О независимых арифметических утверждениях*

Дж. Х. Конвей

Давно известно, что существуют арифметические утверждения, которые верны, но не доказуемы. Однако обычно считают, что они обязательно должны быть сложными. В этой статье я покажу, что эти дикие звери могут оказаться совсем рядом.

§ 1. Введение

Пока теорема Ферма не была доказана, существовало предположение, что она может оказаться недоказуемой. Многие замечали, что теорема и её отрицание имеют разный статус. В отрицании теоремы утверждается, что для некоторого $n > 2$ существует n-я степень натурального числа, равная сумме двух меньших: предъявление этих чисел доказывает отрицание и опровергает саму теорему. Так что если показать, что теорему невозможно опровергнуть, то этим также показано, что таких n-х степеней не существует и, следовательно, теорема верна.

Однако теорема могла бы оказаться истинной, не будучи доказуемой. В этом случае сама её недоказуемость не может быть доказана, поскольку из такого доказательства следовало бы несуществование контрпримера.

Рассуждения такого рода применялись к проблеме четырёх красок и до сих пор применяются к гипотезе Гольдбаха: каждое чётное число, большее двух, является суммой двух простых. (На самом деле Гольдбах утверждал это о каждом положительном чётном числе, поскольку считал единицу простым числом.) В справедливости гипотезы Гольдбаха никогда не было сомнения, поскольку она подтверждается самым убедительным образом.

---

* *Conway J. H.* On Unsettleable Arithmetical Problems // Amer. Math. Monthly. 2013. V. 120, № 3. P. 192–198.

Каковы простейшие из истинных утверждений, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть? Я буду использовать для них термин un**set**tleable, поскольку больше столетия последней основой для доказательств служит теория множеств (set theory)[1]. В некоторых моих примерах может даже оказаться, что утверждение о их недоказуемости само недоказуемо и так далее. Разумеется, это значит, что не следует ждать здесь каких-то доказательств! Источником вдохновения для моих примеров служит

§ 2. $(3n+1)$-проблема Коллатца

Рассмотрим *функцию Коллатца* $\frac{1}{2}n \mid 3n+1$, значение которой равно $\frac{1}{2}n$, если это число целое, и $3n+1$ в противном случае. Я буду называть её «двудольной линейной функцией», поскольку каждое её значение равно значению одной из двух линейных функций. Далее, $(3n+1)$*-проблема Коллатца* состоит в следующем: «Всегда ли итерирование функции Коллатца приводит в итоге к единице» (если начинать с натурального числа)? Это несомненно верно, если начать с 7:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to \\ \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Томас Оливейра э Сильва [4] проверил это для всех натуральных чисел, меньших чем 5×10^{18}. Есть небольшой шанс, что утверждение независимо — известно, что некоторые очень похожие утверждения независимы[2].

Я обобщу проблему, рассмотрев многодольные линейные функции и соответствующие игры и задачи. Значением k-дольной линейной функции

$$g(n) = g_1(n) \mid g_2(n) \mid \ldots \mid g_k(n)$$

является первое целое из k чисел $g_i(n) = a_i n + b_i$ (если ни одно из $g_i(n)$ не целое, то значение не определено). Соответствующая *игра Коллатца* состоит в многократной замене n на $g(n)$, пока не достигнуто предписанное число (например, 1) или $g(n)$ не окажется не определённым. Тогда игра останавливается.

§ 3. Существуют ли независимые игры Коллатца?

Несомненно да. Доказательство более технично, чем остальная часть статьи, но суть проста: существует конкретная игра с 24 простыми функ-

---

[1] В русском переводе используется термин «независимое утверждение».

[2] По состоянию на текущий момент гипотеза Коллатца проверена до $2{,}95 \cdot 10^{20}$.

циями, которая при некоторых значениях n никогда не остановится, однако это недоказуемо. Знаменитая теорема Гёделя о неполноте, опубликованная в 1931 г., показывает, что нет непротиворечивой системы аксиом, в которой можно доказать любое истинное арифметическое утверждение. В частности, в ней нельзя доказать арифметическую формулировку утверждения о её собственной непротиворечивости. Тьюринг превратил это в свою теорему о вычислениях: проблема остановки в идеализированной модели вычислений неразрешима.

