезных результатов в другой задаче, избежав чувства неудовлетворённости и дав отдохнуть своему мозгу, пока он не был готов к новой атаке на главные проблемы. (Кто сказал, что Конвей неорганизован?)

Последней публикацией Конвея, появившейся как раз перед его кончиной, была его «московская статья» [C-M], которая десятилетиями существовала лишь в рукописи[5].

[5] См. наст. сб., с. 88–96. По сообщению М. С. Патерсона Д. Шляйхеру, статья написана во время Международного конгресса математиков в Москве в 1966 г.: «[включение Москвы в соавторы] — причуда необычного ума Джона… Участие Москвы состояло в том, что… работа над этой задачей, помимо нашего нормального графика, потребовала времени на конгрессе и в транспорте».

(Я получил экземпляр этой статьи, когда посетил Конвея в Принстоне: он больше не имел там офиса и не решался посещать комнату отдыха, чувствуя, что это было бы неуместно, но под подушкой своего дивана он хранил некоторые важные материалы, и мне было позволено сделать копию статьи и подготовить её к публикации.) Статья появилась в печати в апреле 2020 г., как раз перед смертью Конвея, но достаточно рано, чтобы я смог позвонить ему и сообщить, что статья теперь опубликована. Он был очень счастлив услышать эту новость и рассказал мне (ещё раз), как эта статья появилась. Затем мы обсудили ещё одну статью, которую он очень хотел увидеть опубликованной в определённом виде, согласно его определённым пожеланиям. Позже я узнал, что, сделав этот звонок, я стал последним математиком, который говорил с Конвеем.

Позвольте мне закончить двумя материалами, которые я нашёл в интернете. Один появился в блоге, где люди делятся лучшим, что сделали за последний месяц. Неудивительно, что там много записей такого рода: «Я примерно удвоил мой месячный доход», «Помог жене при родах», «Пробежал милю за 6:40» или «Я сделал предложение мечте моей жизни, и она ответила да». Среди всего этого было и такое сообщение: «Я старшеклассник…встретил Джона Конвея в летней школе, и… написал с ним совместную статью». Эта запись цитировалась чаще всех и вызывала наибольшую зависть.

Другой материал, найденный в сети, заставляет вспомнить знаменитую игру Конвея «Жизнь». В нём спрашивалось: «…если трое из нас встанут вокруг пустого квадрата, вернётся ли Конвей к нам?» Мне нравится дух этой записи, и в некотором смысле она совершенно верна. Конвей останется с нами всю жизнь как источник вдохновения и удивления, как математик, как друг.

Благодарности

Прежде всего и больше всего я хотел бы поблагодарить Джона за множество замечательных воспоминаний и полученное от него вдохновение — по многим поводам, в течение многих лет. Я очень признателен многочисленным друзьям и коллегам за их помощь и за отзывы на эту статью. Среди них Манджул Бхаргава, Диана Конвей, Йенс Хорнбостель, Виктор Клепцын, Вильфрид Курт, Марсель Оливер, Шевон Робертс, Алекс Рыба, Петер Шупп, Михаэль Штолль и Сергей Табачников.

Дополнение А. Алгоритм судного дня для определения дня недели

Сверхбыстрый метод Конвея для вычисления дня недели по любой дате григорианского календаря включает две части: (1) вычисление «судного дня» в данном году и (2) определение дня недели в году, для которого известен судный день.

Часть (2) легче и обычно полезнее. Чаще всего нам требуется знать день недели в текущем году или, может быть, в следующем. Так что с этого и начнём. По определению «судный день» в данном году — это нулевой день марта (последний день февраля), а также любая дата, которая приходится на тот же день недели. Основное открытие Конвея в том, что все нижеперечисленные даты являются «судными днями»:

$$4/4,\ 6/6,\ 8/8,\ 10/10,\ 12/12,$$
$$5/9,\ 9/5,\ 7/11,\ 11/7,$$

т. е. последний день февраля приходится на тот же день недели, что и 4 апреля, 12 декабря, 5 сентября, 9 мая и так далее. Отметим приятную симметрию: даже при том, что в одних странах 5/9 означает 5 сентября, а в других 9 мая, обе даты являются «судными днями», так что в обоих вариантах обозначения годятся для всех «судных дней».

Этот список, вместе с 0 марта, легко запоминается, особенно для чётных месяцев. Что касается нечётных, то Конвей замечает, что «многие люди работают с 9 до 5», а в США хорошо известна сеть магазинов шаговой доступности 7/11.

