Игры разнообразные, яркие и красивые*

Дж. Х. Конвей

Наша тема — теория сложения «партизанских игр». Это означает, что, хотя эта статья написана после [3], она должна бы предшествовать [3] и с точки зрения логики, и в смысле «благозвучия», поскольку числовая система из [3] на самом деле основана на более общей системе, описанной здесь. Благодарю Дональда Кнута за предложение написать обзорную статью с таким заглавием.

В этой статье не найдётся ни одного доказательства. Надеемся, что большинство читателей окажутся достаточно заинтересованными, чтобы самостоятельно доказать самые элементарные факты, и достаточно богатыми, чтобы купить хотя бы одну из книг [1] и [4], если увязнут в более трудных результатах. Все описанные здесь игры рассматриваются более полно в [1] или [4], и во многих случаях описание взято почти дословно из этих книг.

Чтобы увидеть, как возникает сложение игр, рассмотрим два примера.

«Доминирование» (предложено Гораном Андерсоном). Игра происходит на клетчатой доске, со множеством доминошек, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Игрок, который называется Левым, при своём ходе кладёт доминошку в вертикальном направлении, покрыв две свободные клетки. Игрок, который называется Правым, при каждом своём ходе кладёт доминошку горизонтально, также покрывая ровно две пустые до этого клетки. Если игрок при очередном ходе не может положить доминошку в нужном направлении, то он проигрывает.

«Жабы и лягушки» (предложено Ричардом Гаем, см. рис. 2). Игрок Левый натренировал несколько жаб (*Буфо буфо*), а Правый — несколько лягушек (*Рана рана*) для следующей игры. Когда ходит Левый, он должен *либо* заставить одну из своих жаб сдвинуться ровно на одну клетку вправо,

* *Conway J. H.* All Games Bright and Beautiful // Amer. Math. Monthly. 1977. V. 84, № 6. P. 417–434.

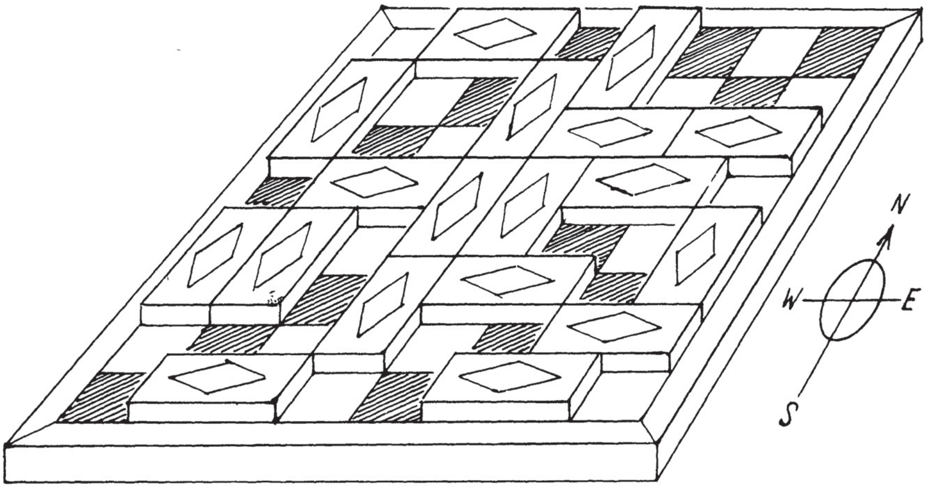


Рис. 1. Игра «Доминирование»

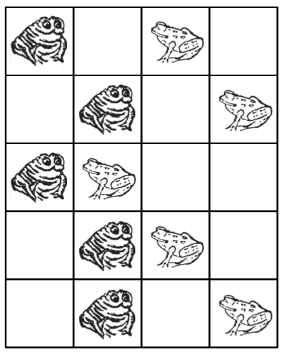


Рис. 2. Игра «Жабы и лягушки»

если эта клетка пуста, *либо* уговорить одну из жаб перепрыгнуть вправо через соседнюю лягушку и приземлиться сразу за ней, причём эта клетка должна быть пуста. Правый двигает своих лягушек аналогичным образом, но влево. Если игрок, чья очередь ходить, не может передвинуть никого из соответствующих существ описанным образом, то он проигрывает.

Партизанские игры вообще. Теперь с помощью этих примеров поясним нашу терминологию. Обе игры проводятся в соответствии с *соглашением о нормальных играх*, означающим, что игрок проигрывает *в точности тогда, когда* он не может сделать очередной ход. И обе игры удовлетворяют *условию остановки*: невозможна бесконечная последовательность ходов по правилам — независимо от того, ходят игроки по очереди или нет. С этого момента мы подразумеваем, что оба условия выполнены для каждой рассматриваемой игры. Отметим, что соглашение о нормальных играх снимает вопрос, кто победил в каждом конкретном случае, — это просто игрок, сделавший последний ход. И, разумеется, условие остановки гарантирует, что последний ход обязательно будет сделан. Вскоре станет ясно, почему условие остановки не ограничено лишь последовательностями чередующихся ходов. Мы не накладываем добавляемое часто предположение, что каждому игроку доступны одни и те же ходы. Поэтому назовём наши игры *партизанскими*[1] (и намеренно используем менее распространённое написание этого слова[2]).

Суммы партизанских игр. В двух наших примерах наиболее интересно то, каким образом типичные позиции этих игр распадаются в сумму гораздо более простых позиций. Так, в игре «Доминирование» пространство, доступное из позиции на рис. 1, состоит из нескольких отдельных областей, форма которых показана на рис. 3.

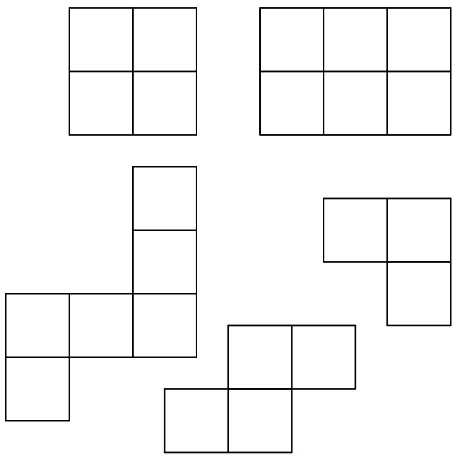


Рис. 3. Области, доступные в игре «Доминирование» из позиции, показанной на рис. 1

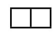
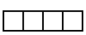
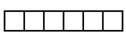
Когда игрок должен ходить, ему требуется выбрать одну из этих областей и сделать ход по правилам в эту область. Ходы в одну область независимы от ходов в другую. Аналогично в игре «Жабы и лягушки»игрок должен выбрать одну из горизонтальных полос, на которые разделена доска, и сделать в этой полосе ход по правилам. Ходы в одной полосе независимы от ходов в другой.

[1] Имеется в виду, что игроки могут находиться в неодинаковых условиях..

[2] Partizan вместо partisan.

Более обще, можно играть в сумму конечного набора (*независимых*) партизанских игр, которые называются *компонентами* суммы. Каждый игрок, когда его очередь ходить, должен выбрать одну из компонент и сделать в этой компоненте ход по правилам. Если окажется, что нет компоненты, где он мог бы сделать ход по правилам, то он, разумеется, проигрывает в силу соглашения о нормальных играх. Разумеется, ходы в сумме игр, затрагивающие данную компоненту, не обязательно делаются двумя игроками по очереди. Однако сильное условие остановки, принятое нами, всё равно обеспечивает, что сумма игр обязательно закончится. На самом деле условие остановки для компонент заведомо обеспечивает условие остановки для их суммы, которая поэтому также является партизанской игрой.

Оценка позиций. Оказывается, позициям в партизанской игре можно сопоставить *значения* (*оценки*) таким образом, что значение, отвечающее сумме игр, равно сумме значений, отвечающих компонентам. Во многих случаях эти значения — обычные числа и их сложение происходит по правилам, знакомым нам со школы, но во многих других случаях это не так. Теория партизанских игр имеет дело с правилами сложения и сравнения многих других причудливых и удивительных значений, которые в них появляются.

