От редакции

Публикуемая ниже статья — яркое и характерное для Конвея сочетание серьёзной математики и игры. См. на с. 53 в статье Д. Шляйхера о Конвее: «…„московская статья“… полная противоречивых ссылок на себя и тем не менее серьёзная».

Парадоксален уже список авторов, в который включена Москва — место создания статьи. Об этом говорится в примечании к статье Д. Шляйхера на с. 54: «Участие Москвы состояло в том, что… работа над этой задачей… потребовала времени на конгрессе [математиков в Москве] и в транспорте».

В подлиннике библиография статьи состоит из неё самой. Соответственно в переводе библиография состоит из него самого.

Каверзная задача*

Дж. Х. Конвей, М. С. Патерсон, Москва (СССР)

Мы опровергаем знаменитую теорему Конвея — Патерсона — Москвы [CPM], а затем доказываем эту теорему и применяем её к общеизвестной теоретико-числовой проблеме.

Постановка задачи

В комнате, показанной на рис. 1, собрались вместе N человек. Слепая женщина-арбитр делает следующее объявление (соответствующее действительности):

«Все мы здесь, как мы знаем, — люди бесконечно умные и достойные. Служитель, действуя по моим указаниям, сейчас прикрепил к вашим лбам маленькие диски с обычными обозначениями различных неотрицательных целых чисел, причём каждый из вас может видеть число на голове любого другого, но не на своей собственной. Сумма всех этих чисел равна одному из чисел, которые, как вы видите, я пишу сейчас на доске».

* *Conway J. H., Paterson M. S., Moscow (USSR).* A headache-causing problem // Amer. Math. Monthly. 2020. V. 127, № 4. P. 291–296.

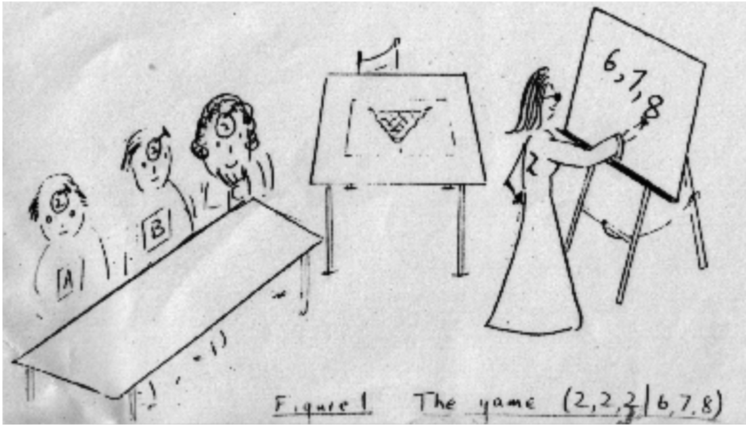

Рис. 1. Игра $(2, 2, 2 \mid 6, 7, 8)$

«Сожалею о небольшом неудобстве, которое я своими действиями, видимо, причиняю вам — к счастью, теорема из [CPM] даёт нам уверенность, что оно продлится недолго. Теперь я задам вопрос каждому из вас по очереди, и при первом ответе „Да“ все мы сможем выйти отсюда и хорошо провести остаток вечера».

Затем она спрашивает:

«Артур, можете ли вы определить лишь по этой информации, какое число написано на вашем диске?»

Если Артур ответит «Нет», она обратится к следующему человеку и спросит:

«Бертрам, можете ли вы по предыдущей информации вместе с ответом Артура определить, какое число должно быть на *вашем* диске?»

Если Бертрам в свою очередь скажет «Нет», она спросит Чарльза, Дункана и так далее. Возможно, она дойдёт до N-го человека:

«Энгельберт, сможете ли вы теперь определить ваше число на основании предыдущей информации, включая все ответы, которые вы слышали?»

Если даже Энгельберт скажет «Нет», она вернётся к Артуру и продолжит по кругу, всегда задавая один и тот же вопрос:

«Можете ли вы теперь определить ваше число лишь на основании предыдущей информации, включая все ответы, слышанные вами до сих пор?»,

пока игра не оборвётся при ответе «Да».