На основе этих замечательных результатов довольно тривиально строится независимая игра Коллатца. В статье 1972 года «Непредсказуемые итерации» [1] я показал, что любое вычисление имитируется игрой Коллатца очень простого вида, а именно *игрой с дробями*. В ней многодольная линейная функция имеет вид $r_1 n \mid r_2 n \mid \ldots \mid r_k n$, который задан последовательностью $r_1, r_2, \ldots, r_n$ рациональных чисел. В более поздней статье «Фрактран: простой универсальный язык программирования для арифметики» [2] показано, что в случае дробей

$$\frac{583}{559}\ \frac{629}{551}\ \frac{437}{527}\ \frac{82}{517}\ \frac{615}{329}\ \frac{371}{129}\ \frac{1}{115}\ \frac{53}{86}\ \frac{43}{53}\ \frac{23}{47}\ \frac{341}{46}\ \frac{41}{43}$$

$$\frac{47}{41}\ \frac{29}{37}\ \frac{37}{31}\ \frac{299}{29}\ \frac{47}{23}\ \frac{161}{15}\ \frac{527}{19}\ \frac{159}{7}\ \frac{1}{17}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{3}$$

игра универсальна. Это значит, что для любой вычислимой (в технических терминах — общерекурсивной) функции $f(n)$ существует такая константа c, что игра переводит $c \cdot 2^{2^n}$ в $2^{2^{f(n)}}$. В этом случае положим $f_c(n) = f(n)$. При этом результат охватывает все частично рекурсивные функции (не всюду определённые), если считать, что $f_c(n)$ не определена в том случае, когда игра не останавливается или её результат не имеет вида 2^{2^m}.

Отсюда довольно легко получить, что если независимость утверждения определена в терминах любой непротиворечивой системы аксиом, то существует число, для которого игра с ещё одной дробью:

$$\frac{583}{559}\ \frac{629}{551}\ \frac{437}{527}\ \frac{82}{517}\ \frac{615}{329}\ \frac{371}{129}\ \frac{1}{115}\ \frac{53}{86}\ \frac{43}{53}\ \frac{23}{47}\ \frac{341}{46}\ \frac{41}{43}$$

$$\frac{47}{41}\ \frac{29}{37}\ \frac{37}{31}\ \frac{299}{29}\ \frac{47}{23}\ \frac{161}{15}\ \frac{527}{19}\ \frac{159}{7}\ \frac{1}{17}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$$

никогда не приводит к единице, причём это утверждение независимо. Указание программисту: если компьютер доказал $0 = 1$ в n-й системе аксиом, положим $f(n) = 0$, в противном случае оставим $f(n)$ не определённым. Тогда вышеприведённая игра с 23 дробями именно в случае противоречивости системы остановится на двойке, поскольку 0 —

единственно возможное значение для $f(n)$[3], поэтому игра с 24 дробями остановится на единице.

Каковы простейшие игры Коллатца, от которых можно ожидать независимости? Думаю, что один пример у меня есть.

§ 4. Немузыкальная перестановка

Немузыкальная перестановка $\mu(n)$ действует так: $2k \mapsto 3k$, $4k+1 \mapsto \mapsto 3k+1$ и $4k-1 \mapsto 3k-1$. Очевидно, это трёхдольная линейная функция, поскольку любое натуральное число однозначно представляется в одной из форм, указанных слева. А так как любое натуральное число однозначно представляется и в одной из форм, указанных справа, μ^{-1} также является трёхдольной линейной функцией, так что μ — перестановка. В сокращённых обозначениях немузыкальная перестановка имеет вид $\frac{3n}{2} \mid \frac{3n+1}{4} \mid \frac{3n-1}{4}$, а обратная к ней $\frac{2n}{3} \mid \frac{4n+1}{3} \mid \frac{4n-1}{3}$. Обозначая через $\{r\}$ целое число, ближайшее к r, можно далее сократить обозначение для μ до $\frac{3n}{2} \mid \left\{\frac{3n}{4}\right\}$, а для μ^{-1} до $\frac{2n}{3} \mid \left\{\frac{4n}{3}\right\}$, но это может затемнить тот факт, что μ и μ^{-1} — трёхдольные, а не двудольные линейные функции.