Целые значения. Позиции , ,  в игре «Доминирование» легко оценить, поскольку Правый, который ставит доминошки горизонтально, не может сделать ход, а Левый сможет сделать не более 1, 2, 3 ходов, начиная с соответствующей позиции. Поскольку мы всегда будем присваивать значения с точки зрения Левого, мы дадим этим трём позициям значения 1, 2 и 3 именно в таком порядке, а соответствующие позиции , ,  получат значения −1,−2, −3, поскольку в них имеются возможные ходы для Правого. Позиция, в которой ни один из игроков не может сделать ход по правилам, например позиция  в «Доминировании», имеет значение 0.

Предположим, что для некоторого $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ у Левого есть ход в позицию со значением n, но никакого другого хода, а у Правого нет допустимых ходов вообще. Тогда, разумеется, значение этой позиции равно $n + 1$. Запишем это в виде формулы:

$$\{n \mid \ \} = n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

где слева показаны значения позиций, куда есть ход у Левого, а справа — соответствующие значения для Правого. Не имеет значения, если мы дадим Левому дополнительные ходы в позиции с целыми значениями, меньшими чем $n+1$; например,

$$\{0, 5, 3, 5 \mid \ \} = 6.$$

Также несущественно, если Правый получит ходы в некоторые позиции с целыми значениями, если они больше $n+1$, например

$$\{1, 4, 7 \mid 13, 20\} = 8.$$

Поменяв ролями Левого и Правого в этом равенстве, получим также

$$\{-13, -20 \mid -1, -4, -7\} = -8.$$

Простейшая формула такого рода, разумеется, — равенство

$$\{\ \mid\ \} = 0,$$

выражающее тот факт, что позиции, в которых нет хода у обоих игроков, имеют значение 0. Но здесь тоже можно добавить некоторые возможности без изменения значения — а именно ходы для Левого в позиции с отрицательными значениями или для Правого — в позиции с положительными значениями. Так, например,

$$\{-1 \mid 3, 5\} = 0.$$

Можно просуммировать эти утверждения следующим образом:

Если значение позиции — число, то оно является *простейшим* числом, которое больше любого варианта, доступного Левому, и меньше любого варианта, доступного Правому.

Назовём это *правилом простоты*. Число 0 — простейшее из всех, затем идут 1 и −1, потом 2 и −2, и т. д.

Многие позиции в партизанских играх имеют целые значения, а некоторые игры полностью состоят из таких позиций, например:

В «**Разрезание торта**» играют двое детей, используя несколько прямоугольных кусков торта. Они уже размечены мамой по горизонтальным и вертикальным линиям так, что их можно разломить на квадратики (рис. 4). Делая ход, Левша разламывает один из кусков вдоль вертикальной линии, а его сестра Рита — вдоль горизонтальной. Значения показаны в таблице 1.

Предоставляем читателю проверить, что игра, обозначенная в таблице разделительными линиями, продолжается до бесконечности. Значения вычисляются только на основании правил, сформулированных

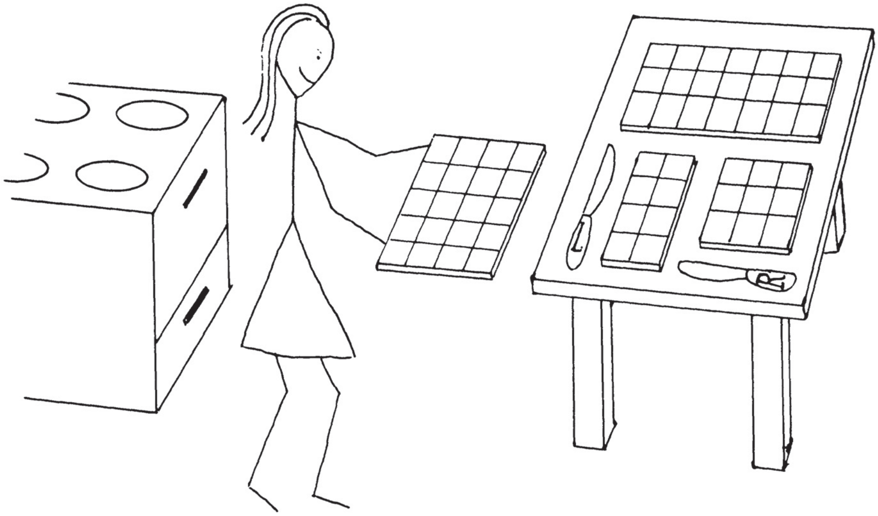


Рис. 4. Перед игрой «Разрезание торта»

Таблица 1

Значения позиций в игре «Разрезание торта»

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	−1	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
3	−2	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4	−3	−1	−1	0	0	0	0	1	1	1	1	2
5	−4	−1	−1	0	0	0	0	1	1	1	1	2
6	−5	−2	−2	0	0	0	0	1	1	1	1	2
7	−6	−2	−2	0	0	0	0	1	1	1	1	2
8	−7	−3	−3	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0
9	−8	−3	−3	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0
10	−9	−4	−4	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0

выше, — например, для прямоугольника 5 × 10 имеются варианты, показанные здесь:

$$\left\{5\times1+5\times9,\ 5\times2+5\times8,\ 5\times3+5\times7,\ \ldots \,|\, 1\times10+4\times10,\ 2\times10+3\times10\right\}.$$

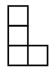
Поэтому его значение равно

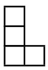
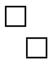
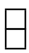
$$\{-4+1, -1+1, -1+0, 0+0, 0+0 \mid 4+1, 4+4\},$$

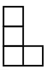
или

$$\{-3, 0, -1, 0, 0 \mid 5, 8\} = 1$$

по правилу простоты.

Дробные значения. Когда мы хотим оценить позицию  в «Доминировании», мы получаем символическое равенство

 $=$ $\Big\{$ ,  $\Big|$  $\Big\}$ $= \{-1, 0 \mid 1\}.$

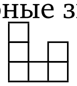
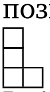
К сожалению, не существует *целого* числа строго между −1 и 0 слева и 1 справа. Однако есть *дроби*, и простейшая из них 1/2. Оказывается, позицию  надо, в подходящем смысле, действительно оценить в полхода для Левого, а добавление двух таких областей к позиции даёт Левому ровно такую же выгоду, как добавление .

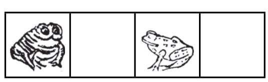
Другие позиции в конечных играх могут иметь значения, которые выражаются через четверти или восьмые части хода и т. д. Для таких значений по-прежнему выполнено правило простоты, если добавить условия, что все целые числа проще, чем дроби со знаменателем 2, а эти дроби проще, чем дроби со знаменателем 4, те в свою очередь проще, чем дроби со знаменателем 8, и т. д. Например,

$$\left\{1 \mid 1\tfrac{3}{8}\right\} = 1\tfrac{1}{4},$$

поскольку не существует целого или полуцелого между 1 и $1\frac{3}{8}$, но между ними находится $1\frac{1}{4}$. Вот другие примеры:

$$\left\{-1 \mid 21\tfrac{1}{2}\right\} = 0, \quad \left\{0 \mid 3\tfrac{1}{4}\right\} = 1, \quad \left\{\tfrac{1}{4} \mid 2\right\} = 1, \quad \left\{\tfrac{1}{4} \mid 1\right\} = \tfrac{1}{2}.$$

Дробные значения возникают во многих играх. В «Доминировании» позиция  имеет значение $\frac{3}{4}$, поскольку для Левого лучший вариант  (значение $\frac{1}{2}$), а для Правого   (значение 1), откуда $\left\{\frac{1}{2} \mid 1\right\} = \frac{3}{4}$. В «Жабах и лягушках» позиция