Формулировка теоремы

Если количество чисел, написанных на доске, меньше либо равно количеству людей N, то игра оборвётся после конечного количества вопросов.

Опровержение (начало)

Стало обычным (см., например, [CPM]) излагать опровержение этой теоремы перед её доказательством. Опровержение проводится следующим образом.

Чтобы уничтожить совершенно абсурдное утверждение теоремы, достаточно, разумеется, опровергнуть любой его частный случай. Положим $N = 3$. Пусть число на каждой голове равно 2, а числа на доске равны 6, 7 и 8. Покажем, что при этих условиях игра никогда не закончится. Будем обозначать данный случай $(2, 2, 2 \mid 6, 7, 8)$.

Полезно будет представить себе Чарльза за завтраком в то утро.

«Дорогой, вот новое приглашение от Зои. Она приятная девушка, и притом умная, но хотелось бы, чтобы она больше не заставляла нас участвовать в этих нелепых играх».

«Интересно, что будет на этот раз? Я бы предпочёл сразу проверить бесконечно много возможностей, чтобы покончить с этим как можно скорее. Если это шарады, я повторю ту, которую решал в последний раз — они *должны* допускать такое начало. Если это „Охота за тапочками“, то я…»

<…>

…«Но она может также иметь в виду игру, столь остроумно описанную в [CPM]. Тогда не исключено, что она использует частный случай $(2, 2, 2 \mid 6, 7, 8)$ — в удобных обозначениях из этой статьи. Как я должен реагировать?»

Рассуждение Чарльза

«Теперь дайте мне подумать. Я вижу две головы с числом 2, и сразу ясно, что моё число 2, 3 или 4. Давайте рассмотрим эти случаи».

«*Если моё число* 2, Артур заключит, что *его* число равно 2, 3 или 4, а поскольку каждый из этих вариантов совместим со всем, что он слышал, он должен сказать „Нет“».

«Бертрам тогда в аналогичной ситуации. Он будет думать: „Если у меня 2, то Артур, согласно рассуждению Чарльза из предыдущего абзаца, скажет ‘Нет’. Если 3, то Артур, напротив, сможет лишь заключить, что его число 1, 2 или 3, и скажет ‘Нет’“».

«Поскольку в этом случае Бертрам не сможет исключить ни одну из трёх возможностей 2, 3, 4, ему придётся сказать „Нет“. Этим исчерпан случай, когда моё число равно 2».

«*Если моё число* 3, Артур, вполне очевидно, тоже скажет „Нет“. Видимо, Бертрам в итоге узнает, кратко говоря, следующее:

„Я вижу $A = 2$, $C = 3$, так что я знаю, что $B = 1, 2$ или 3.

Если $B = 1$, то A не сможет выбрать между 2, 3, 4 и потому скажет ‘Нет’.

Если $B = 2$, то A не сможет выбрать между 1, 2, 3, и потому скажет ‘Нет’.

Если $B = 3$, он не сможет выбрать между 0, 1, 2,, поэтому всё равно скажет ‘Нет’. Следовательно, я сам должен сказать ‘Нет’, поскольку все три случая возможны, коль скоро A ответил ‘Нет’“».

«Бертрам и Артур оба скажут „Нет“, если моё число 3. Думаю, что аналогично можно доказать, что они оба скажут „Нет“, даже если моё число 4. Но мне не нужно проверять это — мой первый ответ должен быть „Нет“, поскольку и 2, и 3 совместимы с двумя ответами „Нет“, которые я несомненно услышу».

«Ясно, что мне не требуется рассматривать много других подобных вариантов — полагаю, мы все пойдём домой, сказав „Нет“ полдюжины раз, а я всё ещё не буду знать своё число».

Завершение опровержения

С помощью рассуждения Чарльза и различных его частей можно с абсолютной строгостью установить, что каждый из первых трёх игроков с самого начала знает, что каждый из первых трёх ответов будет «Нет». *И если все они знают, какими будут эти ответы, — какую информацию они получат, услышав эти ответы, произнесённые по правилам*? К началу второго круга они не узнают ничего не известного заранее, так что игра, очевидно, будет продолжаться вечно.