В обычных обозначениях в терминах циклов (допуская бесконечные циклы) μ начинается следующим образом:

$$(\mathbf{1})\ \ (\mathbf{2},3)\ \ (\mathbf{4},6,9,7,5)\ \ (\mathbf{44},66,99,74,111,83,62,93,70,105,79,59)$$

$$(\ldots 91,68,\ldots,86,\ldots,97,73,55,41,31,23,17,13,10,15,11,\mathbf{8},$$
$$12,18,27,20,30,45,34,51,38,57,43,32,48,72,\ldots)$$

$$(\ldots 77,58,87,65,49,37,28,42,63,47,35,26,39,29,22,33,25,19,\mathbf{14},$$
$$21,16,24,36,54,81,61,46,69,52,78,\ldots,$$
$$88,\ldots,94,\ldots,89,67,50,75,56,84,\ldots)$$

$$(\ldots 98,\ldots,100,\ldots,95,71,53,\mathbf{40},60,90,\ldots,76,\ldots)$$

$$(\ldots 85,\mathbf{64},96\ldots)\ \ (\ldots\mathbf{80},\ldots,)\ \ (\ldots,92,\ldots\mathbf{82},\ldots).$$

Здесь выделен наименьший элемент каждого цикла. Я показал, как должны выглядеть все конечные циклы и первые шесть бесконечных, чтобы включать все натуральные числа вплоть до 100.

---

[3] И, значит, $2^{2^{f(n)}} = 2^{2^0} = 2$.

Строго говоря, я не знаю, верны ли эти утверждения. Например, цикл, содержащий 8, мог бы быть конечным, а мог бы совпадать с циклом, содержащим 14. Однако оба эти цикла продолжаются в обе стороны, пока числа не становятся больше 10^{400}, и очевидно, что числа не спустятся снова ниже 100. Требуется название для такого вида очевидности: предлагаю *очевидность по вероятности*[4)].

Рисунок 1 делает это ещё яснее. На нём циклы, содержащие 4, 14, 40, 64, 80 и 82, показаны на логарифмической шкале относительно ко-

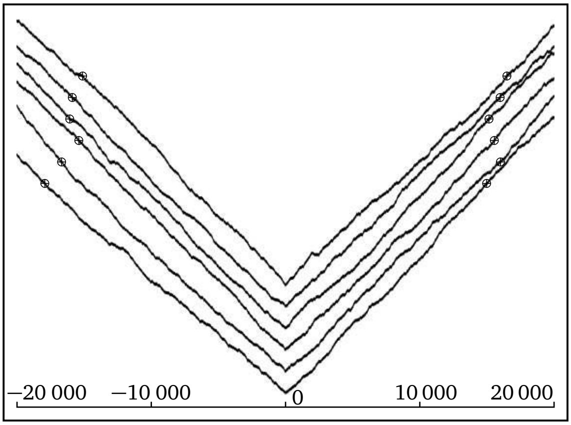

Рис. 1. Циклы, содержащие 8, 14, 40, 64, 80 и 82, после 20 000 итераций

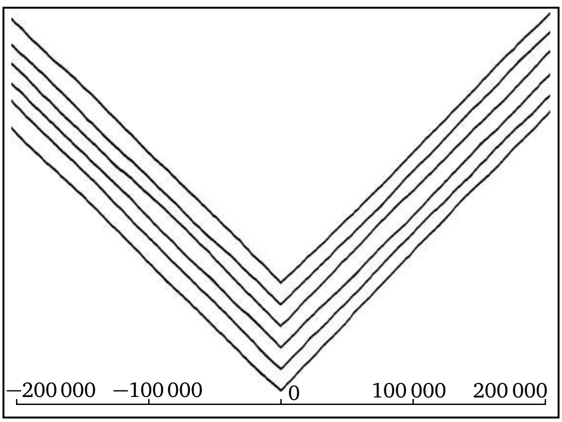

Рис. 2. Те же циклы после 200 000 итераций: на большом промежутке регулярность стала гораздо выше, и вероятностные предсказания всё более подтверждаются. — *Прим. автора*.

[4)] В подлиннике *probvious*, от *probabilistically obvious*.

личества применений перестановки μ. Эти шесть кривых разделены, так как иначе их наименьшие точки будут неотличимы на рисунке от единицы[5]. Кружочки отмечают места, где графики проходят 10^{400}. В обоих направлениях рост экспоненциальный, причём μ даёт скорость чуть выше, чем μ^{-1}. Как объяснить эти факты?