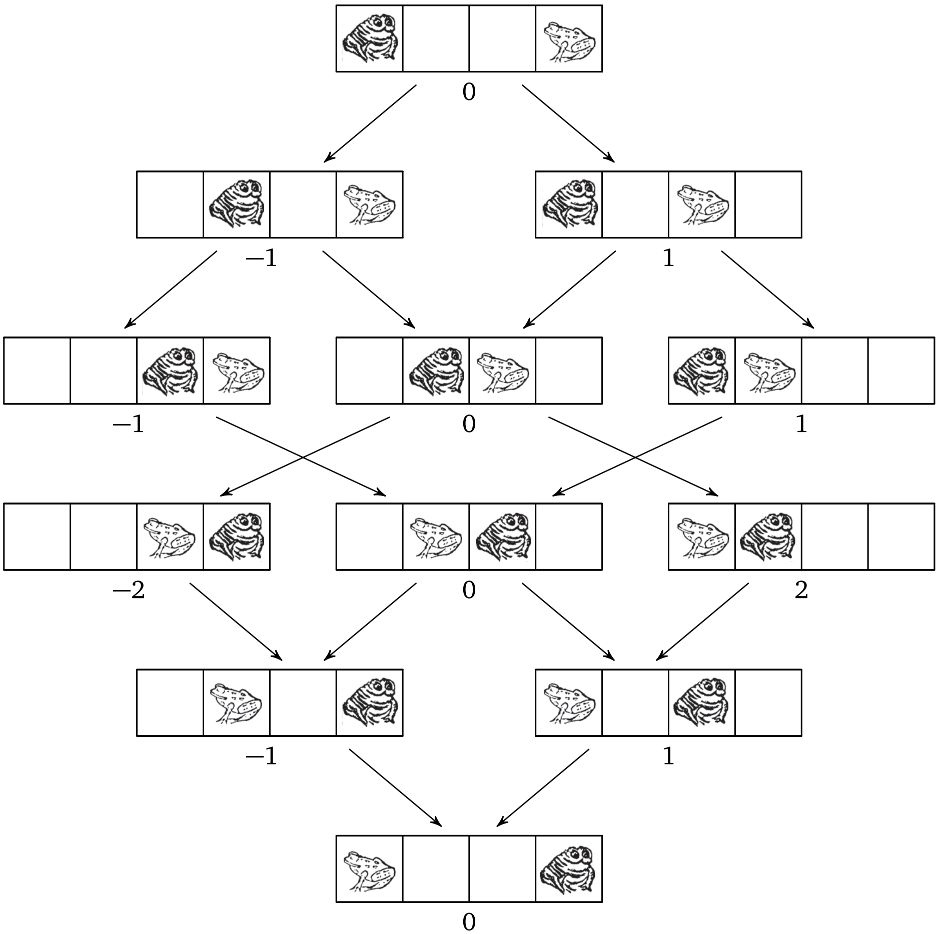
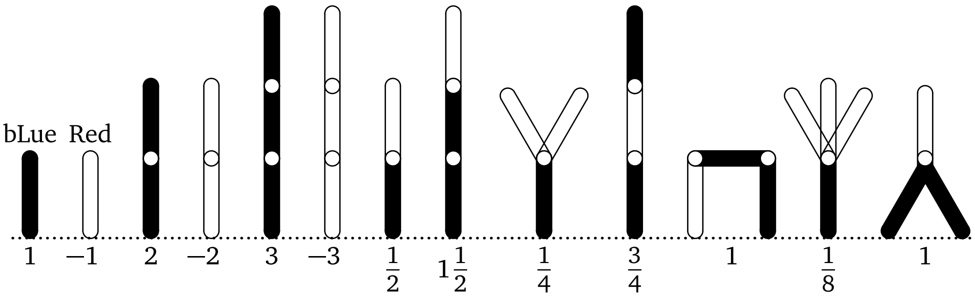


Рис. 5. Анатомия «Жаб и лягушек» на доске 4 × 4

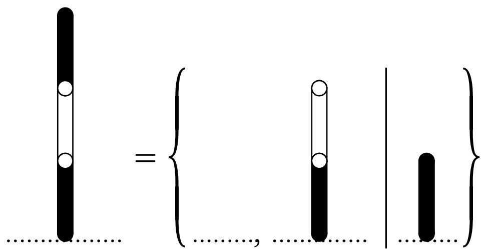
имеет, оказывается, значение $\frac{1}{2}$. Первый из этих примеров довольно затруднительно оценить, поскольку один из вариантов для Левого не имеет числового значения, но второй пример оценивается легко, и читателю было бы полезно проверить, что все значения, показанные на рис. 5, являются следствиями правила простоты.

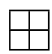
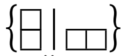
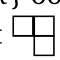
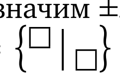
Красно-синий хакенбуш устроен так, что каждая позиция имеет числовое значение, целое или дробное. В этой игре используются *графы*, составленные из красных и синих рёбер, причём каждое ребро касается земли либо связано с землёй через цепочку других рёбер. Левый своим ходом перерезает какое-либо синее ребро, а Правый — красное, и после каждого разреза уничтожаются все рёбра, не связанные больше с землёй.

Упражнения:



Пример:

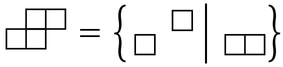
 $= \left\{0, \frac{1}{2} \mid 1\right\} = \frac{3}{4}.$

Нечёткие значения. В «Доминировании» позиция  имеет значение  $= \{1 \mid -1\}$, которое не является числом, поскольку оценка позиций, доступных Левому, больше, чем оценка доступных Правому. Обозначим это значение ± 1, а произвольное $\{x \mid -x\}$ обозначим $\pm x$, причём при $x \geqslant 0$ это не числовое значение. Позиция  $=$  имеет значение ± 0, которое мы будем также обозначать $*$, и на самом деле оно появляется очень часто. Более общо, для каждой пары чисел x и y, где $x \geqslant y$, существует нечисловое значение $\{x \mid y\}$. В некотором смысле, как вскоре будет объяснено, значение $\{x \mid y\}$ *строго меньше* любого числа, большего чем x, *строго больше* любого числа, меньшего чем y, но *несравнимо* со всеми числами от x до y включительно. Существует простая стратегия для отыскания лучшего хода из любой суммы таких значений, возможно с учётом числовых значений:

> Никогда не делайте ход в компоненте с числовым значением, если есть другой вариант. Среди различных компонент $\{x \mid y\}$, где $x \geqslant y$, выберите компоненту с наибольшим возможным значением $x - y$.

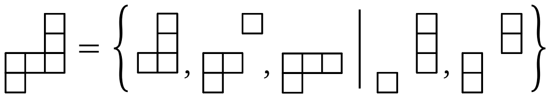
Если назвать $\frac{1}{2}(x - y)$ *температурой* значения $\{x \mid y\}$, то можно сформулировать стратегию короче: делайте ход в *самое горячее* $\{x \mid y\}$. Если у нескольких компонент одинаковая температура — несущественно, какую выбрать. Аналогичная температурная стратегия применима во многих других ситуациях, но не во всех.

Теперь можно проанализировать позицию на рис. 1. Нам уже встретились значения $\{1 \mid -1\}$ и $\{0 \mid 0\}$ позиций и , откуда легко получаем



$= \{0 \mid -1\}.$

С областью чуть сложнее. У Левого есть вариант $+ = 2$, а все варианты Правого аналогичны $= -\frac{1}{2}$. Но у Левого есть также вариант со значением ± 1. А поскольку $\pm 1 < 2$, он хуже предыдущего, так что $= \left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\}$. Наконец, имеется равенство



в силу которого значение этой области равно $\left\{\frac{1}{2}, *, -\frac{1}{2} \mid 1, 2\right\}$. Поскольку $\frac{1}{2}$ больше, чем * и $-\frac{1}{2}$, а 1 меньше 2, это значение равно $\left\{\frac{1}{2} \mid 1\right\} = \frac{3}{4}$.