Доказательство (начало)

Можно теперь отметить, что Зоя, слепая женщина-арбитр, не осведомлена о числах на дисках, хотя разумеется знает, какие числа она написала на доске. Ради порядка она, естественно, будет перечислять все ситуации, совместимые с числами, которые она услышала к каждому данному моменту, и будет вычёркивать ситуацию из списка в точности тогда, когда поймёт, что соответствующая игра оборвётся на текущем вопросе. Разумеется, Зоя знает, когда именно это происходит, поскольку, будучи бесконечно умной, она абсолютно точно представит себя на месте игрока, к которому она обращается в любой возможной ситуации.

Под *возможной ситуацией* мы, разумеется, понимаем набор из N чисел $(a, b, c, \ldots, n)$, который может быть записан на дисках игроков $(A, B, C, \ldots, N)$ и приводит к ответу «Нет» на все вопросы до текущего. Будем называть такую ситуацию *проходной* (*ongoing*) в том случае, когда ответ на текущий вопрос тоже будет «Нет».

Мы утверждаем, что Зоя может точно выяснить, какие ситуации проходные, посредством следующего рассуждения:

«Предположим, что текущий вопрос адресован игроку B. Тогда заведомо

i) я *не могу* вычеркнуть $(a, b, c, \ldots, n)$, если есть *сопутствующая* ситуация $(a, b', c, \ldots, n)$ в которой значения $a, c, \ldots, n$ те же, но b' отличается от b. Ведь тогда B не может исключить ни одно из чисел b и b';

ii) я *могу* вычеркнуть $(a, b, c, \ldots, n)$, если такой сопутствующей ситуации нет. Ведь тогда B, видя числа $a, c, \ldots, n$, поймёт, что b — единственное возможное значение его числа».

«Таким образом, если я получаю, скажем, от B ответ „Нет“, я должна вычеркнуть из моей N-мерной таблицы те или только те ситуации $(a, b, c, \ldots, n)$, для которых не существует ситуаций $(a, b', c, \ldots, n)$, сопутствующих по B-координате».

Поскольку рассуждение Зои охватывает все случаи, с помощью её алгоритма можно точно определить, какие ситуации приведут к окончанию игры в любой данный момент.

Случай $(2, 2, 2 \mid 6, 7, 8)$

Прежде чем переходить к доказательству для общего случая, поясним исход всех игр вида $(a, b, c \mid 6, 7, 8)$ на рис. 2. На этом рисунке показана ортогональная проекция множества всех точек в пространстве (A, B, C), соответствующих суммам 6, 7 и 8. Зоя отметила здесь для каждой игры номер вопроса, утвердительный ответ на который прекращает игру.

Четыре элемента «19», выделенные на рис. 3, позволяют проверить предсказания Чарльза относительно игры $(2, 2, 2 \mid 6, 7, 8)$.

Завершение доказательства

Вернёмся теперь к общему случаю. Какие бы числа ни написать на доске — если их количество N или меньше[1)], количество начальных ситуаций заведомо конечно. Покажем, что ни одна из этих ситуаций не будет оставаться проходной всё время.

Действительно, в противном случае множество ситуаций, которые постоянно остаются проходными, непусто и обладает тем свойством, что любая его точка имеет сопутствующую по любой координатной оси. Достаточно показать, что любое такое множество точек в N-мерном про-

[1)] Как требуется в теореме.