Как же это работает на практике? В 2021 г. «судный день» приходится на воскресенье. Так что если вы хотите узнать, на какой день недели приходится, скажем, 26 декабря — день рождения Конвея, то вы вспоминаете «судный день» 12/12. День рождения Конвея на 14 дней позже: неудивительно, что Конвей родился в «судный день»; в 2021 г. он приходится на воскресенье. Нахожу примечательным, что день его смерти — тоже «судный день», 11 апреля (4/4 плюс одна неделя), в некотором смысле «его личный судный день».

Описанное хорошо подходит для апреля и последующих месяцев. В марте нулевое число — по определению «судный день», и таков же День числа пи, 14 марта. Январь и февраль — случай потруднее, так как тут имеет значение, год високосный или нет. Случай февраля ещё довольно лёгок: последний день «судный», и можно отсчитывать назад. Для января я использую другой приём, чем у Конвея: чтобы не возиться с високосом, присоединяю январь к предыдущему году и помню в качестве «судного дня» 2 января (обычно в начале года ещё остаётся привычка использовать прежний «судный день»).

Позвольте отметить здесь маленький трюк, которому Конвей давно научил меня: если надо определить день недели для даты вроде 27 апреля, *не* вычитайте 21 день (3 недели), чтобы попасть на 6 апреля, «судный день» + 2; *вместо этого* найдите ближайший «судный день», в данном случае $4 + 21 = 25$ апреля, а *затем* добавьте оставшиеся два дня. Результат, разумеется, тот же, но можно со временем привыкнуть к тому, что 25 апреля — тоже «судный день», и таким образом помнить больше таких дней.

Остаётся часть (1) — вычисление «судного дня» для любого данного года. Система високосных годов периодична с периодом в 400 лет и, к счастью, количество дней в 400 годах делится на 7, так что «судные дни» повторяются каждые 400 лет.

Нужно разделить вклад столетия и вклад года внутри столетия; последний равен некоторому числу $y \in \{0, \dots, 99\}$. Чтобы вычислить первый, рассмотрим следующий список «судных дней» («опорных дней» столетия):

- в 1900 году — среда;
- в 2000 году — вторник;
- в 2100 году — воскресенье;
- в 2200 году — пятница;

так как «судные дни» повторяются каждые 400 лет, этот список годится для всех столетий (а для практических целей достаточно помнить первые две позиции).

Чтобы найти «судный день» в году y данного столетия, положим

$$y = 12a + b,$$

где $b \in \{0, \dots, 11\}$, и пусть $c := \lfloor b/4 \rfloor$. Вычислим $d := a + b + c$; «судный день» в году y будет через d дней после опорного дня столетия.

Проделаем это на двух примерах. В 2021 г. имеем $a = 1$, $b = 9$ и $c = 2$, откуда $d = 1 + 9 + 2 = 12 \equiv -2 \pmod 7$, так что «судный день» бывает за два дня до опорного дня столетия, т. е. в воскресенье, как и заявлено выше. Поскольку «судный день» сдвигается вперёд на один день в год (на два дня при переходе к високосному году), в 2020 г. «судный день» приходился на субботу, и в этот день недели умер Конвей.

Он родился в последний «судный день» 1937 года: для этого года $a = 3$, $b = 1$, $c = 0$, откуда $d = 4$ и «судный день» был через четыре дня после опорного дня столетия (среды), т. е. в воскресенье (Sunday): так что Конвей был Sunday child — счастливчик.

Дополнение В. Вычисление фазы луны

Дни недели — изобретение человека, и довольно удивительно, что для них есть столь простая схема, найденная Конвеем. А фазы луны приходят из Физики, со всевозможными осцилляциями и вариациями, и почему вообще для них должна существовать простая схема? Но она существует — чуть более сложная, но всё же достаточно простая для вычислений в уме. Запишем интересующую нас дату так: день DD, месяц MM, год в пределах столетия YY (0–99), столетие CC. Мы хотим вычислить «возраст» луны, т. е. (примерное) количество дней от последнего новолуния, помня, что период между новолуниями равен примерно 29,5 дням. Для каждой из четырёх компонент даты мы вычислим некий индекс, затем сложим эти четыре индекса, и сумма будет равна возрасту луны на эту дату.

(1) Индекс дня определяется просто: достаточно взять DD (возраст луны увеличивается на 1 каждый день).

(2) Для m-го месяца индекс равен m-му числу в последовательности

$$3, 4, \quad 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12;$$

иначе говоря, используется просто номер месяца, но для января и февраля нужно ещё добавить 2 (из-за того, что февраль короче, чем лунный цикл).