Так как можно пренебречь изолированными квадратами, которые не может использовать ни один из игроков, из этих вычислений получаем

$$\left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\} + \{1 \mid -1\} + \{0 \mid -1\} + \{0 \mid 0\} + \frac{3}{4}$$

для суммарного значения на рис. 1. Здесь мы упорядочили — что естественно — слагаемые $\{x \mid y\}$ по убыванию их температур $\frac{1}{2}(x - y)$. Пусть оба игрока следуют температурной стратегии. Тогда значение после четырёх первых ходов равно, если начинает Левый,

$$2 - 1 + 0 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4},$$

а если начинает Правый, то

$$-\frac{1}{2} + 1 - 1 + 0 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

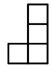
Поскольку оба значения положительны, Левый выиграет в любом случае.

Если, однако, Левый начинает и делает глупый ход в правый верхний угол, это приводит к замене $\left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\}$ на ± 1, и в итоге получается значение

$$\{1 \mid -1\} + \{1 \mid -1\} + \{0 \mid -1\} + \{0 \mid 0\} + \frac{3}{4}.$$

Если следующие четыре хода делаются разумно, получится значение

$$-1 + 1 - 1 + 0 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4},$$

а так как оно отрицательно, Правый выиграет. Если, наоборот, первый ход Левого был в левый нижний угол и $\frac{3}{4}$ заменилось на  $= \frac{1}{2}$, значение станет равным

$$\left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\} + \{1 \mid -1\} + \{0 \mid -1\} + \{0 \mid 0\} + \frac{1}{2},$$

и после четырёх разумных ходов, приводящих к значению

$$-\frac{1}{2} + 1 - 1 + 0 + \frac{1}{2} = 0,$$

можно считать игру оконченной. Поскольку последний ход сделан Левым, он выиграл, но он был на волоске от поражения, и ещё один неправильный ход мог оказаться роковым.

В общем случае при правильной игре победитель определяется по окончательному значению согласно следующему правилу:

> Если значение *положительно*, *Левый* выиграет, кто бы ни начинал.
> Если значение *отрицательно*, *Правый* выиграет, кто бы ни начинал.
> Если значение *нулевое*, выиграет тот, кто делает *второй* ход.
> Если значение *нечёткое*, выиграет тот, кто делает *первый* ход.

Нечёткие игры — это игры, которые не являются ни *положительными*, ни *отрицательными*, ни *нулевыми*, но их часто *путают* с нулевыми. Такая игра имеет вид $\{x \mid y\}$, где $x \geqslant 0 \geqslant y$.

Сравнение и сложение значений в общем случае. Пусть G^L обозначает типичный вариант хода Левого в игре G, а G^R — типичный вариант хода Правого, в символах

$$G = \{G^L \mid G^R\}.$$

Эти обозначения не подразумевают единственность или хотя бы существование хода для каждого из игроков. Так, например, в игре

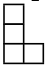
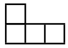
$$G = \{1, \pm 2 \mid \quad\},$$

где Левый может получить значения 1 или ± 2, а Правый не может сделать ход, G^L означает 1 или ± 2, а G^R не имеет определённого значения (что отличается от утверждения, что значение равно 0). В этих обозначениях сумма двух игр определяется формулой

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}.$$

Можно также определить игру, *противоположную* данной, по формуле

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\},$$

выражающей тот факт, что Левый и Правый просто поменялись ролями. Таким образом,  противоположно , а в хакенбуше

 противоположно  .

Эта терминология обосновывается следующими теоремами.

1. *Добавление нулевой игры* (*т. е. игры, где выигрывает второй*) *не влияет на результат при правильной игре.*
2. *Сумма любой игры с противоположной — нулевая игра.*
3. *Сумма двух положительных или двух нулевых игр — соответственно положительная или нулевая игра.*
4. *Сумма двух отрицательных или двух нулевых игр — соответственно отрицательная или нулевая игра.*
5. *Если разность $G-H$, т. е. сумма $G+(-H)$, — нулевая игра, то можно заменить G на H в любой сумме игр, не влияя на результат.*
6. *Если $G \geqslant H$, т. е. $G-H \geqslant 0$, то у Левого нет оснований возражать против замены H на G, а у Правого — против замены G на H в какой-либо сумме игр.*

С помощью этих результатов можно обосновать формальное определение значения. Если игра $G-H$ нулевая, то мы говорим, что G и H имеют одно и то же *значение*, и пишем $G=H$. В общем случае упорядоченность между играми и их значениями устанавливается условием, что отношение $\langle ? \rangle$ имеет тот же смысл в формуле $G \langle ? \rangle H$, что и в формуле $G-H \langle ? \rangle 0$. Возможны четыре случая:

$G>H$: в игре $G-H$ всегда побеждает *Левый*;
$G<H$: в игре $G-H$ всегда побеждает *Правый*;
$G=H$: в игре $G-H$ всегда побеждает *второй* игрок;
$G \parallel H$: в игре $G-H$ всегда побеждает *первый* игрок.

Различные комбинации этих отношений будут обозначаться с естественными сокращениями. Так, $G \geqslant H$ означает $G>H$ *или* $G=H$, а $G \mathrel{\lhd\!|}$ означает $G<H$ *или* $G \parallel H$.

Используя эти условия, можно проверить наши утверждения о значениях $\{x \mid y\}$, где x и y — числа, причём $x \geqslant y$. Действительно, если z — число, $x \geqslant z \geqslant y$, то из разности $\{x \mid y\}-z$ Левый может пойти в $x-z \geqslant 0$ и выиграть, а Правый может выиграть ходом в $y-z \leqslant 0$. С другой стороны, если $z>x$, то $x|z$ — некоторое число между x и z, так что $\{x \mid y\} \leqslant \{x \mid z\}<z$.

При проверке неравенств между значениями можно использовать и другие очевидные факты — например, значение игры G не изменится или увеличится, если увеличить значение любого хода Левого или Правого, добавить новый ход Левого или удалить некоторый ход Правого.

Доминируемые и сводимые ходы. В этом разделе мы вкратце опишем метод приведения значений к простейшему виду. Две игры имеют одинаковое значение в точности тогда, когда их простейший вид совпадает. Опишем некоторые изменения вида игры, не влияющие на её значение.

Пусть $A \leqslant B$, где A и B — возможные ходы Левого в игре G. Поскольку Левый заведомо предпочтёт ход в B ходу в A, значение игры G не изменится при удалении A с сохранением B. Если же A и B — возможные ходы Правого, точно так же можно удалить B и сохранить A. В обоих случаях будем говорить, что удаляемый вариант *доминируется* сохраняемым.

Понятие *сводимого*[3] хода — более тонкое. Пусть при возможном ходе Левого G^{L_0} в игре G имеется возможный ход для Правого $G^{L_0R_0} \leqslant G$. Тогда значение G не изменится, если удалить G^{L_0} из числа вариантов для Левого и взамен добавить к ним все возможные ходы Левого, имеющие вид $G^{L_0R_0L}$, из игры $G^{L_0R_0}$. В этом случае мы скажем, что ход G^{L_0} *сводится через* $G^{L_0R_0}$ *к* $G^{L_0R_0L}$, и назовём эту процедуру *устранением*[4] хода G^{L_0} (рис. 6). Разумеется, мы назовём ход Правого G^{R_0} сводимым, если для Левого существует возможный ход вида $G^{R_0L_0} \geqslant G$, и тогда можно заменить G^{R_0} всеми $G^{R_0L_0R}$ как новыми ходами Правого в игре G. В общем случае возможный

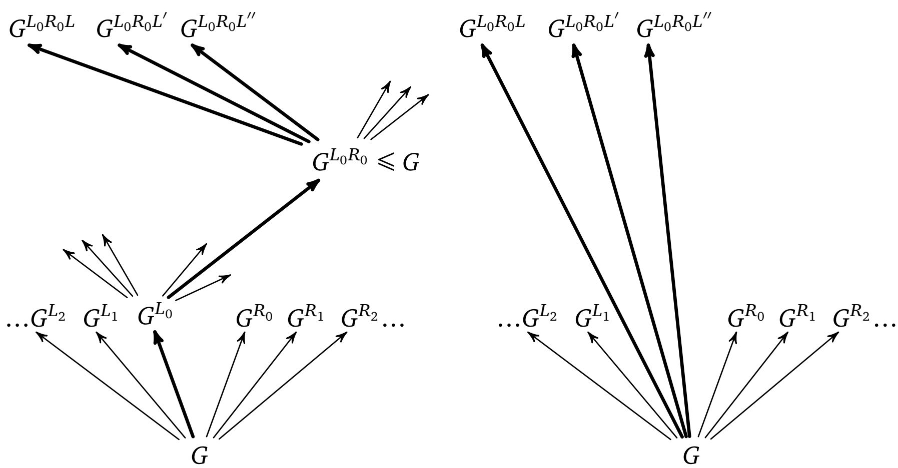


Рис. 6. Устранение хода G^{L_0}

[3] В подлиннике reversible.