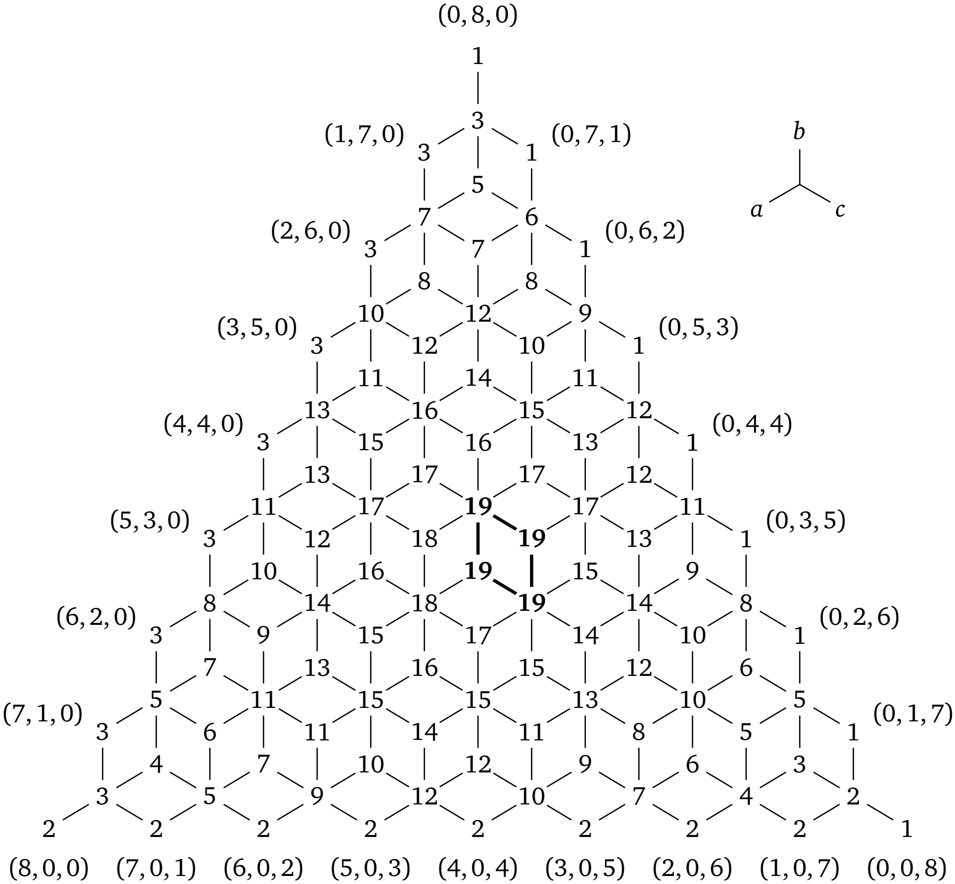

Рис. 2. Пометки Зои ко всем играм $(a, b, c \mid 6, 7, 8)$. Направления координатных осей (a, b, c) показаны наверху справа

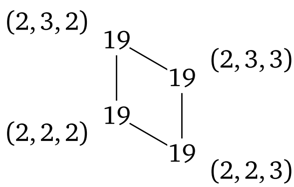

Рис. 3. В конце игры (эта область выделена в центре рис. 2)

странстве имеет не меньше $N+1$ различных сумм, и мы это проверим по индукции[2)].

Пусть a_0 — наименьшее значение A-координаты постоянно проходных ситуаций в игре N лиц. Тогда наборы из $N-1$ чисел $(b, c, \ldots, n)$,

[2)] Формально нужно начать с $N = 1$, но этот случай тривиален.

для которых ситуация $(a_0, b, c, \dots, n)$ — постоянно проходная в этой игре, сами образуют постоянно проходное множество в игре $N-1$ лиц и потому имеют не менее $(N-1)+1=N$ различных сумм. Пусть

$$s_0 = a_0 + b_0 + c_0 + \ldots + n_0$$

— наибольшая из соответствующих сумм для N лиц и она возникает из постоянно проходной ситуации $(a_0, b_0, c_0, \dots, n_0)$.

Тогда существует постоянно проходная ситуация $(a, b_0, c_0, \dots, n_0)$ с $a \neq a_0$, сопутствующая данной в A-направлении, причём $a > a_0$, поскольку a_0 минимально. Следовательно, у этой сопутствующей ситуации сумма координат больше, чем у любой упомянутой выше. Поэтому всего должно быть не меньше $N+1$ различных сумм координат.

Применение к теореме Ферма[3)]

Речь идёт о знаменитом утверждении Ферма:

$$a \geqslant 1, \quad b \geqslant 1, \quad c \geqslant 1, \quad n \geqslant 3 \quad \Rightarrow \quad a^n \neq b^n + c^n \qquad (*)$$

при целых рациональных a, b, c, n.