(3) Для столетия индекс нужно помнить (всё же это числа экспериментальные, и периодичности в них нет). Ограничимся двумя столетиями, которые интересуют большинство из нас — двадцатым и двадцать первым.

Для двадцатого столетия индекс равен −4, а для двадцать первого 21.

(4) Последний индекс, который нужно вычислить, относится к году, и это единственная сложная часть. Взяв $YY \in \{0, \ldots, 99\}$, вычислим его вычет по модулю 19. Этот вычет можно единственным образом записать как число из списка $\{-9, -8, \ldots, 0, \ldots, 8, 9\}$. Обозначим его $+R$ или $-R$, где R — десятичная цифра. Далее, пусть T — остаток от деления R на 3, записанный как 0, 1 или 2. Тогда индекс года записывается как $+TR$ или $-TR$, где знак взят от R.

Пример для $YY = 21$: вычет по модулю 19 равен $+R = +2$, откуда $T = 2$ и мы получаем индекс $+22$.

Пример для $YY = 37$: вычет по модулю 19 равен $-R = -1$, откуда $T = 1$ и мы получаем индекс -11.

Вычислим теперь фазу луны для дня рождения Джона Конвея, 26 декабря 1937. Индексы дня и месяца равны 26 и 12, а индекс года 37 равен −11, как мы только что вычислили. Вспомнив, что индекс двадцатого столетия составляет -4, получаем полный индекс $26+12-11-4=23=$ $=29{,}5-6.5$, так что мы находим, что Конвей родился «за шесть с половиной дней» до следующего новолуния. И действительно, новолуние пришлось на Новый год, шестью днями позже.

В качестве другого примера возьмём День числа пи в 2021 году, т. е. 14 марта 2021 г. Здесь индексы дня, месяца, года и столетия равны $14+3+$ $+22+21=60$. Учитывая, что лунный цикл составляет 29.5 дней, получаем $60=2\cdot 29{,}5+1$, т. е. День числа пи приходится на следующий день после новолуния. Проверьте по календарю — мы попали в точку!

На практике можно запомнить индексы года и столетия, и тогда фаза луны вычисляется очень просто. Например, в 2021 году всегда нужно брать «день + индекс месяца + 13,5».

Разумеется, нельзя ожидать совершенной точности от такого способа, но качество полученной оценки обычно впечатляет. Эвристические константы можно слегка улучшить (например, для мая и сентября константы 4,5 и 9,5 лучше, чем 5 и 9), но, разумеется, Физика слишком сложна, чтобы надеяться на более точные результаты; подробности см. в [WW, Chapter 24].

Последнее замечание: константы вычислены для начала дня. Если вы вычисляете возраст луны, глядя на неё поздно ночью, то вы гораздо ближе к началу следующего дня, так что можно было бы к дате добавить 1.

Последний вопрос: почему луна подчиняется столь безумной формуле?

Дополнение C. Игра «Жизнь»

Игра «Жизнь» происходит на бесконечной прямоугольной решётке (следовало бы сказать, что она «живёт» на такой решётке). Каждая клетка либо мёртвая, либо живая, причём живые клетки обычно помечены, а мёртвые пусты, как показано на рис. 1.

В такой решётке у каждой клетки ровно восемь соседей (по горизонтали, по вертикали и по диагонали), как показано на рис. 2 слева. Правила игры очень просты:

- живая клетка выживет в следующем поколении, если среди её восьми соседей два или три живых;
- мёртвая клетка оживёт, если у неё ровно три живых соседа из восьми.

Равносильная формулировка выглядит так: посчитаем для произвольной клетки количество живых среди её соседей *с учётом её самой*; тогда клетка будет живой в следующем поколении, если посчитано ровно три живых клетки, а если посчитано четыре, то её статус не изменится; во всех остальных случаях клетка в следующем поколении будет мёртвой.

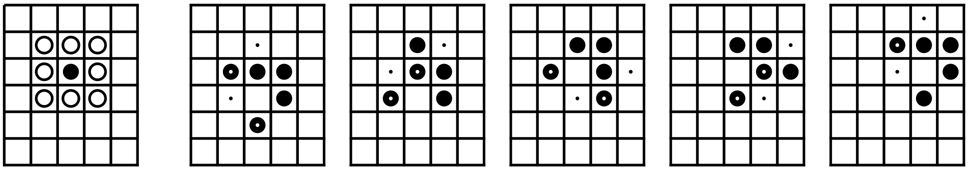

Рис. 2. Игра «Жизнь». Живые клетки помечены сплошными кружочками, мёртвые клетки пусты. Слева: восемь соседей живой клетки помечены кружочками. Вторая конфигурация слева: пять клеток образуют «планер»; четыре его итерации показаны на последующих конфигурациях. (Маленькие чёрные и белые точки показывают, будет жить или нет данная клетка в следующем поколении