[4] Bypassing.

ход сводим, если противник может затем сделать ход, который для него лучше, чем исходная игра G.

Вот простой пример. Игра $G=\{0,\pm1\,|\,2\}$ сама по себе не имеет доминируемых ходов, поскольку 0 и ±1 несравнимы. Но если Левый пойдёт в ±1, ответный ход Правого в -1 заведомо лучше для него, чем исходная игра, которая явно была положительной. Таким образом, вариант ±1 сводим через -1, и его можно заменить как вариант для Левого в игре G набором всех вариантов для Левого в игре -1, не меняя значение игры G. На самом деле -1 не имеет возможных ходов для Левого, так что $G=\{0\,|\,2\}=1$.

Если удалить все доминируемые и сводимые варианты из всех позиций некоторой игры G с конечным множеством позиций, мы в итоге получим *простейший вид игры* G. Следующий результат оправдывает это название:

Две игры G и H имеют одинаковое значение в точности тогда, когда их простейший вид совпадает.

Для бесконечных игр есть немного более слабый результат, который мы здесь не обсуждаем.

Равноправные игры и игра Ним. Игра называется *равноправной* (или *беспристрастной*), если в любой позиции обоим игрокам доступны одни и те же ходы. Теория таких игр была развита Шпрагом [10] и независимо Гранди [6] и, похоже, с тех пор несколько раз переоткрывалась. Она очень естественно включается в нашу более общую теорию.

В игре Ним (Bouton [2]) используется несколько куч, состоящих, например, из бобов. Ход каждого игрока должен уменьшать размер одной из куч путём удаления некоторых бобов. Пусть $*n$ — значение кучи размера n, так что

$$*n=\big\{*0,*1,\ldots,*(n-1)\,|\,*0,*1,\ldots,*(n-1)\big\}.$$

Три простейших случая таковы:

$$*0=0,\quad *1=*,\quad *2=\{0,*\,|\,0,*\}.$$

Тогда теория Шпрага — Гранди состоит из следующих утверждений.

(i) Любая равноправная игра с конечным множеством позиций имеет одно из значений $*0,*1,*2,\ldots$

(ii) $\{*a,*b,*c,\ldots\,|\,*a,*b,*c,\ldots\}=*m$, где m — наименьшее целое неотрицательное число, которое *не* присутствует среди $a,b,c,\ldots$ (*мекс*[5] чисел $a,b,c,\ldots$).

[5] Англ. mex (от minimum excluded) означает наименьший элемент вполне упорядоченного множества, не принадлежащий данному подмножеству.

(iii) Если все $a, b, c, \ldots$ различны, то выполнено равенство

$$*2^a + *2^b + *2^c + \ldots = *(2^a + 2^b + 2^c + \ldots).$$

(iv) $*n + *n = 0 (= *0)$.

Из свойства (ii), например, следует, что

$$\{*0, *1, *4, *7 \mid *0, *1, *4, *7\} = *2.$$

Пример сложения, использующий свойства (iii) и (iv):

$$*3 + *5 = (*2 + *1) + (*4 + *1) = *2 + *4 = *6.$$

На самом деле эти результаты очень легко доказываются: как можно видеть, любое $*n$ при $n > m$ является сводимым ходом в игре

$$*m = \{*0, *1, \ldots, *(m-1) \mid *0, *1, \ldots, *(m-1)\},$$

что доказывает (ii), откуда по индукции следует (i). Получаем также, что $*x + *y$ имеет равное значение с *некоторой* кучей z из Нима, и тогда легко доказываются правила (iii) и (iv) для вычисления z. Вся теория тривиально обобщается на бесконечные равноправные игры, где появляется значение $*\alpha$ для каждого ординала α.

Игра «Кейлз». Игра Гранди. На рис. 7 показана позиция из старой английской игры в шары «Кейлз», которую изобрёл Дьюдени [5]. Игроки по очереди удаляют *одну* или *две соседние* кегли, и проигрывает тот, кто не сможет это сделать.

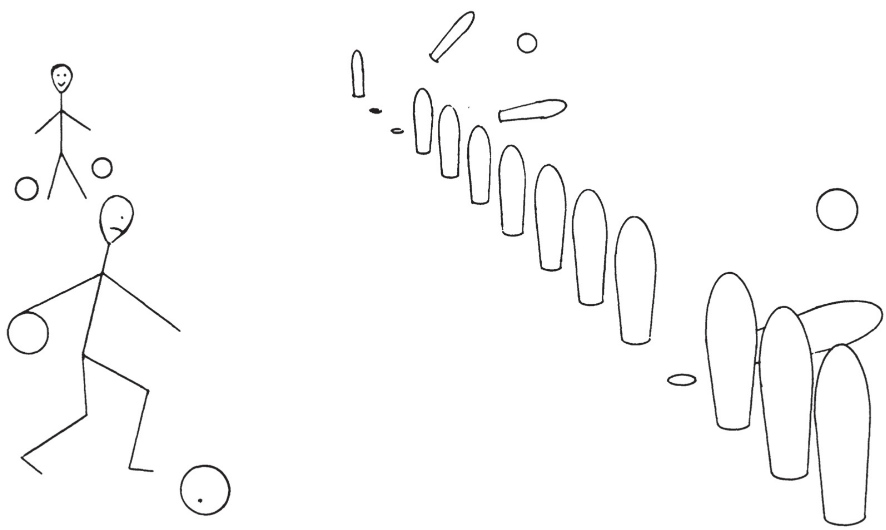


Рис. 7. Игра «Кейлз»

Ясно, что «Кейлз» — равноправная игра, и если K_n — значение линии из n кеглей, то

$$K_n = \{K_a + K_b \mid K_a + K_b\}, \quad a + b = n - 1 \text{ или } n - 2.$$

Например, опуская $K_0 = 0$, находим

$$K_5 = \{K_4, K_3 + K_1, K_2 + K_2, K_3, K_2 + K_1 \mid \text{то же}\}.$$

Считая, что для K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 уже получены значения $*0, *1, *2, *3, *1$, находим:

$$\{*1, *3 + *1, *2 + *2, *3, *2 + *1 \mid \text{то же}\} = \{*1, *2, *0, *3, *3 \mid \text{то же}\} = *4$$

по правилу (ii).

Действуя таким образом, Р. К. Гай открыл замечательный факт: последовательность значений K_n в игре «Кейлз» периодична при $n \geqslant 71$ с периодом 12. Найдено много аналогичных результатов для других игр с кучами (Guy and Smith [7]). *Игра Гранди* (разделение любой кучи на две меньшие кучи разных размеров) проанализирована Берлекэмпом в пределах 240 000 значений и всё ещё не стала периодичной. Однако в структуре значений замечен ряд закономерностей, и если они сохранятся, то можно доказать, что значения *станут* в итоге периодичными, хотя, может быть, лишь гораздо дальше[6].

Рассадка пар и семейств. На рис. 8 показано застолье, где празднуют окончание одной из глав нашей будущей книги. Левый и Правый отвечают за рассадку. Они по очереди сажают за стол каждую пару гостей по мере их прихода. Левый считает правильным сажать даму обязательно *слева* от её партнёра, а Правый предпочитает сажать её *справа*. Даму нельзя посадить рядом с джентльменом, который не является её партнёром. Тот, кто первым не сможет посадить пару согласно этим правилам, окажется перед затруднительной необходимостью объяснить ситуацию оставшимся гостям, и его можно считать *проигравшим*.