Давайте посмотрим, что может происходить, когда числа становятся большими. Поскольку n с равным успехом может быть чётным или нечётным, оно умножится за шаг в среднем на

$$\sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{9}{8}}.$$

За двенадцать шагов ожидаемый коэффициент составит

$$\frac{3^{12}}{2^{18}} = \frac{531\,441}{262\,144} \approx 2{,}027.$$

Для μ^{-1} нужно в одном случае из трёх умножить на 2/3, а в других двух на 4/3, так что ожидаемый рост за три шага составляет 32/27, а за двенадцать шагов

$$\frac{32^4}{27^4} = \frac{2^{20}}{3^{12}} = \frac{1\,048\,576}{531\,441} \approx 1{,}973.$$

Округление этих двух чисел до 2 объясняет название «немузыкальный». На фортепиано двенадцать нот составляют октаву, что соответствует удвоению частоты, подобно тому как двенадцать шагов немузыкальной перестановки в среднем примерно удваивают число. Отношение частот

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\,441}{524\,288} \approx 1{,}0136$$

называется «пифагорова комма» или «пифагорова запятая». Так соотносятся си-бемоль и ля-диез, а также ряд других пар «энгармонически эквивалентных»[6] нот. Так что здесь действительно есть связь с музыкой.

---

[5] Отчётливый изгиб на графике цикла, содержащего 82, соответствует заметному уменьшению (более чем в 75 989 раз) от $\mu^{1981}(82) = 5\,518\,782\,509\,452\,689\,749\,562\,442\,051\,558\,599\,474\,342\,616\,171\,049\,802\,024\,438\,847\,761 \approx 5{,}519 \cdot 10^{63}$ до $\mu^{2208}(82) = 72\,625\,599\,594\,039\,327\,995\,887\,556\,149\,205\,597\,399\,175\,812\,389\,461\,574\,936\,396 \approx 7.263 \cdot 10^{58}$. Надо признать, что это уменьшение более чем в 2^{16} раз там, где следовало ожидать увеличения почти в 2^{19} раз, бросает тень сомнения на вероятностные рассуждения в нашем тексте. — *Прим. автора.*

[6] То есть близких по высоте, но играющих разную роль в конкретной звуковысотной системе.

Однако наша перестановка даёт в итоге повышение больше, чем на октаву, что звучало бы не очень музыкально, и мне было забавно назвать эту перестановку немузыкальной[7)].

§ 5. Немузыкальные независимые гипотезы?

Простейшее утверждение про μ, которое, как я верю, истинно, но независимо, состоит в том, что 8 принадлежит бесконечному циклу.

Почему оно истинно? Потому что утверждение о линейном росте логарифма $\mu^n(8)$ наглядно доказывается рис. 1 и никто не сможет всерьёз поверить, что $\mu^n(8)$, которое уже превосходит 10^{400}, вновь чудесным образом уменьшится до 8 (рис. 2, созданный уже после написания этого текста, показывает, что после 200 000 итераций это число даже превосходит 10^{5000}). Будучи истинным, утверждение не будет опровержимым.

Если игра Коллатца не останавливается, то существует ли доказательство, что она не останавливается? Игра с 24 дробями из § 3 (улучшенная до 7 дробей Джоном Рикардом [3]) показывает, что ответ, вообще говоря, отрицательный. Если игра Коллатца не останавливается, это в общем случае недоказуемо. Так что не следует ожидать, что цикл с восьмёркой доказуемо бесконечен, ввиду отсутствия всяких причин, почему бы так должно быть. В конце концов, есть очень малая положительная вероятность, что для каких-то очень больших натуральных чисел M и N величина $\mu^M(8)$ может оказаться тем же 10^{100}-значным числом, что и $\mu^{-N}(8)$.

Некоторых читателей может всё же расстроить отсутствие доказательств, несмотря на предупреждение во введении, что иначе быть заведомо не может. Оставляю таких читателей с любопытной мыслью, что доля ошибок в опубликованных доказательствах гораздо выше, чем маленькая положительная вероятность, отмеченная в предыдущем абзаце.

Дополнение 1: решаема ли $(3n+1)$-проблема?

У $(3n+1)$-игры есть специфическая черта: вероятностные рассуждения заставляют предполагать, что большие числа убывают, а не возрастают, как в немузыкальной перестановке. Если это доказуемо, то гипотеза Коллатца оказалась бы доказуемой. Есть слабая надежда, что такое возможно.

Знаменитый круговой метод Харди — Литлвуда часто позволяет доказать результаты, предсказанные вероятностно. Самое впечатляющее

[7)] Игра слов: it has amused me to call it amusical.