Пример развития игры демонстрируется на рис. 2, начиная со второй конфигурации слева: показана начальная конфигурация из пяти живых клеток и четыре её последовательных образа при развитии игры. В каждой конфигурации маленькая чёрная или белая точка указывает статус данной клетки на следующем шаге, чтобы проще было отследить развитие игры. Конкретная конфигурация, показанная здесь, называется «планер» или «глайдер»: она повторяется через четыре поколения со сдвигом на одну клетку вправо вверх («скользит на северо-восток с четвертью скорости света»).

Конвей очень рано поставил вопрос, существуют ли ограниченные конфигурации, которые со временем растут неограниченно. Билл Госпер решил этот вопрос утвердительно в 1970 г., открыв «планерное ружьё», показанное на рис. 1: оно «выстреливает» планер через каждые 30 поколений. Разумеется, гораздо принципиальнее вопрос о полноте по Тьюрингу, и он также решён положительно, что подтвердило юношескую мечту Конвея.

Дополнение D. Игры и числа

В этом Дополнении мы добавим некоторые подробности к конвеевской теории игр и чисел. Примером игры послужит *хакенбуш* (*рубка зарослей*): в его конечном варианте используется конечный граф, возможно несвязный, в котором каждое ребро окрашено в синий, красный или зелёный цвет. Каждая компонента имеет одну или несколько вершин, которые считаются «заземлёнными». Ход состоит в удалении одного из рёбер графа; любые другие рёбра, которые после этого не заземлены (т. е. не соединены с отмеченными вершинами), также удаляются. Смысл окраски в том, что синие (b**L**ue) рёбра могут быть удалены только Левыми (**L**eft), красные (**R**ed) — только Правыми (**R**ight), а зелёные (gr**EE**n) — любым игроком (**E**ither). Игроки ходят по очереди, и как всегда проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Играть в хакенбуш на самом деле очень занятно.

Эта игра удачно иллюстрирует понятие сложения игр: чтобы сделать ход, игроки выбирают компоненту, в которой удаляется ребро, а остальные компоненты остаются без изменения, так что различные компоненты графа образуют естественные слагаемые этой игры. Чтобы из игры G получить противоположную игру $-G$, нужно просто поменять местами красный и синий цвет.

Напомним, что игра H называется *нулевой*, если выигрышная стратегия всегда есть у того, кто не начинает. Докажем важную лемму, которая обосновывает термин «нулевая игра»: прибавление нулевой игры не меняет исход игры.

Лемма (сложение с нулём). *Пусть G — любая игра, H — игра, в которой всегда выигрывает второй игрок. Тогда в сумме $G+H$ выигрывает тот же игрок, что и в игре G.*

Доказательство. Пусть у меня есть выигрышная стратегия в игре G. Играя в сумму $G+H$, я буду всегда делать ход в игре G, пока мой противник не сделает ход в игре H. Тогда я тоже сделаю ход в игре H.

Таким образом, я играю в H только в ответ на ход моего противника, и тем самым я оказываюсь вторым игроком в этой игре. Значит, у меня есть выигрышная стратегия для H и я никогда первым не перестану делать ходы в этой игре (по условию, H — нулевая игра). Что касается ходов в игре G, я просто следую выигрышной стратегии, которая у меня есть по предположению, так что здесь я тоже не окажусь без хода. В итоге именно я сделаю последний ход и, значит, выиграю. $\square$

В нашем формальном определении игр мы не уточнили смысл слова «выиграть», а также, что игроки должны ходить по очереди. Важно понимать, что в любой игре возможные ходы каждого игрока должны быть определены в любой ситуации, независимо от того, кто сделал предыдущий ход: заметим, что даже если в игре $G+H$ игроки ходят по очереди, вполне может оказаться, что в каждом из слагаемых G и H игрок ходит несколько раз подряд.

Исход игры может зависеть от того, кто из игроков делает первый ход. Ясно, что по своему исходу каждая игра принадлежит одному из следующих четырёх классов:

- игра G называется положительной ($G > 0$), если Левые всегда выигрывают независимо от того, какой игрок начинает;
- игра G называется отрицательной ($G < 0$), если Правые всегда выигрывают независимо от того, какой игрок начинает;

- игра G считается равной нулю ($G=0$), если всегда выигрывает второй игрок;
- игра G называется нечёткой ($G \mid 0$), если всегда выигрывает первый игрок.