Как только один из игроков посадил пару, он фактически резервирует два соседних места для своего соперника, поскольку никто из игроков не может посадить две пары на четыре последовательных места. Так что после первого[7] хода каждая цепочка из n мест оканчивается с обеих сторон зарезервированными местами и потому имеет вид

[6] Периодичность оценок игры Гранди до сих пор не установлена и не опровергнута, несмотря на куда больший объем выполненных расчётов, см. `http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/grundy.html`.

[7] И каждого последующего.

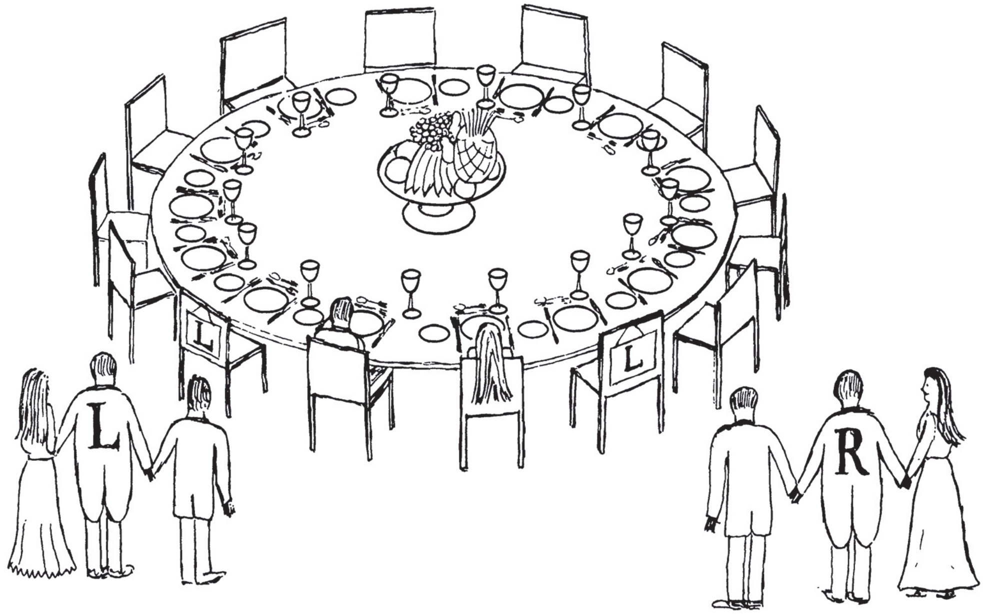


Рис. 8. Рассадка пар

LnL, если два крайних места зарезервированы для Левого;
RnR, если они зарезервированы для Правого;
LnR или RnL, если зарезервировано по одному месту для каждого игрока.

Выполнены равенства:

$$LnL(=-RnR) = \{LaR + RbL \mid LbL + LaL\},$$
$$LnR(= RnL) = \{LaR + RbR \mid LbL + LaR\},$$

где a и b пробегают все неотрицательные целые числа, для которых $a + b = n - 2$, при условии, что число x в каждом из выражений LxR и RxL строго положительно.

В анализе равноправных игр очень полезен следующий общий факт:

> Если игра вида
> $$\{A, B, C, \ldots \mid -A, -B, -C, \ldots\}$$
> удовлетворяет условиям $A \leqslant -A$, $B \leqslant -B$, $C \leqslant -C$, …, то она имеет значение $*m$, где m — наименьшее целое неотрицательное число, для которого $*m$ не присутствует среди значений $A, B, C, \ldots$

Легко видеть, что $RbR \leqslant LbL$, и потому из этой теоремы, в частности, следует, что каждое LnR имеет значение вида $*m$, где m — наименьшее целое, для которого $*m$ не является возможным ходом в LnR. Значения, появляющиеся в «Рассадке пар», очень просты, и в виде упражнения читатель может потрудиться над их вычислением.

Можно модифицировать игру, рассмотрев не пары, а семьи размера $n > 2$. Например, в игре «Рассадка семей из пяти человек» каждая семья состоит из матери, отца и трёх детей, которых обязательно надо посадить между их родителями. И снова Левый сажает даму слева от её семейства, а Правый — справа, и ни одна дама не должна сидеть рядом с мужем другой. Тогда значения определяются из таких же уравнений, как в игре рассадки пар, с той лишь разницей, что теперь $a+b$ равно $n-5$, а не $n-2$.

Мы отмечаем этот частный пример из-за довольно специфического поведения его значений. Можно показать, что последовательность

$$L0R, L1R, L2R, \ldots$$

для «Рассадки семей из пяти человек» состоит из повторённых трижды значений (равноправной) игры «Кейлз Доусона» (*Dawson's Kayles*), которая определяется как обычные Кейлз, но в ней единственный возможный ход — удаление двух соседних кеглей. При этом значения LnL и RnR обычно имеют вид

$$G = \{*a, *b, *c, \ldots \mid *A, *B, *C, \ldots\}.$$

Что говорит их анализ?

Оказывается, значение описанной игры очень существенно зависит от двух чисел

$$m = \operatorname{mex}(a, b, c, \ldots), \quad M = \operatorname{mex}(A, B, C, \ldots).$$

Если, скажем, $m = M = n$, то $G = *n$. Если же $m > M$, то оказывается, напротив, что значение игры G не зависит от конкретных чисел $a, b, c, \ldots$ Можно записать это в виде

$$\uparrow_{ABC\ldots} = \{*0, *1, *2, \ldots \mid *A, *B, *C, \ldots\},$$

подразумевая, что левая часть выражения в скобках содержит $*n$ для *всех* целых [неотрицательных] n. Если $m < M$, то, разумеется, G имеет значение

$$\downarrow^{abc\ldots} = \{*a, *b, *c, \ldots \mid *0, *1, *2, \ldots\},$$

противоположное значению $\uparrow_{abc\ldots}$.

В некотором смысле, обсуждаемом ниже, можно сказать, что $\uparrow_{ABC\ldots}$ имеет *атомный вес* $+1$, а $\downarrow^{ABC\ldots}$ имеет атомный вес -1, тогда как $*n$ имеет атомный вес 0. Для сумм таких игр нетрудно видеть, что если суммарный атомный вес не меньше 2, то выиграет Левый, причём он также может выиграть, когда атомный вес равен 1 и Левый начинает. Далее, выполнено важное *уравнение сдвига*:

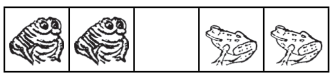
Если значения $*A, *B, *C, \ldots$ равны в каком-то порядке значениям $*a + *n$, $*b + *n$, $*c + *n$, … *для некоторого* n, то *для наименьшего из таких* n выполнено уравнение $\uparrow_{ABC\ldots} = \uparrow_{abc\ldots} + *n$.

Частный случай $\uparrow_1 = \{0 \mid *\}$ в простейшем виде обычно обозначается $\uparrow$ и называется «вверх», а противоположный ему обозначается $\downarrow$ и называется «вниз». Из уравнения сдвига и формул для $*a + *b$ получаем также равенства

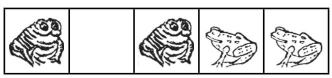
$\uparrow_0 = \uparrow + * = \{0, * \mid 0\}$ в простейшем виде;
$\uparrow_2 = \uparrow + *3 = \{0 \mid *2\}$ в простейшем виде;
$\uparrow_3 = \uparrow + *2 = \{0 \mid *3\}$ в простейшем виде, и т. д.

Значение $\uparrow$ интересно тем, что оно строго положительно и, значит, выгодно Левому, но при этом оно строго меньше любого положительного числа и даже любого бесконечно малого положительного числа. Можно назвать его *малым* в смысле [3].