Как известно, для любого утверждения P верно, что (P и не-P) $\Rightarrow$ (0=1).

Возьмём в качестве P утверждение, рассмотренное в [CPM] столь обезоруживающим образом[4)], и применим *modus ponens*. Получаем, что $0 = 1$. Прибавив теперь 1 к обеим частям равенства, видим, что $1 = 2$. Запишем это в более подробном виде: $1^3 = 1^3 + 1^3$.

Таким образом, лексикографически первый случай утверждения $(*)$ опровергнут. Авторы не могут удержаться от замечания, что это наверняка было бы замечено раньше, если бы современные методы обучения не были ориентированы на разработку грандиозных общих теорий вместо того, чтобы прививать элементарные арифметические навыки.

Благодарности

Представленная здесь работа была выполнена, когда первый и второй авторы пользовались гостеприимством третьего. Второй и третий авторы признательны первому за детальные пояснения. Первый и третий авторы с благодарностью отмечают, что без постоянной поддержки и остроумного подбадривания со стороны второго автора эта статья

[3)] См. на с. 95 о первом из авторов: «Воплощает в математике дух игры». Великая теорема Ферма доказана в 1994 г. Эндрю Джоном Уайлсом.

[4)] Опровергнутое и доказанное выше.

была завершена.

Список литературы

[CPM] *Конвей Дж. Х., Патерсон М. С., Москва (СССР).* Каверзная задача // Этот сборник. С. 88–96.

Конвей Дж. Х. — неймановский заслуженный профессор математики в Принстонском университете. Воплощает в математике дух игры. Работал во многих областях математики, особенно в теории групп, теории узлов, теории игр и геометрии. Наиболее известен как автор игры «Жизнь» и теоремы о свободе воли, но сам он наиболее гордится открытием сюрреальных чисел. Всегда рад вступить в математическую игру любого рода, в том числе Го, фатбол (его собственное изобретение) или даже «палочки».

Отделение математики, Принстонский университет, Принстон, США

Патерсон М. С. (член Лондонского королевского общества) получил степень по математике в Кембриджском университете и приобрёл известность как соавтор игры «Рассада» с Джоном Конвеем. Его пожизненная увлечённость информатикой началась в середине 60-х, когда в Кембридже появился огромный новый компьютер с памятью до 1 мегабайта. Патерсон вырос от президента Математического общества Тринити до президента Европейской ассоциации теоретической информатики и перешёл из МТИ в Уорикский университет, где работал в отделении информатики на протяжении 48 лет.

Отделение информатики, Уорикский университет, Ковентри, Великобритания

Москва — столица России, мегаполис с населением порядка 15 миллионов жителей и город с почти 900-летней историей. Это самый северный и самый холодный мегаполис на Земле[5]. Москва — крупнейший научный центр в России, место пребывания Российской академии наук и многих её институтов. В Москве порядка 200 учреждений высшего образования, включая их флагман — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, основанный в 1755 г.

Москва, Россия (б. СССР)

[5] Оценки первых двух авторов.

Комментарий редакции American Mathematical Monthly

Эта статья была первоначально включена в сборник, изданный по случаю докторской защиты Хендрика Ленстры в Амстердаме 18 мая 1977 г. Книга, опубликованная на частные средства, была озаглавлена «Een Pak met een Korte Broek (костюмчик с короткими штанишками): статьи, презентованные Х. В. Ленстре младшему по случаю публикации его „Euclidische Getallenlichamen“ („Евклидовых числовых полей“)». Её редактировали П. ван Эмде Боас, Й. К. Ленстра, Ф. Оорт, Х. Г. Ринной Кан и Т. Й. Вансбек, которые одобрили публикацию этой статьи в American Mathematical Monthly. Мы счастливы представить эту статью вам. Как заявил П. ван Эмде Боас, она оказала большое влияние на становление эпистемической логики в Амстердаме. Текст публикуется без изменений. Редакция American Mathematical Monthly хотела бы выразить свою благодарность Дирку Шляйхеру за все усилия, приложенные им для публикации этой статьи.