Можно создавать обычные комбинации: например, $G \geqslant 0$, если либо $G = 0$, либо $G > 0$, т. е. Левые выигрывают по крайней мере когда ходят вторыми. Здесь появляются формальные определения, которые уточняют данные ранее неформальные (см. с. 42).

Уточним определение (3). Пусть дана игра $G = (L, R)$. Положим $G \geqslant 0$, если нет такого элемента $G^R \in R$, что $G^R \leqslant 0$, и положим $G \leqslant 0$, если нет такого элемента $G^L \in L$, что $G^L \geqslant 0$.

Это определение означает, что Левые имеют выигрышную стратегию в качестве второго игрока в случае, если у Правых нет хорошего первого хода G^R, после которого они выигрывают в качестве второго игрока (после хода Правых первый ход в игре G^R делают Левые).

Замечательно, насколько экономно сказано в этом определении и о выигрыше, и об очерёдности ходов. Далее можно определить отношения вида $G = H$ формулой $G - H = G + (-H) = 0$, а также определить $G \geqslant H$ формулой $G - H \geqslant 0$ и положить $G > H$, если $G \geqslant H$, но не $G = H$.

Мы можем наконец дать точное определение числа.

(4) Мы говорим, что игра $x = (L, R)$ есть *число*, если все элементы x^L из L и все элементы x^R из R удовлетворяют неравенствам $x^L < x < x^R$, причём все элементы из L и R являются числами.

Это определение, как обычно, рекурсивно. Пустая игра ($L = R = \{\,\}$) является числом, так как в множествах L и R нет элементов, которые могли бы нарушить нужное условие; это Нулевая игра. В следующей по простоте игре будет $L = \{0\}$ и $R = \{\,\}$ (это хакенбуш с единственным синим ребром; ход единственный и только у Левых). Эта игра называется 1 (у синих преимущество в один ход). Левые заведомо выигрывают, кто бы ни начинал, так что это простейшая положительная игра и мы доказали, что $1 > 0$. Это неравенство показывает, что 1 является числом. Противоположное ему число — игра -1, где $L = \{\,\}$ и $R = \{0\}$.

Следующей надо рассмотреть игру, которая обозначается $\star$. В ней $L = R = \{0\}$. Здесь один возможный ход (единственное зелёное ребро в хакенбуше), его сделает начинающий и выиграет. Таким образом, эта игра — нечёткая. Если $\star$ хочет быть числом, нужно выполнить условие $0 < \star < 0$, что невозможно: таким образом, $\star$ — простейшая игра, не являющаяся числом.

Прежде чем перейти к умножению, нужно сделать замечание об обозначениях. Наше определение игры как «пары множеств» $G = (L, R)$ математически точно, но Конвей счёл бы его «скучным»[6]. Для Конвея игра — это новый вид множеств с двумя сортами элементов, одним в L и одним в R (они представляют разрешённые ходы Левых и Правых). Конвей заключает множество всех этих элементов в фигурные скобки с чертой посредине, разделяющей ходы Левых и Правых. Например, вместо того чтобы писать $\star = (\{0\}, \{0\})$, он применяет гораздо более удобную запись $\star = \{0 \,|\, 0\}$. (Конвей считает недостатком теории множеств, что множества обычно могут содержать лишь один сорт элементов, а не два.) Затем Конвей упрощает обозначения, перечисляя лишь «типичные» элементы: так, $G = \{G^L \mid G^R\}$ не означает, что G содержит лишь по одному варианту хода для Левых и Правых, но что G^L и G^R являются представителями таких вариантов. Можно было бы записать $G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots \mid G_1^R, G_2^R, \ldots\}$, но это подразумевает, что множества возможных ходов для Левых и Правых счётны, чего Конвей отнюдь не имел в виду (множества L и R могут иметь любую мощность, например для ординалов, как описано ниже).

Конвей ввёл очень естественное определение умножения чисел, а именно: если $x = \{x^L \mid x^R\}$ и $y = \{y^L \mid y^R\}$ — два числа, то определим их произведение как

$$x \cdot y := \big\{x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L \cdot y^L,\ x^R \cdot y + x \cdot y^R - x^R \cdot y^R \,|\, x^L \cdot y + x \cdot y^R - x^L \cdot y^R,\\ x^R \cdot y + x \cdot y^L - x^R \cdot y^L\big\}.$$

Разумеется, это определение рекурсивное, как обычно, но оно требует некоторого пояснения, а также мотивировки. Прежде всего, x^L и т. д. означают типичные варианты ходов, так что $x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L y^L$ обозначает «типичный вариант для Левых» в произведении (всего их два): здесь нужно выписать все числа, которые можно образовать из x и y, и любую пару их вариантов для Левых.