Линейные комбинации из $\uparrow$ и $*$ появляются во многих играх. Например, в «Жабах и лягушках» начальная позиция



в полосе длины 5 имеет значение $*$, а возникающая из неё после одного хода позиция



имеет значение $\uparrow$. Довольно неожиданно возникает уравнение

$$\{0 \mid \uparrow\} = \uparrow + \uparrow + *,$$

которое можно назвать *тождеством стартового подъёма*[8].

Термография и теорема о среднем значении. Мы уже знаем, что произвольная игра G не обязательно имеет числовое значение. Оказывается, однако, что для неё существует наилучшее числовое приближение m в следующем смысле: для суммы большого количества экземпляров игры G результат примерно равен сумме того же количества экземпляров числа m, и это m называется *средним значением* игры G. Например, игра $G = \{\{7 \mid 5\} \mid \{4 \mid 1\}\}$ имеет среднее значение $4\frac{1}{4}$ и температуру $1\frac{3}{4}$, что поз-

[8] The upstart identity.

воляет нам сказать, что $1000G$ лежит между любым числом, строго меньшим чем $4250 - 1\frac{3}{4}$, и любым числом, строго превосходящим $4250 + 1\frac{3}{4}$.

Термограф является средством вычисления средних значений и температур. Будем отмечать числа на горизонтальной прямой, но положительные слева, а отрицательные — справа, вместо более привычного противоположного порядка. Предположим, что термографы уже вычислены для всех возможных ходов G^L и G^R в игре G, и начертим их следующим образом.

Термограф числа x — вертикальный луч, идущий вверх от точки x на горизонтальной оси. Далее, на высоте, которая соответствует некоторой *температуре* t, возьмём самую левую из правых границ для всех G^L и сдвинем её *вправо* на расстояние t (равное расстоянию от горизонтальной оси). Возьмём также самую правую из левых границ для всех G^R и сдвинем её на расстояние t *влево*. Полученные линии определяют границы термографа игры G вплоть до точки их встречи на высоте t_0 над горизонтальной осью (которая называется температурой игры G). Выше t_0 термограф представляет собой вертикальную прямую, которую будем называть *мачтой*.

Примеры существенно поясняют эту процедуру (рис. 9). В случае игры $H = \{7 \mid 5\}$ термограф для $H^L = 7$ является вертикальной прямой, проходящей через точку 7 на горизонтальной оси, а для H^R — аналогичной вертикалью через точку 5. Таким образом, левая граница термографа для H начинается как прямая, идущая по диагонали через точку 7 вправо вверх, а правая граница — как аналогичная прямая через точку 5, идущая по диагонали влево вверх. Они встречаются в точке на высоте 1 над точкой 6, так что температура игры H равна 1, а среднее значение равно 6. Аналогично игра $K = \{4 \mid 1\}$ имеет среднее значение $2\frac{1}{2}$ и температуру $1\frac{1}{2}$.

Далее (рис. 10), в игре $G = \{H \mid K\}$ правая граница для H начинается в точке 5, идёт влево вверх к точке 1 над точкой 6 и далее поднима-

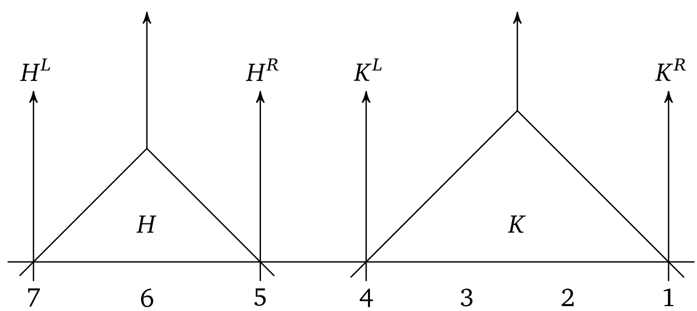


Рис. 9. Термографы для $H = \{7 \mid 5\}$ и $K = \{4 \mid 1\}$

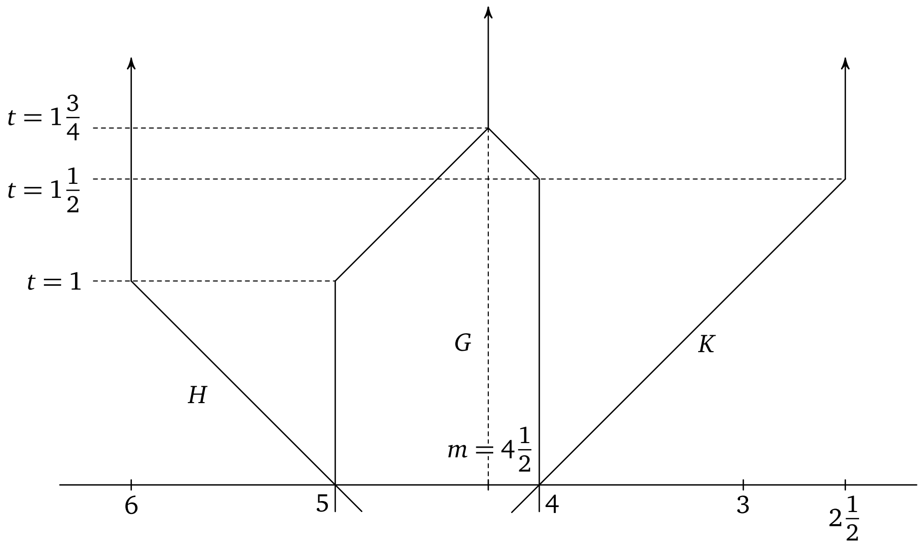


Рис. 10. Как найти термографы

ется вертикально. Левая граница начинается в точке 4, поднимается по диагонали вправо вверх к точке на высоте $1\frac{1}{2}$ над точкой $4\frac{1}{4}$ и далее поднимается вертикально. Левая и правая границы игры G получаются сдвигом этих границ навстречу друг другу. Поэтому одна из них — прямая, которая поднимается вертикально из точки 5 и на высоте 1 наклоняется вправо, а другая поднимается вертикально из точки 4 и на высоте $1\frac{1}{2}$ наклоняется влево. Эти прямые встречаются на высоте $1\frac{3}{4}$ над точкой горизонтальной оси $4\frac{1}{2}$, и это означает, что температура игры G равна $1\frac{3}{4}$, а среднее значение $4\frac{1}{4}$. Тот же алгоритм годится для любой игры G, в которой самая левая из правых границ для всех G^L начинается слева от самой правой из левых границ для любого G^R — в других случаях значение G является числом, а именно определяется правилом простоты. Если t' — любое число, большее, чем температура игры G, а m — среднее значение игры G, то

$$nm - t' < n \cdot G < nm + t'$$

для любого натурального n, что оправдывает нашу терминологию.

Более общо, если игры $G_0, G_1, G_2, \ldots$ имеют средние значения $m_0, m_1, m_2, \ldots$ соответственно, то можно сказать, что

$$m_0 + m_1 + m_2 + \ldots - t' < G_0 + G_1 + G_2 + \ldots < m_0 + m_1 + m_+ \ldots + t'$$

для любого числа t', большего чем температура всех игр G_i. Это часто помогает убедиться в выигрыше, показав без подробного анализа, что сложная сумма игр положительна.

Атомные веса. Для небольших игр вроде $\uparrow$ требуется более тонкая шкала (для $\uparrow$ равны 0 и среднее значение, и температура). Этой цели служит *исчисление атомных весов*, которое для таких маленьких игр предоставляет кое-что из того, что даёт термография для больших. Подробности неожиданно сложны.

Пусть в игре G значение никакой позиции не является ненулевым числом. Для такой игры определён атомный вес G'', вычисляемый по формуле

$$G'' = \{(G^L)'' - 2 \mid (G^R)'' + 2\}$$

со следующим *исключением*: если формула определяет целое число, оно заведомо неправильно. Правильное число в этом случае таково:

если G превосходит далёкие звёзды — *наибольшее* n, для которого

$$(G^L)'' - 2 \lhd\!| \; n \lhd\!| \; (G^R)'' + 2;$$

если далёкие звёзды превосходят G — *наименьшее* такое n;
если G несравнима с далёкими звёздами — *нуль*.