его применение дал И. М. Виноградов, доказав, что каждое достаточно большое нечётное число является суммой трёх простых. Более общее применение этого метода — отыскание количества представлений числа n в виде суммы данного количества чисел некоторого специального вида (простых, k-х степеней, ...). Оценка для данного числа принимает вид $P+E$, где P — вероятностная оценка, E — погрешность. Если удалось доказать, что $|E|<P$, то тем самым для искомого количества получено некоторое представление.

Оказывается, что P — произведение множителей вида P_p, где P_p (для простого p) — вероятность того, что n является p-адической (т. е. по модулю всех степеней числа p) суммой данного количества чисел нужного вида. (Есть также множитель P_∞, равный доле представимых в нужном виде чисел среди близких к n.) Иначе говоря, P — как раз то, что можно наивно ожидать от вероятностных рассмотрений, аналогичных случаю немузыкальной перестановки.

Нельзя исключить, что однажды таким методом удастся доказать $(3n+1)$-гипотезу Коллатца, поскольку всё, что требуется, — доказать, что достаточно большие числа в итоге уменьшаются. Однако на самом деле я в это не верю.

Эти замечания не относятся к немузыкальной перестановке, поведение которой не будет определено даже если доказать, что почти все большие числа имеют тенденцию к возрастанию, поскольку, например, результат применения μ миллион раз к восьмёрке может совпадать с результатом применения μ^{-1} ещё больше раз к 8 или 14: в этом случае цикл, содержащий 8, либо конечен, либо совпадает с циклом, содержащим 14. Очевидно по вероятности, что это не произойдёт. Однако нельзя ожидать, что мы это докажем, и нет причины ожидать, что это утверждение или его отрицание следуют из системы аксиом Цермело — Френкеля или какого-то её подходящего расширения. Другими словами, очевидно по вероятности, что это утверждение независимо.

Ещё кое-что очевидно по вероятности, но с немного меньшей вероятностью. Например, таков алгоритм для проверки, принадлежит ли n конечному циклу. Нужно просто спросить, является ли n одним из двадцати чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 44, 59, 62, 66, 70, 74, 79, 83, 93, 99, 105, 111;$$

если да — ответ «да», если нет — «нет». Если есть другой конечный цикл, алгоритм не работает, но всё же ответ можно вычислить, если только не существует бесконечно много конечных циклов, что почти наверняка не имеет места.

Выше я предположил, что утверждение о принадлежности восьмёрки бесконечному циклу хотя и очевидно по вероятности, но независимо. Теперь я выскажу предположение, что это утверждение о независимости само недоказуемо и, следовательно, независимо и так далее — можно углубиться в метатеорию сколь угодно далеко.

Даже если это неверно, математика *не* определяется какой-либо системой теоретико-множественных аксиом. В частности, похоже, что некоторые простые гипотезы Коллатца (может быть, даже сама $(3n+1)$-гипотеза) останутся независимыми навсегда.

Дополнение 2: Некоторые немузыкальные парадоксы

Отвлечёмся с облегчением от глубоких проблем, чтобы обсудить некоторые простые задачки о поведении немузыкальной перестановки. Мы уже отметили парадокс «всегда вверх»: в типичном цикле числа растут независимо от того, каким способом мы обходим цикл. На самом деле это не удивительно, как показывает рис. 1. Начав с любой точки цикла и двигаясь в любом направлении, мы в итоге пройдём минимум и затем пойдём вверх.

Возникает также «парадокс сравнимости». Поскольку $n < \mu(n)$ в точности тогда, когда n чётно, а $n < \mu^{-1}(n)$ в точности тогда, когда n не делится на 3, получаем, что n удовлетворяет обоим неравенствам (и, значит, является локальным минимумом) в точности тогда, когда $n \equiv \pm 2 \pmod 6$,, что происходит ровно в трети случаев; правильно? Может быть, и нет. Число n не удовлетворяет ни одному из этих неравенств в точности тогда, когда $n \equiv 3 \pmod 6$. Значит, n является локальным максимумом ровно в одной шестой случаев. Но в любой последовательности локальные минимумы и максимумы чередуются, так что их количество должно совпадать. Так что же верно: точка экстремума — каждая третья или каждая шестая?