Почему такое определение естественно? Исходя из неравенств $x^L < x < x^R$ и $y^L < y < y^R$, мы получаем при умножении, например, неравенство $0 < (x - x^L) \cdot (y - y^L)$, откуда $x \cdot y^L + x^L \cdot y - x^L \cdot y^L < x \cdot y$. Таким образом, числа вроде $x \cdot y^L + x^L \cdot y - x^L \cdot y^L$ — естественные кандидаты на роль вариантов ходов Левых в произведении; определение в самом деле «работает» (Конвей нашёл его лишь с большим трудом, исследовав множество возможностей в твёрдой уверенности, что должно существовать простое определение). Разумеется, есть также рекурсивные определения деления (достаточно определить $1/x$), квадратного корня и т. д. (для всех чисел, включая ординалы!), но здесь мы их опустим; см., например, [NG, SSt].

[6] Pedestrian.

Конвей доказывает, что при таком определении числа удовлетворяют аксиомам ПОЛЯ (учтём, что к числам относятся ординалы, так что они не составляют множество). Причина, почему не любые игры можно перемножать, состоит в том, что существуют три игры G, H, K, для которых $G = H$ (по определению это значит, что $G - H = 0$), но не выполнено равенство $G \cdot K = H \cdot K$. Для чисел эта проблема не возникает.

Закончим это Дополнение несколькими примерами чисел — разной степени неожиданности; см. рис. 3. Понятно, что в играх 1 и −1 есть

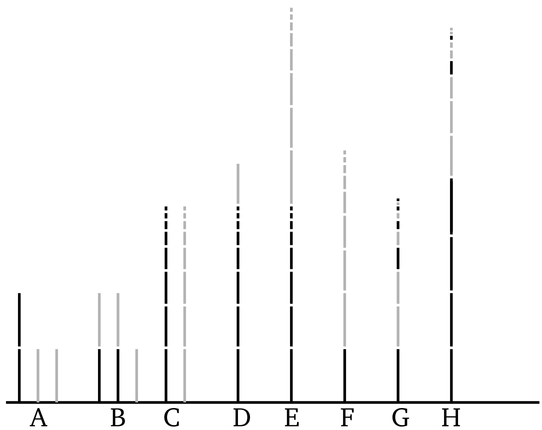

Рис. 3. Несколько сине-красных хакенбушей (синие рёбра показаны как чёрные, красные как серые).

A: доказательство, что $1+1=2$. Точнее, сумма этих трёх игр равна нулю (выигрывает второй игрок), поэтому первая строка сама по себе имеет значение +2.

B: доказательство, что красное ребро над синим предоставляет синим преимущество ровно в 1/2 хода.

C: даже бесконечные деревья могут быть вполне корректно определёнными играми. Сумма синего и красного бесконечных деревьев — это игра, в которой первый игрок выбирает произвольное натуральное число, затем второй игрок делает то же, и выигрывает большее число. Очевидна победа второго игрока, откуда $\omega - \omega = 0$.

D: положительная игра со значением на 1 меньше, чем ω: это игра $\omega - 1$ (для доказательства добавим игры $-\omega$ и $+1$, получая нулевую игру).

E: это игра $\omega/2$ (преимущество ровно вдвое меньше, чем в игре ω; легко доказывается практически).

F: эта игра ε удовлетворяет условию $\omega \cdot \varepsilon = 1$ и потому имеет значение $1/\omega$ (бесконечно малая игра — положительная, но меньше любого положительного действительного числа; доказательство использует формулу, определяющую умножение).

G: игра 1/3 (ещё одна бесконечная игра; красные и синие рёбра чередуются, за исключением начала).

H: эта бесконечная игра предоставляет синим преимущество ровно в π ходов преимущество ровно в один ход соответственно для Левых и для Правых. Хакенбуш, состоящий из двух синих рёбер, предоставляет превосходство в 2 хода для Левых и потому заслуживает названия 2. Но рассмотрим игру x, в которой красное ребро находится над синим. Легко убедиться практически, что $x + x - 1 = 0$ (в этой сумме трёх игр выигрышная стратегия есть у второго игрока), так что имеет смысл сказать, что x предоставляет Левым преимущество ровно в пол-хода. На рис. 3 мы приводим несколько примеров сине-красных хакенбушей и их значений, предоставляя читателю проверить, что значения именно таковы. А также проверить, что все сине-красные графы хакенбуша (без зелёных рёбер) определяют числа. И найти закономерность для бесконечных последовательностей красно-синих рёбер хакенбуша.