Далёкие звёзды для игры G — те кучи $*N$ в игре Ним, которые *не* содержатся среди значений позиций в G. Можно показать, что G удовлетворяет одним и тем же соотношениям порядка со всеми далёкими звёздами.

В качестве примера из исчисления атомных весов возьмём $G = \{0 \mid \uparrow\}$. Поскольку 0 имеет атомный вес 0, а $\uparrow$ — атомный вес 1, формула для G'' принимает вид

$$G'' = \{0 - 2 \mid 1 + 2\} = \{-2 \mid 3\},$$

определяя число 0. Поскольку это число целое, нельзя сразу утверждать, что это атомный вес, а нужно сначала сравнить G с далёкими звёздами. Наименьшая звезда, далёкая от G, — это $*2 = \{0, * \mid 0, *\}$. В процессе игры мы найдём, что $G + *2$ положительно, так что G превосходит далёкие звёзды. Значит, это наибольшее целое $\lhd\!| \; 3$, а именно 2. Разумеется, значение 2 атомного веса, найденное таким образом, согласуется с нашей более ранней формулой для игры G: $\uparrow + \uparrow + *$.

В качестве другого примера возьмём $H = \{\uparrow + \uparrow + * \mid \downarrow + *\}$. Формула атомного веса теперь даёт $\{2 - 2 \mid -1 + 2\} = \{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$, т. е. это действительно атомный вес. На самом деле эта игра в определённом смысле составляет половину от $\uparrow$, и обычно её обозначают $\frac{1}{2} \cdot \uparrow$. Можно определить $x \cdot \uparrow$ для всех *нецелых* x по формуле

$$x \cdot \uparrow = \{(x^L + 2) \cdot \uparrow + * \mid (x^R - 2) \cdot \uparrow + *\}.$$

Учитывая очевидное определение для целых x, видим, что выполнен закон дистрибутивности

$$(x + y) \cdot \uparrow = (x \cdot \uparrow) + (y \cdot \uparrow).$$

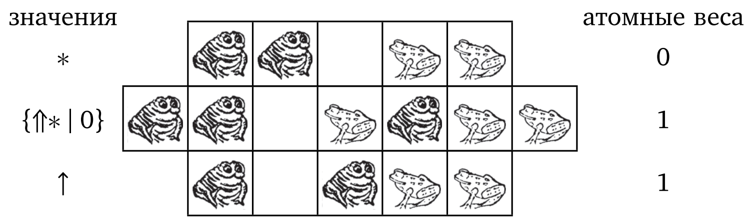


Рис. 11. Позиция в «Жабах и лягушках» с атомным весом 2

Частные случаи $\frac{1}{2}\cdot\uparrow$, $\frac{1}{4}\cdot\uparrow$, $*\cdot\uparrow$ появляются в усложнённой форме в игре Байнема [4, с. 199, 200], которую здесь нет возможности описывать. В неусложнённой форме возникает даже более интересная последовательность бесконечно малых. Теория этих и многих других игр становится гораздо проще благодаря самому полезному свойству атомных весов: если атомный вес игры больше либо равен 2, то игра положительна.

Например, можно вычислить, что позиция в «Жабах и лягушках»:

имеет значение $\{\Uparrow * \mid 0\}$ (где $\Uparrow * = \uparrow + \uparrow + *$) с атомным весом $\{2-2 \mid 0+2\} = 1$. Так что позиция на рис. 11 с атомным весом 2 должна быть положительной и Левый выиграет, кто бы ни начинал. В общем случае Левый может быть уверен в выигрыше, если атомный вес больше либо равен двум. Но если у Левого есть ход, он выиграет, если атомный вес — хотя бы положительный или нечёткий. (Атомные веса *могут* быть нечёткими — например, $\{\Uparrow \mid \Downarrow\}$ имеет атомный вес $\{2-2 \mid -2+2\} = *$, — но, к счастью, они обычно целые.)

Работы Милнора и Ханнера. Наша теория связана с той, которая изложена Джоном Милнором [9]. Хотя многое в них сходно, есть и важные различия. Милнор вводит числа для специальной цели, в качестве *платежей*, а для нас они естественно возникают из теории. Конечные игры приводят лишь к двоично-рациональным числам. Однако, допуская бесконечные игры с условием остановки, мы на самом деле получаем все действительные числа, как и обширный массив бесконечных и бесконечно малых чисел вроде

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega-1,\ \frac{\omega}{2},\ \sqrt{\omega},\ \frac{1}{\omega},\ \frac{1}{\omega^2},\ \frac{1}{\omega^\omega}$$

из [3].

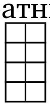
«Вознаграждение» Милнора примерно соответствует нашей *температуре*, а Улоф Ханнер [8] дал для игр Милнора довольно сложное доказательство теоремы о среднем значении. Но для Милнора *единствен-*

ные игры с нулевым вознаграждением — действительные числа, так что у него нет аналогов для наших игр

$$*, *2, \uparrow \quad \text{и т. д.}$$

Его теория охватывает в точности те игры, в которых каждая позиция либо имеет положительную температуру, либо является *действительным* числом.

Закончим несколькими прощальными замечаниями. Во-первых, представляется, что логически наиболее естественна теория, которая допускает бесконечные игры, подчинённые условию остановки. В основном теория не делает различия между конечным и бесконечным случаем; два важных исключения — теорема о среднем значении и теорема Саймона Нортона: игры с конечным множеством позиций не могут иметь нечётный порядок в группе игр по сложению. (Нортон построил бесконечные игры всех порядков.) Рассматриваемая таким образом, теория включает теорию бесконечных и бесконечно малых чисел, развитую в [3], причём сильно её обобщает.

Мир игр содержит много интересных магистралей и тропинок. Приведённые здесь примеры (числа, значения $\{x \mid y\}$, значения $*n$, значения $\uparrow_{abc\ldots}$) — лишь малая их часть. Есть также степени игры $\uparrow$ (например, $\uparrow^2 = \{0 \mid \downarrow *\}$), её кратные, а также крайне малые значения, например значение позиции  в «Доминировании», которое обозначается $+_2$, называется «крохотная двойка»[9]) и равно $\{0 \mid \{0 \mid -2\}\}$. К счастью, похоже, что лучший способ разобраться в этом изобилии структур — изучать всевозможные партизанские игры, вызывающие естественное желание сыграть в них. Почему бы *вам* не помочь в исследовании этих игр и их значений, причудливых и удивительных? Увлекательное занятие!

Эта статья была написана в спешке. Тем, что я не пожалел о ней в спокойной обстановке, я всецело обязан усилиям Ричарда Гая и Карен Макдермид.

Список литературы

[1] *Berlekamp E. R.*, *Conway J. H.*, *Guy R. K.* Winning Ways for Your Mathematical Plays. New York: Academic Press, 1982.

[2] *Bouton C. L.* Nim, a game with a complete mathematical theory // Ann. Math. Ser. 2. 1902. V. 3, № 1/4. P. 35–39.

9) «Tiny-two».

[3] *Conway J. H.* All numbers great and small. Univ. of Calgary Math. Dept. Research Paper No. 149. February, 1972.

[4] *Conway J. H.* On Numbers and Games. New York — London: Academic Press, 1976.

[5] *Dudeney H. E.* The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems. London, 1910. P. 118, 220.

[6] *Grundy P. M.* Mathematics and games // Eureka. 1939. V. 2. P. 6–8.

[7] *Guy R. K.*, *Smith C. A. B.* The G-values of various games // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1956. V. 52, № 3. P. 514–526.

[8] *Hanner O.* Mean play of sums of positional games // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 81–99. MR 21 # 3277.

[9] *Milnor J.* Sums of positional games // Kuhn H. W. and Tucker A. W. (eds.) Contributions to the Theory of Games II. Ann. of Math. Studies No. 28. Princeton: Univ. Press, 1953. P. 291–301. MR 14–779.

[10] *Sprague R. P.* Über mathematische Kampfspiele // Tôhoku Math. J. 1935–36. V. 41. P. 438–444.