Давайте подумаем ещё немного. Максимум появляется каждый раз, когда возрастание сменяется убыванием. А так как возрастание и убывание равновозможны, максимум будет получаться в четверти случаев. То же верно для минимумов, которые появляются, когда убывание сменяется возрастанием. Так что и максимум, и минимум появляется один раз за четыре шага, а не за три или шесть! Можно получить и ещё один ответ, если пойти в обратном направлении, когда вероятности равны $2/3$ и $1/3$. Заключаем, что и максимумы, и минимумы появляются один раз за $4\frac{1}{2}$ хода.

На самом деле эти рассуждения не доказывают ничего парадоксального. Выбирая произвольное число, мы видим максимумы и минимумы одинаково часто, а именно один раз за четыре шага при движении вперёд и один раз за $4\frac{1}{2}$ шага при движении назад. Предоставляем читателю объяснить, почему оба эти ответа (один раз за 4 или $4\frac{1}{2}$ шага) не согласуются ни с одним из ответов, вытекающих из парадокса сравнимости (один раз за 3 или 6 шагов).

Эти кажущиеся противоречия основаны на нашем опыте работы с конечными циклами. Поэтому можно было бы предположить, что обратными рассуждениями удастся доказать, что большинство или хотя бы некоторые циклы бесконечны. Однако, поразмыслив об этом, я всё же полагаю, что эти гипотезы независимы.

Если вы не согласны, попробуйте доказать или опровергнуть какое-нибудь из следующих утверждений.

1. Существует ещё один конечный цикл [кроме перечисленных в § 4].
2. Существует бесконечный цикл.

Благодарности

Алекс Рыба заслуживает большой признательности за неоценимую помощь в создании этой статьи. Хотел бы также поблагодарить Дирка Шляйхера за создание рисунков.

Постскриптум

Добавлено 8 июня 2012 г.

Следующее рассуждение убедило меня, что сама $3n+1$-гипотеза Коллатца скорее всего независима (а не просто имеет на это небольшой шанс, как отмечено выше). В этом рассуждении используется наличие сколь угодно высоких «гор» на графике игры Коллатца. Чтобы увидеть это, заметим, что $2m-1$ переходит за два шага в $3m-1$, откуда следует, что $2^k m-1$ переходит за $2k$ шагов в $3^k m-1$. Далее, в силу китайской теоремы об остатках можно обеспечить, чтобы $3^k m-1$ имело вид $2^\ell n$, а это число переходит за ℓ шагов в n. Существует очень малая вероятность, что n совпадёт с числом $2^k m-1$, с которого мы начали. Предположим, что исходное число $2^k m-1$ составляет примерно гугол (10^{100}); тогда при спуске с горы обязательно появится число между одним и двумя гуголами, так что вероятность, что это число совпадает с исходным, не меньше чем единица, делённая на гугол. (Это подтверждается рассмотрением меньших n, когда видно, что первое число, попадающее в область $[n, 2n)$, приблизительно равномерно распределено в этой области.) На мой взгляд, тот факт, что эта вероятность хотя и очень мала, но положительна, делает крайне неправдоподобным существование доказательства, что игра Коллатца не имеет циклов, содержащих только большие числа. Не следует путать это с предположением, что действительно *существуют* циклы, содержащие большие числа. В конце концов, события с вероятностью порядка единицы, делённой на гугол, вряд ли могут произойти!

Не хочу, чтобы читатели приняли эти слова на веру. Скорее я хотел бы подбодрить тех, кого они не убедили прилагать ещё больше усилий, чтобы доказать гипотезу Коллатца!

Список литературы

[1] *Conway J. H.* Unpredictable Iterations // Proceedings of the Number Theory Conference (Univ. Colorado, Boulder, 1972). P. 49–52. Также см.: *Lagarias J. C.* (ed.). The ultimate challenge. The $3x+1$ problem. Providence, RI: AMS, 2010. P. 219–224.

[2] *Conway J. H.* Fractran: A Simple Universal Programming Language for Arithmetic // Open Problems in Communication and Computation (*T. M. Cover and B. Gopinath*, eds.). Springer. 1987. P. 4–26. Также см.: *Lagarias J. C.* (ed.). The ultimate challenge. The $3x+1$ problem. Providence, RI: AMS, 2010. P. 249–264.

[3] *Rickard J.* Не опубликовано. (Джон Рикард умер 9 мая 2002 г.)

[4] *Tomás Oliveira e Silva*. Empirical Verification of the $3x+1$ and Related Conjectures // *Lagarias J. C.* (ed.). The ultimate challenge. The $3x+1$ problem. Providence, RI: AMS 2010. P. 189–207.