Бесконечные строки хакенбуша иногда преподносят приятные сюрпризы. Они кодируют не только все действительные числа, но и неплохой набор бесконечно больших и бесконечно малых чисел, как показано на рисунке. Например, если ω обозначает наименьший бесконечный ординал (кодирующий игру, где множество ходов Левых — в точности все натуральные числа), то появляются лёгкие игры $\omega+1$ (для Левых на один ход лучше, чем бесконечно много ходов) и $\omega-1$. Столь же легко описать в виде игр числа $\omega/2$ и $\sqrt{\omega}$. А для подходящего числа $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $\omega \cdot \varepsilon = 1$.

Всё это — не что иное, как начало огромного ПОЛЯ, состоящего из чисел и других игр. В заключение рассмотрим одну из наших любимых игр $\uparrow$, где $L=\{0\}$ и $R=\star$, или кратко $\uparrow=\{0\,|\,\star\}$: ясно, что выигрывают Левые, так что $\uparrow>0$, но можно показать без чрезмерных усилий, что $0<\uparrow<x$ для любого положительного числа x — несмотря на то, что существует очень много бесконечно малых положительных чисел, например ε и все его степени (и много ещё гораздо меньших чисел, включая обратные ко всем ординалам!).

Мы просто не сможем отказать себе в выводе неравенства $0 < \uparrow < x$: для этого нужно сыграть в некоторые лёгкие игры! Левое неравенство очевидно, а для правого нужно доказать, что $\uparrow - x < 0$ для любого числа $x > 0$, т. е. что в сумме $\uparrow + (-x)$ всегда выигрывают Правые. Проверим это: если начинают Левые, то они могут, например, сделать ход в игре $\uparrow$; их единственный ход ведёт в $0 + (-x) < 0$, и Правые выигрывают. Левые могут сделать ход и в игре x, но он приводит к ситуации, которая для них даже хуже — по определению числа.

Если же начинают Правые, то их выигрышный ход принадлежит игре $\uparrow$ и ведёт в игру $\star + (-x)$, где начинают Левые. Они должны либо в игре $\star$ пойти в $0 + (-x) < 0$, либо в игре x перейти в худшую ситуацию, чем

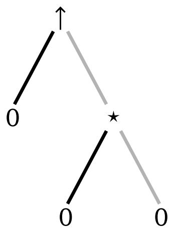

Рис. 4. Дерево удивительной игры ↑. Возможные ходы из каждой позиции — рёбра, идущие вниз: синие (на рисунке чёрные) для Левых и красные (на рисунке серые) для Правых; игра заканчивается, когда достигнута позиция 0

раньше, так что во всех случаях выигрывают Правые, *и этим полностью доказано, что игра ↑ положительна, но меньше любого положительного числа*!

Несколько слов о библиографии по играм и числам: стандартный источник по играм — «Winning Ways» Берлекэмпа, Конвея и Гая [WW]. В четырёх томах содержится неоценимая коллекция разнообразных игр всех сортов. В них также содержится небольшое количество доказательств, нередко неформальных и чаще относящихся к конечным числам и играм. Очень неплохое введение в предмет составляет статья Конвея [C-G]. Формальный источник по числам — «On Numbers and Games» Конвея [NG]. Однако этот текст написан очень плотно, и даже по его второму изданию видно, что он был создан всего за две недели. Другой известный источник — «Сюрреальные числа» Дональда Кнута [K], уникальное сочетание математического повествования с преданием в библейском духе. Однако оказалось трудно найти строгий и притом доступный текст на эту тему, так что мы попытались восполнить это в [SSt].

Дополнение E. Фатбол

В заключение опишем простую занимательную игру — одну из любимых игр Конвея, которая им самим придумана и доставляет большое удовольствие игрокам: это *фатбол* (сокращение от «философский футбол»). В него играют на доске для Го с одним чёрным камнем («мячом») и набором белых камней. Каждый игрок хочет попасть мячом на базовую линию вблизи противника или за эту линию. В начале игры доска пуста, лишь в центре лежит мяч. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок имеет два варианта хода: либо поставить один белый камень в любой пустой пункт, либо «перепрыгнуть» мячом по горизонтали, вертикали или диагонали через сплошной прямой ряд белых камней, непосредственно примыкающий к мячу. Сразу после прыжка эти камни удаляются. Если после прыжка и удаления камней мяч может прыгнуть из новой позиции, тот же игрок вправе это немедленно сделать и повторить столько раз, сколько будет возможно (при этом допускаются ходы зигзагом). Вы выигрываете, достигнув базовой линии противника или перепрыгнув её. Но имейте в виду, что если вы можете достичь базовой линии совсем близко от противника и должны там остановиться, вы выиграете очень мало: последует ход противника, и он сможет передвинуть мяч в противоположном направлении. Эта игра полна движения и неожиданностей! Она реализована на различных вебсайтах, например `philosophers.football`.

Список литературы

[C-F] *Conway J. H.* FRACTRAN: a simple universal programming language for arithmetic (первая публикация в 1972 г.) // *Lagarias J. C.* (ed.), The ultimate challenge. The $3x+1$ problem. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010. P. 249–264.

[K] *Knuth D. E.* Surreal Numbers. Reading, Mass.: Addison–Wesley Publishing Company, 1974. (Рус. пер.: *Кнут Д. Э.* Сюрреальные числа. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014.)

[NG] *Conway J. H.* On numbers and games (первая публикация в 1976 г.) / 2nd ed. Natick, MA: A K Peters, 2001.

[C-M] *Conway J. H., Paterson M. S., Moscow* (*USSR*) A headache-causing problem (написано в 1977) // Amer. Math. Monthly. 2020. V. 127, № 4. P. 291–296. (Рус. пер.: *Конвей Дж. Х., Патерсон М. С., Москва* (*СССР*). Каверзная задача // Настоящий сборник. С. 88–96.)

[C-G] *Conway J. H.* All games bright and beautiful // Amer. Math. Monthly. 1977. V. 84, № 6. P. 417–434. (Рус. пер.: *Конвей Дж. Х.* Игры разнообразные, яркие и красивые // Настоящий сборник. С. 97–121.)

[CN] *Conway J. H., Norton S. P.* Monstrous moonshine // Bull. Lond. Math. Soc. 1979. V. 11, № 3. P. 308–339.

[WW] *Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K.* Winning ways for your mathematical plays; 4 volumes (первая публикация в 1982) / 2nd ed. Natick, MA: A K Peters, 2004.

[C-W] *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* ATLAS of finite groups. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups. With comput. assist. from J. G. Thackray. Oxford: Clarendon Press, 1985. xxxiii+252 pp.

[CS] *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere packings, lattices, and groups (первая публикация в 1988) / 3rd ed. With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov. New York, NY: Springer (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; V. 290). lxxiv+703 pp. (Рус. пер. первого издания: *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решётки и группы. В 2 т. М.: Мир, 1990.)

[NYT] *Browne M. W.* Intellectual Duel: Brash Challenge, Swift Response // The New York Times. Aug. 30, 1988.

[Seq] *Mallows C. L.* Conway's challenge sequence // Amer. Math. Monthly. 1991. V. 98, № 1. P. 5–20.

[CK1] *Conway J., Kochen S.* The free will theorem // Found. Phys. 2006. V. 36, № 10. P. 1441–1473.

[SSt] *Schleicher D., Stoll M.* An introduction to Conway's games and numbers // Mosc. Math. J. 2006. V. 6, № 2. P. 359–388.

[CK2] *Conway J., Kochen S.* The strong free will theorem // Notices AMS. 2009. V. 56, № 2. P. 226–232.

[C-A] *Conway J. H.* On unsettleable arithmetical problems // Amer. Math. Monthly. 2013. V. 120, № 3. P. 192–198. (Рус. пер.: *Конвей Дж. Х.* О независимых арифметических утверждениях // Настоящий сборник. С. 122–132.)

[CI] *Schleicher D.* Interview with John Conway // Notices AMS. 2013. V. 60, № 5. P. 567–575. (Рус. пер.: *Шляйхер Д.* Интервью с Джоном Хортоном Конвеем // Настоящий сборник. С. 69–87.)

[Ro] *Roberts S.* Genius at play. The curious mind of John Horton Conway. New York: Bloomsbury Press, 2015. xxiv+454 pp.

Замечание. Большинство наших воспоминаний о Конвее основано на многочисленных разговорах с ним в течение десятилетий. Естественно, многие из них и очень многие другие присутствуют в замечательной книге, написанной Ш. Робертс. В некоторых местах мы явно ссылались на эту книгу, особенно когда нам были известны дополнительные подробности и пояснения. Но, несомненно, эта биография представляет собой столь блестящее исследование, что трудно добавить что-либо значимое о Конвее, не присутствующее там, хотя иногда в другом виде, что также интересно (Робертс отмечает и противоречия). Поэтому мы не стали рассыпать по всему тексту ссылки на эту книгу.

Дирк Шляйхер, университет Экс-Марсель
dierk.schleicher@univ-amu.fr